

# ДИНАМИКА КУБИТОВ В ПОЛЕ УНИПОЛЯРНЫХ ИМПУЛЬСОВ: ПРОПАГАТОР МАГНУСА, «ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ПЛОЩАДЕЙ» И ДВИЖЕНИЕ НА ГРУППАХ

*М. В. Денисенко<sup>а</sup>, Н. В. Кленов<sup>б,с</sup>, А. М. Сатанин<sup>с\*</sup>*

<sup>а</sup> *Нижегородский исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, Россия*

<sup>б</sup> *Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>с</sup> *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова  
101000, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 августа 2018 г.,  
после переработки 10 сентября 2018 г.  
Принята к публикации 11 сентября 2018 г.

Обсуждается задача об ускорении квантовых вычислений путем управления состояниями кубитов короткими униполярными импульсами с большой амплитудой. Предложен новый метод описания динамики кубитов, основанный на представлении Магнуса для оператора эволюции (пропагатора) кубитов, которое позволяет найти решение задачи квантового контроля вне рамок теории возмущений. Эволюция состояний многокубитной системы представлена как движение на специальной унитарной группе  $SU(N)$ , подобное вращению вектора Блоха на группе  $SU(2)$  в случае одного кубита. В качестве примера рассмотрено переключение одиночных кубитов при различных способах возбуждения. Обнаружено общее соотношение, устанавливающее связь профиля импульса с результатом воздействия, подобное известному «закону площадей» для раби-импульсов. Детально изучено воздействие униполярных импульсов на двухкубитную систему. Рассмотрена как симметричная конфигурация, когда параметры кубитов не различаются и на них действует одинаковое магнитное поле со стороны флаксона, так и конфигурация уровней, которая возникает в том случае, когда для одного кубита может стать возможным переход на ближайший уровень под влиянием возмущения. Аналитическое рассмотрение проведено для общего случая двух взаимодействующих кубитов — четырехуровневой системы. Для оценки точности аппроксимации использовано прямое численное моделирование динамики многокубитной системы, а в качестве критерия близости выполнения операций использована «степень соответствия» (fidelity). Показано, что полученные выражения для пропагатора позволяют сформулировать условия для параметров импульса, которые необходимы для выполнения логических операций.

DOI: 10.1134/S004445101902007X

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Количество последовательных операций над регистром сверхпроводниковых кубитов [1–5] существенно ограничено временем декогерентности в такой системе ( $\sim 100$  мкс). Одним из путей преодоления указанного ограничения может стать реализация «быстрой квантовой логики» для управления кубитами, которая позволит манипулировать квантовыми состояниями с характерными временами  $\sim 10$  пс, что станет возможным при отказе от

традиционной раби-техники, где используются заполненные (радио-) импульсы, и переходе на управление униполярными импульсами магнитного поля (см. работы [6–13] и цитированные в них работы). Такие короткие импульсы могут быть созданы в цифровых устройствах сверхпроводниковой электроники с использованием возбуждений (флаксонов), несущих квант магнитного потока. Теория воздействия флаксонов на многокубитные системы позволит получить не только количественные значения для вероятностей перехода между уровнями, но и установить качественные представления о зависимостях этих величин от параметров флаксона.

\* E-mail: sarkady@mail.ru

Это необходимо для «проектирования» импульсов и разработки стратегии управления кубитами.

Теоретическое описание воздействия раби-импульсов на кубиты основано на резонансной теории возмущений (приближении Раби) [14, 15] или квазиэнергетическом подходе в базисе Флоке [16–19]. Понятно, что основная парадигма раби-техники [14, 15] — «закон площадей», основанный на резонансной теории возмущений — не выполняется для униполярных импульсов.

В данной работе предложен новый метод описания динамики кубитов при управлении униполярными импульсами. Для определенности рассматриваются потоковые кубиты на основе сверхпроводящих контуров с тремя джозефсоновскими контактами (3JJ qubit) [1–3]. Предполагается, что управление осуществляется одиночными флаксонами, распространяющимися по связанной магнитным образом с кубитами нелинейной волноводной линии, реализованной на основе джозефсоновских систем с соответствующим образом подобранными параметрами [20–22].

При исследовании переходов между стационарными состояниями на временах, меньших времени декогерентности, будем решать временное уравнение Шредингера для вычисления оператора эволюции  $U(t)$  — пропагатора системы, который определяет ее волновую функцию в любой момент времени:  $\psi(t) = U(t)\psi(0)$ ,  $\psi(0)$  — начальное состояние. Обычной теории возмущений недостаточно для наших целей, поскольку необходимо рассматривать сигналы большой амплитуды для получения заметных изменений в населенности уровней. Для вычисления пропагатора  $U(t)$   $n$ -кубитной системы используем две идеи:

— разложение Магнуса [23, 24] для пропагатора в виде экспоненты  $U(t) = e^{-iM(t)}$  от некоторого оператора  $M(t)$  (оператора Магнуса), для которого имеется простой алгоритм вычисления в виде ряда по степеням гамильтониана с любой требуемой точностью [25–28];

— возможность за пределами рассмотрения в базисе Флоке представить оператор Гамильтона для  $n$  кубитов матрицей  $N \times N$ , где  $N = 2^n$ , а значит, и матрица  $M(t)$  также будет иметь размерность  $N \times N$ . Следовательно, по известной теореме Кэли – Гамильтона [29] пропагатор в данном случае может быть записан в виде разложения по степеням матрицы  $M(t)$ , причем максимальная степень получающегося полинома не выше  $N - 1$ :

$$U(t) = u_0 I + u_1 M(t) + u_2 M^2(t) + \dots + u_{N-1} M^{N-1}(t).$$

Коэффициенты разложения  $u_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ) представлены в явном виде через собственные значения матрицы  $M(t)$ . Отметим, что с точки зрения теории групп речь идет о разложении групповой экспоненты по матрицам группы  $SU(N)$  [30–32]. Эволюция состояния системы может быть представлена как движение на такой группе, подобно повороту вектора Блоха на группе  $SU(2)$  в случае одного кубита. Мы покажем, что коэффициенты разложения  $u_j$  благодаря существованию инвариантов Казимира [32] для матриц  $M(t)$  в группе  $SU(N)$  будут зависеть от меньшего числа параметров, чем сама матрица  $M(t)$ , поэтому будут медленными функциями времени.

В качестве примера продемонстрируем эффективность полученного выражения для описания динамики одного кубита при различных способах возбуждения униполярными импульсами. Найден аналог обобщенного «закона площадей» в случае униполярных импульсов, который в определенном смысле действует подобно закону площадей в случае раби-возбуждения [15]. Полученное выражение для пропагатора далее используется для описания воздействия импульсов на двухкубитную систему. Сначала рассматривается симметричная конфигурация, когда параметры кубитов не различаются и на них действует одинаковое поле со стороны флаксона. В этом случае матрица  $M(t)$  имеет размерность  $3 \times 3$ , т. е. принадлежит группе  $SU(3)$ . Здесь же обсуждается трехуровневая система более общего вида, которая возникает, например, в том случае, когда для одного кубита может стать возможным переход на более высокий уровень под влиянием флаксона. Показано, что и в этом случае задача сводится к вычислению оператора эволюции для матрицы  $M(t)$  в группе  $SU(3)$ . Затем речь пойдет о задаче управления кубитами в более общем случае различными униполярными импульсами. Аналитическое рассмотрение проведено для двух кубитов — четырехуровневой системы, — хотя развитый алгоритм применим к любому числу кубитов (с учетом вычислительных ограничений). Для контроля аппроксимации мы используем прямое численное моделирование динамики многокубитной системы, а в качестве критерия близости выполнения операций использована «степень соответствия» (fidelity).

## 2. УНИПОЛЯРНЫЕ ИМПУЛЬСЫ И СХЕМА УПРАВЛЕНИЯ КУБИТАМИ

В данном разделе представлено общее рассмотрение схемы управления регистром из небольшого числа кубитов униполярными импульсами с заве-

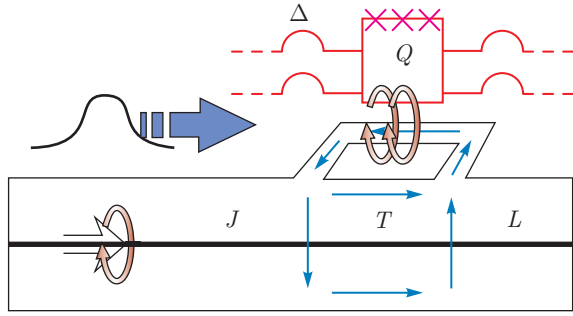


Рис. 1. Схема уединенного кубита (типа 3JJ-кубита) и управляющих импульсов (флаксонов), распространяющихся по джозефсоновской передающей линии

домо широким спектром. Пусть в момент времени  $t = 0$  система приготовлена в начальном состоянии  $\psi(0)$ . Как хорошо известно, временная эволюция системы, гамильтониан которой  $H(t)$  зависит от времени, описывается уравнением

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)U(t). \quad (1)$$

В общем случае решение уравнения Шредингера (1) представляется в виде  $\psi(t) = U(t)\psi(0)$ , где введен оператор эволюции

$$U(t) = \hat{T} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 H(t_1) \right), \quad (2)$$

$\hat{T}$  — оператор хронологического упорядочения. В рассматриваемой задаче управления нас будет интересовать случай, когда воздействие управляющей функции нельзя учитывать по теории возмущений.

### 2.1. Однокубитные операции: схема реализации и основные определения

Сформулируем задачу о быстром управлении уединенным потоковым кубитом [1], схематично изображенном на рис. 1. Гамильтониан кубита имеет вид

$$H(t) = -\frac{1}{2} (\varepsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x), \quad (3)$$

где  $\Delta$  — расстояние между уровнями кубита (туннельное расщепление);  $\varepsilon(t)$  — управляющая функция (пропорциональная магнитному потоку, созданному флаксоном в контуре кубита, см. рис. 1);  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  — матрицы Паули.

Если управляющая функция равна нулю, то кубит может находиться в состояниях

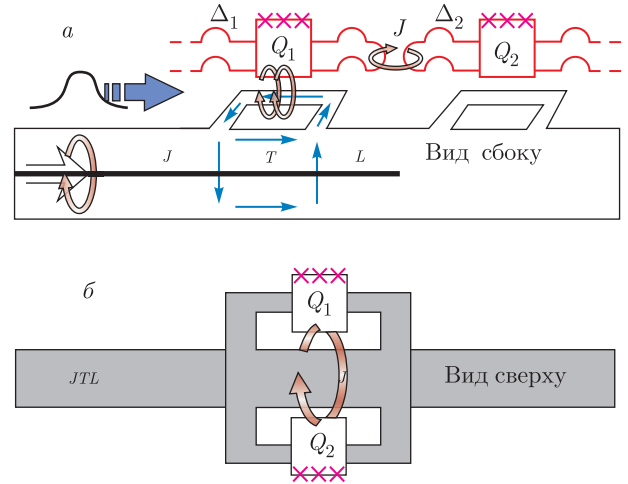


Рис. 2. Схема связанных джозефсоновских кубитов, управляемых униполярными импульсами: последовательное (a) и параллельное («симметричное») (б) расположение кубитов

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

с энергиями  $E_{\pm} = \pm\Delta/2$  соответственно. Отметим, что ниже мы используем различные базисные функции для классификации состояний кубита, которые будут связаны определяемыми унитарными поворотами. Эти функции будут различаться нижними знаками.

Пусть  $\psi(0) = \psi_-$ , тогда вероятность перехода в состояние  $\psi_+$  под влиянием изменения внешнего магнитного потока  $\Phi_{\sim}(t)$ , пронизывающего сверхпроводящий контур кубита (т.е. переход под действием управляющей функции:  $\varepsilon(t) = I_p \Phi_{\sim}(t)/\Phi_0$ , где  $I_p$  — ток джозефсоновского перехода,  $\Phi_0$  — квант потока [1]), определяется выражением

$$P_{(-)\rightarrow(+)}(t) = |\langle \psi_+ | U(t) | \psi_- \rangle|^2. \quad (4)$$

Пусть также управляющий импульс имеет характерную амплитуду  $\varepsilon_m$  и характерную длительность  $\tau$ . Ниже мы проанализируем два случая возбуждения кубита, когда амплитуда  $\varepsilon_m$  может быть как меньше, так и больше туннельного расщепления  $\Delta$ . Для конкретных расчетов будут использоваться импульсы двух типов: прямоугольные импульсы вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \theta(t)\theta(\tau - t) \quad (5)$$

и импульсы с гауссовым профилем:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \exp \left( -\frac{(t - t_0)^2}{2\tau^2} \right), \quad (6)$$

где  $\theta(t)$  — функция Хевисайда,  $t_0$  — момент достижения максимума (в случае гауссова импульса (6)).

**2.2. Двухкубитные операции: схема реализации и основные определения**

В случае управления парой связанных кубитов предполагается, что каждый кубит описывается гамильтонианом типа (3) с соответствующими параметрами и управляющей функцией. Взаимодействие кубитов характеризуется единственным параметром  $J$ . Константа связи может быть как положительной, так и отрицательной для ферро- или антиферро-

магнитного взаимодействия соответственно. Согласно [1, 20] гамильтониан взаимодействующих кубитов можно записать в виде

$$H = -\frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 \sigma_z^{(1)} + \Delta_1 \sigma_x^{(1)} \right) \otimes I^{(2)} - \frac{1}{2} I^{(1)} \otimes \left( \varepsilon_2 \sigma_z^{(2)} + \Delta_2 \sigma_x^{(2)} \right) - \frac{1}{2} J \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{1,2}$  — управляющие функции вида (5) или (6) с соответствующими параметрами,  $\Delta_{1,2}$  — туннельное расщепление уровней кубитов, знак  $\otimes$  означает прямое произведение в пространстве состояний кубитов. Выражение (7) можно переписать в матричной форме:

$$H(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + J & \Delta_2 & \Delta_1 & 0 \\ \Delta_2 & \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) - J & 0 & \Delta_1 \\ \Delta_1 & 0 & -\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) - J & \Delta_2 \\ 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & -\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) + J \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В эксперименте с «последовательной» конфигурацией (рис. 2а) импульсы могут приходить на пару кубитов в разные моменты времени и иметь разные параметры (амплитуды и длительности) из-за разной магнитной связи флаксона с кубитом, а также иметь разные форму и скорости в различных областях активной джозефсоновской среды. В симметричной («параллельной») конфигурации (рис. 2б) можно организовать воздействие одинаковыми импульсами на кубиты в один и тот же момент времени, если использовать возможности трехмерного проектирования сверхпроводниковых схем для реализации кубитной связи.

В статическом случае параметры  $\Delta_i$  определяют спектр несвязанных кубитов:  $E_i = \pm(1/2)\Delta_i$  (при  $J = 0$ ). Энергетические уровни  $E_j^{(2)}$  и волновые функции  $|e_j\rangle$  двух связанных кубитов ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) при  $\varepsilon_{1,2} \rightarrow 0$  приведены в Приложении А.

В качестве начального состояния могут быть выбраны как состояния  $|e_j\rangle$ , так и любая линейная комбинация этих состояний. Если начальные состояния пары кубитов заданы вектором  $|e_k\rangle$ , то вероятность перехода в состояние  $|e_j\rangle$  определяется выражением

$$P_{k \rightarrow j}(t) = |\langle e_j | U(t) | e_k \rangle|^2. \quad (9)$$

Представляет интерес также изучить возбуждение одинаковых кубитов с параметрами  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$  (симметричных) одинаковыми импульсами  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  (см. рис. 2б). При этом гамильтониан системы кубитов в симметричной конфигурации имеет вид

$$H^T(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\varepsilon(t) + \frac{2}{3}J & \sqrt{2}\Delta & 0 \\ \sqrt{2}\Delta & -\frac{4}{3}J & \sqrt{2}\Delta \\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\varepsilon(t) + \frac{2}{3}J \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Вывод выражения для гамильтониана (10) для триплетного состояния кубитов, а также получение уровней  $E_k^T$  и собственных векторов  $|T_k\rangle$  ( $k = 1, 2, 3$ ) при  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  приведены в Приложении А. Мы будем интересоваться вероятностями перехода  $P_{k \rightarrow j}(t) = |\langle T_j | U(t) | T_k \rangle|^2$  ( $k = 1, 2, 3$ ), где пропагатор подчиняется уравнению (1) с гамильтонианом (10).

Наряду с «симметричным» гамильтонианом (10), полезно рассмотреть трехуровневую модель более общего вида, которая позволит исследовать влияние соседних уровней на возможность управления кубитами унipoлярными импульсами. Пусть уровни кубита связаны с третьим уровнем некоторым матричным элементом. Для простоты считается, что управляющий импульс влияет на все три состояния. Модельный гамильтониан возьмем в виде

$$H_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2A & \alpha\varepsilon(t) & 0 \\ \alpha\varepsilon(t) & \Delta - A & \varepsilon(t) \\ 0 & \varepsilon(t) & -\Delta - A \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  будет иметь место трехуровневая система, для которой энергии состояний определяются из условий:  $E_+ = (\Delta - A)/2$ ,  $E_- = -(\Delta + A)/2$  и  $E_d = A$  ( $\Delta \leq A$ ). Параметр  $\alpha$  определяет степень влияния управления на населенность верхнего уровня.

### 3. РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНУСА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

Построим аппроксимационное представление для оператора эволюции — разложение Магнуса:

$$U(t) = e^{-iM(t)}, \tag{12}$$

где введен эрмитов оператор  $M$ ,  $M^+ = M$ . Согласно [23], оператор  $M$  в общем случае определяется бесконечным рядом, слагаемые которого пропорциональны соответствующим степеням исходного оператора Гамильтона:

$$M = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)} + \dots \tag{13}$$

Далее, оператор  $U(t)$  в виде (12) подставляется в (1) и в полученном выражении приравниваются соответствующие слагаемые одинакового порядка малости слева и справа от знака равенства. Интегрируя полученные соотношения, приходим к цепочке выражений:

$$M^{(1)}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt_1 H(t_1), \tag{14}$$

$$M^{(2)}(t) = \frac{i}{2\hbar^2} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 [H(t_1), H(t_2)], \tag{15}$$

$$M^{(3)}(t) = -\frac{1}{4\hbar^3} \int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \times \\ \times \left\{ [[H(t_1), H(t_2)], H(t_3)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} [H(t_1), [H(t_2), H(t_3)]] \right\} \tag{16}$$

и т. д. Если в теории имеется малый параметр, то достаточно будет ограничиться в экспоненте учетом нескольких слагаемых по степеням этого параметра. Эффективная численная методика оперирования с рядами, определяющими разложение Магнуса, а также численная процедура действия пропагатора на состояния системы описаны в работах по вычислительной физике (см., например, [25–28] и цитированную там литературу).

Зависимость волновой функции от времени находится согласно соотношению  $\psi(t) = U(t)\psi(0)$ . Чтобы подействовать оператором эволюции в форме (12) на начальное состояние, воспользуемся теоремой Кэли–Гамильтона [29], согласно которой любая

разложимая в ряд функция от матрицы представляет собой полином степени не выше ее ранга. В рассматриваемом случае из теоремы Кэли–Гамильтона следует разложение для экспоненты в виде

$$e^{-iM(t)} = u_0 I + u_1 M(t) + \\ + u_2 M^2(t) + \dots + u_{N-1} M^{N-1}(t), \tag{17}$$

где в правой части стоит матричный полином степени  $N-1$  (а также единичная матрица  $I_{N \times N}$ ). Отметим также, что конечность ряда (17) в разложении экспоненты следует из теории групп (см. [30–32]).

Пусть матрица  $M(t)$  приведена к диагональному виду  $M(t) = S^\dagger(t)\mu(t)S(t)$ , где матрица унитарного поворота  $S^\dagger(t)S(t) = I$ , а элементы  $\mu_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) — собственные значения матрицы  $M(t)$ , определяемые из соотношения

$$\det(M(t) - \mu(t)I) = 0. \tag{18}$$

Отметим, что матрица  $M(t)$  обладает свойством  $\text{Tr}(M(t)) = 0$ , поэтому

$$\mu_1(t) + \mu_2(t) + \dots + \mu_N(t) = 0.$$

Применяя указанный унитарный поворот к обеим частям (17), получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_1^N \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_2^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \mu_{N-1} & \mu_{N-1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_{N-1}^N \\ 1 & \mu_N & \mu_N^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mu_N^N \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_1} \\ e^{-i\mu_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-i\mu_{N-1}} \\ e^{-i\mu_N} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где слева возникла матрица Вандермонда, элементами которой являются степени собственных значений матрицы  $M(t)$ . Выполняя обращение матрицы Вандермонда, можно выразить все коэффициенты разложения оператора  $U(t)$  (17) через собственные значения матрицы  $M(t)$ . Понятно, что при  $N = 2, 3, 4$  это можно сделать аналитически, а при  $N > 4$  — при помощи численных методов.

Таким образом, практическое значение развитой методики состоит в том, что вектор состояний кубитов в текущий момент времени определяется согласно (17) «мгновенным» значением пропагатора. Как видно, полное вращение вектора определяется действием на начальное состояние матричного полинома, которое содержит различные степени матрицы  $u_j M^j(t)$  с соответствующими весами  $u_j(t)$ . Как будет видно из дальнейшего, коэффициенты разложения  $u_j(t)$  могут слабо зависеть от времени.

### 3.1. Однокубитные операции: общее рассмотрение

В качестве примера рассмотрим эволюцию состояний одного кубита. В этом случае матрица  $M$  может быть разложена по матрицам Паули:

$$M = M_x \sigma_x + M_y \sigma_y + M_z \sigma_z.$$

Собственные значения  $M$  равны  $\mu = \pm \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ , а выражение (19) сводится к уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu} \\ e^{i\mu} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

где  $M_j = (1/2) \text{Tr}(\lambda_j M)$ . Отметим, что мы рассматриваем значение матрицы  $M \equiv M(t)$  в момент времени  $t$ .

Собственные значения  $M$ , определяемой (22), находятся из выражения

$$\mu^3 - \frac{1}{2} C_2 \mu - \frac{1}{3} C_3 = 0, \quad (23)$$

где введены так называемые инварианты Казимира [30–32]:

$$C_2 = \text{Tr}(M^2) = r^2, \quad C_3 = \text{Tr}(M^3) = \frac{r^2}{2\sqrt{3}} \cos \theta,$$

которые, в свою очередь, определяют два параметра:  $r$  и  $\theta$ . Как известно [33], три корня уравнения

Решая (20) относительно  $u_0$  и  $u_1$ , из (17) находим

$$U(t) = \cos \mu(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i \sin \mu(t)}{\mu(t)} \times \begin{pmatrix} M_z(t) & M_x(t) - iM_y(t) \\ M_x(t) + iM_y(t) & -M_z(t) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где компоненты вектора Блоха определяются соотношением  $\mathbf{M}(t) = (1/2) \text{Tr}(\sigma M(t))$ .

### 3.2. Двухкубитные операции: общее рассмотрение

Разработанный метод позволяет относительно просто выйти за рамки рассмотрения двухуровневых систем, что для интересующих нас применений имеет критически важное значение: униполярное пикосекундное «флаксонное» воздействие на квантовую систему заведомо имеет широкий спектр и вполне может вести к возбуждению состояний, достаточно высоко расположенных по энергиям.

Рассмотрим далее два связанных кубита в симметричной конфигурации (10). Последовательное суммирование ряда (13) приводит к заполнению элементов матрицы, которая в данном случае раскладывается по матрицам Гелл-Манна  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) группы  $SU(3)$  [30]:

$$M = \sum_{j=1}^8 M_j \lambda_j = \begin{pmatrix} M_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} M_8 & M_1 - iM_2 & M_4 - iM_5 \\ M_1 + iM_2 & -M_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} M_8 & M_6 - iM_7 \\ M_4 + iM_5 & M_6 + iM_7 & -\frac{1}{\sqrt{3}} M_8 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

(23) определяются формулой Кардано–Виета:

$$\mu_k = \sqrt{\frac{2}{3}} r \cos \left( \theta + \frac{2\pi k}{3} \right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Отметим, что корни кубического уравнения зависят всего от двух параметров ( $r$  и  $\theta$ ). Поскольку корни найдены, можно определить коэффициенты разложения  $u_j(t)$  в выражении

$$U(t) = u_0 I + u_1 M(t) + u_2 M^2(t) \quad (25)$$

путем обращения матрицы Вандермонда:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 \\ 1 & \mu_3 & \mu_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_1} \\ e^{-i\mu_2} \\ e^{-i\mu_3} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ . Решение для (26) приведено в Приложении В.

Рассмотрим теперь воздействие униполярного импульса на два связанных кубита в общем случае,

когда параметры кубитов и параметры управляющих импульсов могут заметно различаться (группа SU(4) [30, 34]). В этом случае  $M \equiv M(t)$  раскладывается по матрицам Гелл-Манна  $\lambda_j$  группы SU(4):

$$M = \sum_{j=1}^{15} M_j \lambda_j = \begin{pmatrix} M_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} M_8 + \frac{1}{\sqrt{6}} M_{15} & M_1 - iM_2 & M_4 - iM_5 & M_9 - iM_{10} \\ M_1 - iM_2 & -M_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} M_8 + \frac{1}{\sqrt{3}} M_{15} & M_6 - iM_7 & M_{11} - iM_{12} \\ M_4 + iM_5 & M_6 + iM_7 & \frac{1}{\sqrt{6}} M_{15} & M_{13} - iM_{14} \\ M_9 + iM_{10} & M_{10} + iM_{12} & M_{13} + iM_{14} & -\frac{2}{\sqrt{6}} M_{15} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В общем случае собственные значения матрицы  $M$ , определяемой (27), находятся из выражения

$$\mu^4 - \frac{1}{2} C_2 \mu^2 - \frac{1}{3} C_3 \mu + \frac{1}{8} (C_2^2 - 2C_4) = 0, \quad (28)$$

где также введены инварианты Казимира, определяемые соотношениями  $C_n = \text{Tr}(M^n)$ . Входящие в (28) коэффициенты удобно связать с тремя действительными параметрами:  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$  (см. [33, 34]):

$$\begin{aligned} r^2 = C_2, \quad \sin \theta \sin 2\theta \cos 2\phi = \frac{4}{3r^3} C_3, \\ (1 + (2 \sin^2 \phi - 3) \sin^2 \theta) \times \\ \times (1 + (2 \cos^2 \phi - 3) \sin^2 \theta) = 2(C_2^2 - 2C_4). \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть решения (29) относительно  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$  найдены, тогда корни уравнения (28) выражаются формулой Феррари (см. [34]):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= r \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right), \\ \mu_2 &= r \left( +\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right), \\ \mu_3 &= r \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right), \\ \mu_4 &= r \left( +\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что корни уравнения четвертой степени зависят всего от трех параметров:  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$ .

Таким образом, пропагатор кубитов в случае группы SU(4) определяется выражением

$$U(t) = u_0 I + u_1 M(t) + u_2 M^2(t) + u_3 M^3(t), \quad (31)$$

где коэффициенты разложения  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) находятся решением линейной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \mu_1^3 \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \mu_2^3 \\ 1 & \mu_3 & \mu_3^2 & \mu_3^3 \\ 1 & -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_1} \\ e^{-i\mu_2} \\ e^{-i\mu_3} \\ e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

#### 4. ДЕЙСТВИЕ УНИПОЛЯРНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА КУБИТ: ПРИМЕРЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проиллюстрируем применение развитой выше теории на примере управления состояниями кубита униполярными импульсами различной длительности и амплитуды.

Коэффициенты  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ), выраженные через собственные значения матрицы  $M$ , выписаны в явном виде в Приложении В.

### 4.1. Управление населенностями состояний кубита при малой амплитуде униполярного импульса

Начнем с ситуации, когда параметры импульсов (5) и (6) таковы, что характерная амплитуда  $\varepsilon(t)$  управляющего импульса меньше туннельного расщепления  $\Delta$ . Предварительно совершим унитарное преобразование гамильтониана (3):  $\bar{H}(t) = S_1^\dagger H S_1$ , выбрав матрицу преобразования в виде

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Результатом преобразования будет выражение для гамильтониана:

$$\bar{H}(t) = -\frac{1}{2} (\Delta\sigma_z + \varepsilon(t)\sigma_x). \quad (33)$$

Второе слагаемое в (33) при определенных параметрах для амплитуды и длительности сигнала может давать малый вклад, поэтому мы совершим второе каноническое преобразование, позволяющее выделить точно диагональный вклад в динамику системы:

$$\bar{\bar{H}}(t) = S_2^\dagger \bar{H}(t) S_2 - iS_2^\dagger \frac{\partial S_2}{\partial t}, \quad (34)$$

где  $S_2 = \exp(-i\Delta t\sigma_z/2)$ . Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\bar{\bar{H}}(t) = -\frac{\varepsilon(t)}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Delta t} \\ e^{i\Delta t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

а оператор эволюции  $\bar{\bar{U}}(t)$  подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \bar{\bar{U}}(t)}{\partial t} = \bar{\bar{H}}(t) \bar{\bar{U}}(t). \quad (36)$$

Фактически, мы переходим к представлению взаимодействия, но в дальнейшем не используем теорию возмущений для расчетов, а строим интерполяционный оператор эволюции. Согласно изложенной выше методике оператор эволюции  $\bar{\bar{U}}(t)$  представляется в форме Магнуса,  $\bar{\bar{U}}(t) = e^{-iM(t)}$ , а затем записывается в виде (21).

Далее для аналитических расчетов мы ограничимся двумя членами в разложении (13), что согласно (14) и (15) дает для коэффициентов разложения по матрицам Паули выражения

$$M_x + iM_y = -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \varepsilon(t_1) e^{i\Delta t_1}, \quad (37)$$

$$M_z = \frac{1}{4} \int_0^t dt_2 \varepsilon(t_2) \int_0^{t_2} dt_1 \varepsilon(t_1) \sin \Delta(t_1 - t_2).$$

Пусть кубит в начальный момент времени приготовлен в состоянии  $\psi_-$ , т. е. «поляризован» вдоль оси  $x$ . Волновая функция в новом базисе связана с исходной соотношением  $\bar{\psi}(t) = S_1^{-1} \psi(t)$ , поэтому переходу  $\psi_- \rightarrow \psi_+$  в новом базисе будет соответствовать переход между состояниями  $\bar{\psi}_0 \rightarrow \bar{\psi}_1$ , где  $\bar{\psi}_0 = (1, 0)^T$ ,  $\bar{\psi}_1 = (0, 1)^T$ . С учетом проделанных выше унитарных поворотов волновую функцию можно записать в виде

$$\bar{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \left( \cos \mu - i \frac{\sin \mu}{\mu} M_z \right) \exp \left( -i \frac{\Delta t}{2} \right) \\ -i \frac{\sin \mu}{\mu} (M_x + iM_y) \exp \left( i \frac{\Delta t}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

что приводит к выражениям для населенностей вида

$$p_1(t) = \left( 1 - \frac{M_z^2}{\mu(t)^2} \right) \sin^2 \mu(t), \quad (39)$$

$$p_0(t) = \cos^2 \mu(t) + \frac{M_z^2}{\mu(t)^2} \sin^2 \mu(t),$$

где временная зависимость  $M_x, M_y, M_z$  определяется согласно (37). Пусть при  $t = 0$  величины  $p_0 = 1, p_1 = 0$ . Как видно из выражения (39), полный переворот «псевдоспина»  $p_0 = 0, p_1 = 1$  после приложения униполярного импульса длительности  $\tau$  будет возможен, если одновременно выполняются два условия:  $\mu = \pi/2$  и  $M_z = 0$ .

В работе [11] предполагалось, что вклад слагаемого  $M_z$  мал, поэтому для полного переворота «псевдоспина» после действия импульса достаточно было выполнения одного условия  $\mu = \pi/2$  или, что эквивалентно, равенства

$$\left( \int_0^\tau dt \varepsilon(t) \sin \Delta t \right)^2 + \left( \int_0^\tau dt \varepsilon(t) \cos \Delta t \right)^2 = \pi^2, \quad (40)$$

что можно выполнить для импульсов прямоугольной и гауссовой формы. Итак, в этом случае вероятность переворота определяется фурье-образом управляющей функции импульса:

$$\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \varepsilon(t_1) e^{i\Delta t_1},$$

что в определенном смысле обобщает «закон площадей» для раби-импульсов.



Для прямоугольного импульса (5) «обобщенное правило площадей» сводится к условию для параметров импульса для реализации инверсии состояния:

$$\sin \frac{\Delta\tau}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\varepsilon_m}, \quad (41)$$

которое выполняется при

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{\varepsilon_m} < 1.$$

При этом

$$M_z = -\frac{\varepsilon_m^2}{4\Delta^2} (\Delta\tau - \sin \Delta\tau). \quad (42)$$

Если  $\Delta\tau \ll 1$ , то

$$M_z \approx \frac{\varepsilon_m^2}{24\Delta} (\Delta\tau)^3. \quad (43)$$

Видно, что при  $\Delta\tau \ll 1$  вклад параметра  $M_z$  в вероятность переворота «псевдоспина» мала и им можно пренебречь. Это и дает нам крайне важное для реализации на практике управляемых переходов между базисными состояниями требование на малую длительность внешнего воздействия.

В случае импульса гауссовой формы (6) предположим, что для времени достижения максимума  $t_0$  и длительности импульса  $\tau$  выполнено неравенство  $\tau \ll t_0$ . В этом случае в интеграле (37) пределы интегрирования можно распространить до  $\pm\infty$ , тогда

$$M_x + iM_y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_m \tau e^{i\Delta t_0} e^{-(\Delta\tau)^2/2}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что, если при соответствующем выборе параметров вклад от  $M_z$  мал, то возможно полное переключение кубита при

$$\varepsilon_m \tau e^{-(\Delta\tau)^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (45)$$

Проиллюстрируем сказанное путем расчета временных зависимостей  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  согласно (37), а также сравним полученные данные с результатами решения уравнения Шредингера. Если параметры управляющего импульса таковы, что  $\Delta\tau \ll 1$ , то компонента  $M_z$  (определенная формулой (37)) вносит малый вклад в вероятность переворота «псевдоспина», что наглядно продемонстрировано на рис. 3а. Временная динамика кубита, установленная решением уравнения Шредингера (красная кривая на рис. 3б), и приближенное аналитическое решение по Магнусу (черные точки на рис. 3б) хорошо согласуются. Как видно из рис. 3б, при выбранных параметрах прямоугольного униполярного импульса населенности уровней кубита полностью инвертировались (произошел переворот «псевдоспина»).

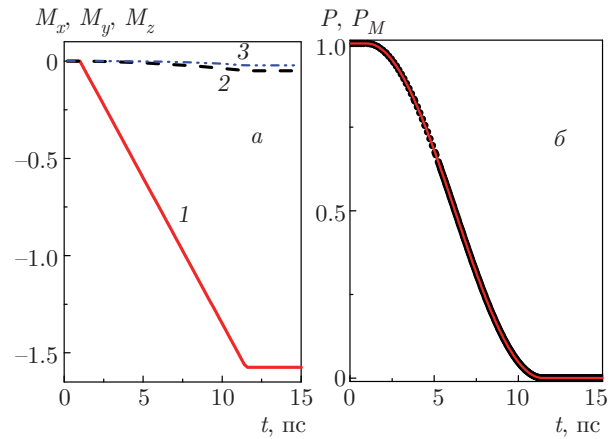


Рис. 3. (В цвете онлайн) а) Динамика элементов матрицы вращения, где  $M_x$  представляет красная кривая 1,  $M_y$  — черная штриховая кривая 2,  $M_z$  — синяя штрихпунктирная кривая 3. б) Временная эволюция населенности основного состояния кубита с туннельной энергией  $\Delta = 0.005$  ГГц, где красная кривая — результат решения уравнения Шредингера  $P(t)$ , черные точки — аналитическое решение  $P_M(t)$  по Магнусу (39). Параметры управляющего прямоугольного импульса:  $\tau = t_{off} - t_{in} = 10.5$  пс ( $t_{in} = 1$  пс и  $t_{off} = 11.5$  пс),  $\varepsilon_m = 0.3$  ГГц

#### 4.2. Управление населенностями состояний кубита при большой амплитуде униполярного импульса

Пусть теперь амплитуда поля флаксона такова, что это воздействие сильно изменяет расстояние между уровнями. Отличие от рассмотренной выше ситуации здесь будет состоять в том, что разложение Магнуса следует вести по другому параметру. Считая первое слагаемое в (3) основным приближением, предварительно совершим каноническое преобразование, выделяющее основной вклад:

$$\bar{H}(t) = S_3^\dagger H(t) S_3 - i S_3^\dagger \frac{\partial S_3}{\partial t}, \quad (46)$$

где

$$S_3 = \exp(-i\beta(t)\sigma_z/2), \quad \beta(t) = \int_0^t dt_1 \varepsilon(t_1).$$

Выражение (46) представимо в виде

$$\bar{H}(t) = -\frac{\Delta}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\beta(t)} \\ e^{i\beta(t)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Оператор эволюции берется в форме Магнуса:  $\bar{U}(t) = \exp(-iM(t))$ , где элементы матрицы  $M(t)$  определяются следующими выражениями:

$$M_x + iM_y = -\frac{\Delta}{2} \int_0^t dt_1 e^{i\beta(t_1)}, \quad (48)$$

$$M_z = \frac{\Delta^2}{4} \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \sin(\beta(t_1) - \beta(t_2)). \quad (49)$$

В свою очередь, волновая функция при начальном условии  $\psi(0) = \psi_-$  будет определена как

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left( \cos \mu - i \frac{\sin \mu}{\mu} (M_z + M_x - iM_y) \exp\left(-i \frac{\beta(t)}{2}\right) \right) \\ \left( \cos \mu + i \frac{\sin \mu}{\mu} (M_z - M_x - iM_y) \exp\left(i \frac{\beta(t)}{2}\right) \right) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Вероятность переворота «псевдоспина» находится из выражения

$$p_+(t) = \left( \cos \mu \sin \frac{\beta}{2} + M_z \frac{\sin \mu}{\mu} \cos \frac{\beta}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sin \mu}{\mu} \right)^2 \left( M_x \sin \frac{\beta}{2} + M_y \cos \frac{\beta}{2} \right)^2. \quad (51)$$

В качестве примера приведем выражения для элементов матрицы поворота в случае действия импульса с «прямоугольной» огибающей:

$$M_x(t) = -\frac{\Delta}{2\varepsilon_m} \times \begin{cases} \sin(\varepsilon_m t), & t < \tau, \\ \sin(\varepsilon_m \tau) + (t - \tau)\varepsilon_m \cos(\varepsilon_m \tau), & t > \tau, \end{cases} \quad (52)$$

$$M_y(t) = -\frac{\Delta}{2\varepsilon_m} \times \begin{cases} 1 - \cos(\varepsilon_m t), & t < \tau, \\ 1 - \cos(\varepsilon_m \tau) + (t - \tau)\varepsilon_m \sin(\varepsilon_m \tau), & t > \tau, \end{cases} \quad (53)$$

$$M_z \approx \frac{\Delta^2}{4\varepsilon_m^2}. \quad (54)$$

Как видно, в данной ситуации разложение Магнуса проводится по параметру  $\Delta/\varepsilon_m$ . Однако вероятность перехода зависит от двух интегралов:

$$M_x + iM_y = \frac{\Delta}{2} \int_0^t dt_1 e^{-i\beta(t_1)}, \quad \beta(t) = \int_0^t dt_1 \varepsilon(t_1).$$

Это означает, что при рассматриваемом способе возбуждения вероятность перехода не сводится лишь к фурье-преобразованию управляющей функции импульса.

Проиллюстрируем полученные выводы путем расчета по развитой методике и прямым численным

интегрированием уравнения Шредингера. Мы рассмотрим инвертирование населенностей уровней кубита в поле большой амплитуды, без дополнительного условия на соотношение расстояния между уровнями кубита и длительности управляемого импульса. В этом случае наблюдается хорошее согласие численного и аналитического решений для матричных элементов и населенностей, что продемонстрировано на рис. 4. Как видно из рис. 4а, уход вектора «псевдоспина» при вращении по сфере Блоха обусловлен функцией  $M_z$  (см. оценку согласно (54)).

Обсудим кратко вопрос о точности аппроксимации при разложении по Магнусу. Приближенное выражение для оператора эволюции обозначим как  $U_M$ :  $\psi_M(t) = U_M(t)\psi(0)$ . В качестве критерия близости в квантовой теории информации принято выбрать меру близости (fidelity)  $F(t)$ , определяемую как

$$F(t) = \left| \langle \psi(0) | U_M^\dagger(t) U(t) | \psi(0) \rangle \right|^2. \quad (55)$$

При  $F(t) = 1$  мы имеем точную аппроксимацию для оператора эволюции.

Будем вычислять величины согласно изложенной выше схеме по формулам

$$P(t) = |\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle|^2, \quad P_M(t) = |\langle \psi_1 | \psi_M(t) \rangle|^2.$$

Рисунок 5а демонстрирует поведение населенности основного состояния кубита при различных значениях туннельных констант  $\Delta$ . Как видно, приближенное представление оператора эволюции согласно Магнусу (пунктирные линии) и прямое численное решение уравнения Шредингера (сплошные линии) хорошо согласуются друг с другом при выбранных параметрах. Из результатов, представленных на рис. 5, видно, что наибольшая сходимость достигается при выполнении условия  $\Delta\tau \ll 1$ , что обеспечивает сходимость ряда в разложении Магнуса [23]. При этом расхождение аналитических и численных результатов расчетов составляет прибли-

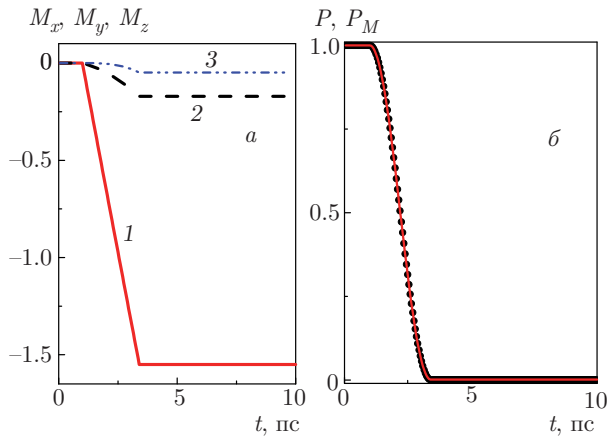
зительно 1.2% для  $\Delta\tau \approx 0.1$  (см. оранжевую кривую на рис. 5б). Заметим, что увеличение туннельной константы кубита  $\Delta$  ведет к увеличению степени несовпадения населенностей (см. рис. 5б). Как следует из описанной выше теории, для улучшения сходимости необходимо рассматривать большее число слагаемых в разложении матрицы Магнуса (13), что всегда можно сделать при проведении численных расчетов.

### 5. ПЕРЕХОДЫ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ КУБИТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УНИПОЛЯРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

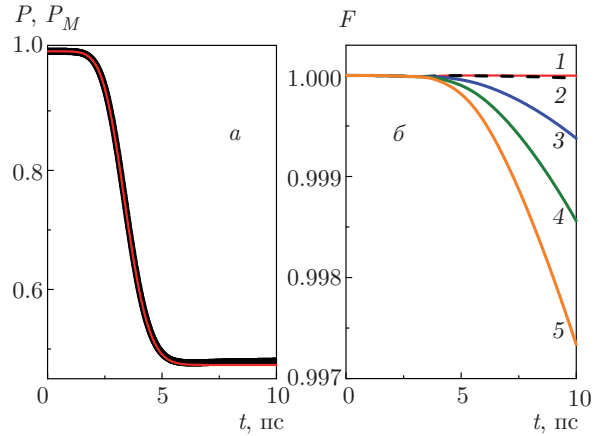
В данном разделе развита выше техника расчета применяется для анализа вероятностей переключения как двух симметричных кубитов, так и двух кубитов с произвольным соотношением параметров.

#### 5.1. Возбуждение населенностей связанных кубитов в симметричной (параллельной) конфигурации

Начнем рассмотрение с анализа вероятностей возбуждения уровней двух симметричных кубитов. Мы стартуем с зависящего от времени гамильтониана-



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) а) Динамика элементов матрицы вращения, где  $M_x$  представляет красная кривая 1,  $M_y$  — черная штриховая кривая 2,  $M_z$  — синяя штрихпунктирная кривая 3. б) Временная эволюция населенности основного состояния кубита с туннельной энергией  $\Delta = 0.05$  ГГц, где красная кривая — результат решения уравнения Шредингера  $P(t)$ , черные точки — аналитическое решение  $P_M(t)$  по Магнусу (39). Параметры управляющего прямоугольного импульса:  $\tau = t_{off} - t_{in} = 2.4$  пс ( $t_{in} = 1$  пс и  $t_{off} = 3.4$  пс),  $\varepsilon_m = 0.3$  ГГц



**Рис. 5.** (В цвете онлайн) а) Динамика населенностей основного состояния кубита, полученных в результате численного моделирования (непрерывная кривая  $P(t)$ ) и аналитического решения (точки  $P_M(t)$ ) при  $\Delta = 0.05$  ГГц. б) Поведение «точности»  $F(t)$  для различных значений туннельных констант (красная кривая 1 —  $\Delta = 0.0025$  ГГц, черная 2 —  $\Delta = 0.01$  ГГц, синяя 3 —  $\Delta = 0.05$  ГГц, зеленая 4 —  $\Delta = 0.075$  ГГц, оранжевая 5 —  $\Delta = 0.1$  ГГц). Использованы следующие параметры гауссова импульса:  $\tau = 1$  пс,  $t_0 = 3$  пс,  $\varepsilon_m = 0.65$  ГГц

на (10), который после унитарного поворота  $\bar{H}(t) = S^\dagger H^{ST}(t)S - iS^\dagger \partial S / \partial t$  с матрицей

$$S(t) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1(t)/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2(t)/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_3(t)/2} \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\phi_1(t) = \chi(t) + \frac{2}{3}Jt, \quad \phi_2(t) = -\frac{4}{3}Jt,$$

$$\phi_3(t) = \chi(t) + \frac{2}{3}Jt, \quad \chi(t) = \int_0^t \varepsilon(t') dt',$$

приобретает вид

$$\bar{H}(t) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha(t)} & 0 \\ e^{i\alpha(t)} & 0 & e^{-i\beta(t)} \\ 0 & e^{i\beta(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

где  $\alpha(t) = \chi(t) + Jt$ ,  $\beta(t) = \chi(t) - Jt$ .

В этом приближении

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_1 - iM_2 & 0 \\ M_1 + iM_2 & 0 & M_6 - iM_7 \\ 0 & M_6 + iM_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где

$$M_1 + iM_2 = -\Delta \int_0^t e^{i\alpha(t')} dt',$$

$$M_6 + iM_7 = -\Delta \int_0^t e^{i\beta(t')} dt'.$$

Матрица  $M$  имеет следующие собственные значения:  $0, -\mu, \mu$ , где

$$\mu = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_6^2 + M_7^2}.$$

Коэффициенты разложения в выражении (25) имеют вид

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -i \frac{\sin \mu}{\mu}, \quad u_2 = \frac{\cos \mu - 1}{\mu^2}.$$

Таким образом, с учетом полученных собственных значений пропагатор для симметричной конфигурации кубитов согласно (25) определяется выражением

$$U(t) = I - i \frac{\sin \mu}{\mu} M(t) + \frac{\cos \mu - 1}{\mu^2} M^2(t). \quad (59)$$

Вероятность перехода между состояниями в этом случае  $|T_j\rangle$ , индуцируемого униполярным воздействием, вычисляется согласно выражению

$$P_{k \rightarrow j}(t) = \left| \delta_{k,j} - i \frac{\sin \mu(t)}{\mu(t)} \langle T_j | M(t) | T_k \rangle + \frac{\cos \mu(t) - 1}{\mu^2(t)} \langle T_j | M^2(t) | T_k \rangle \right|^2. \quad (60)$$

На рис. 6 представлены результаты численного решения уравнения Шредингера и аналитических расчетов (выполненных согласно (60)) временной динамики населенностей уровней двух идентичных кубитов. Из рис. 6а следует, что поведение рассчитанных различными методами населенностей хорошо согласуется. Кроме того, проведена оценка «точности» сходимости численного моделирования и теоретических расчетов по Магнусу. По аналогии со случаем одного кубита была рассчитана мера близости (fidelity)  $F(t)$ , определяемая по формуле (55). Показано, что чем лучше выполнено неравенство  $\Delta\tau \ll 1$ , тем выше точность, что определяется сделанным предположением в теории по аппроксимации оператора эволюции (число удерживаемых слагаемых в разложении (17)). Отметим, что для представленных расчетов при  $\Delta\tau \approx 0.3$  (оранжевая кривая на рис. 6) ошибка расчетов составляет 1.2%.

### 5.2. Вероятность ухода на удаленный уровень

Обратимся теперь к анализу гамильтониана (11), который призван продемонстрировать вероятность

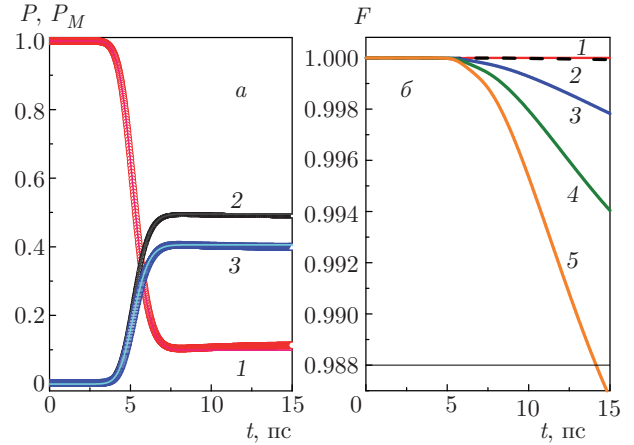


Рис. 6. (В цвете онлайн) а) Временная динамика населенностей двух связанных идентичных кубитов ( $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2, J = 0.01$  ГГц), где непрерывные кривые  $P(t)$  представляют результаты численного моделирования, а точками показаны аналитические решения  $P_M(t)$ . Здесь основному состоянию соответствуют красные кривые 1, промежуточному состоянию — черные кривые 2, возбужденному состоянию — синие кривые 3. б) Поведение «точности»  $F(t)$  для различных значений туннельных констант (красная кривая 1 соответствует  $\Delta = 0.0025$  ГГц, черная 2 —  $\Delta = 0.01$  ГГц, синяя 3 —  $\Delta = 0.05$  ГГц, зеленая 4 —  $\Delta = 0.075$  ГГц, оранжевая 5 —  $\Delta = 0.1$  ГГц). Использованы следующие параметры импульса:  $\tau = 3$  пс,  $t_0 = 1$  пс,  $\varepsilon_m = 0.65$  ГГц

ухода состояний кубита на удаленный уровень под влиянием униполярных импульсов, т.е. «распад» состояния из-за ухода из подпространства состояний кубита. Рассмотрим наиболее интересную ситуацию, когда характерная амплитуда сигнала больше или сравнима с расстоянием между уровнями кубита ( $\bar{\varepsilon} \sim \Delta$ ), которая в то же время слабо связывает состояния кубита с удаленным уровнем  $\alpha \ll 1$ . Чтобы выделить главный вклад при указанных параметрах, совершим унитарный поворот гамильтониана (11) с матрицей

$$U_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

В результате гамильтониан (11) преобразуется к виду

$$\bar{H}_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & \frac{\alpha\varepsilon(t)}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha\varepsilon(t)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha\varepsilon(t)}{\sqrt{2}} & \varepsilon(t) & \Delta \\ \frac{\alpha\varepsilon(t)}{\sqrt{2}} & \Delta & -\varepsilon(t) \end{pmatrix}. \quad (62)$$

$$S_m(t) = \begin{pmatrix} e^{-iAt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(At+\chi(t))/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(At-\chi(t))/2} \end{pmatrix}, \quad (63)$$

где

$$\chi(t) = \int_0^t \varepsilon(t') dt',$$

Следующий шаг — выделить диагональный вклад, что достигается последующим поворотом с матрицей

а гамильтониан приобретает вид

$$\bar{H}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \varepsilon(t) e^{i(3At+\chi(t))/2} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \varepsilon(t) e^{i(3At-\chi(t))/2} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \varepsilon(t) e^{-i(3At+\chi(t))/2} & 0 & \Delta e^{-i\chi(t)} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \varepsilon(t) e^{-i(3At-\chi(t))/2} & \Delta e^{i\chi(t)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Следовательно, матрица Магнуса в этом приближении равна

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_1 - iM_2 & M_4 - iM_5 \\ M_1 + iM_2 & 0 & M_6 - iM_7 \\ M_4 + iM_5 & M_6 + iM_7 & 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

где

$$M_1 + iM_2 = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \int_0^t \varepsilon(t') e^{-i(3At' - \chi(t'))/2} dt',$$

$$M_4 + iM_5 = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \int_0^t \varepsilon(t') e^{-i(3At' - \chi(t'))/2} dt',$$

$$M_6 + iM_7 = \frac{\Delta}{2} \int_0^t e^{i\chi(t')} dt'.$$

При произвольных параметрах системы дальнейший анализ (65) возможен только с использованием численных методов. Упрощение можно получить, если параметр связи кубита с верхним уровнем  $\alpha$  мал ( $\alpha \ll 1$ ). Это означает, что элементы матрицы Магнуса  $M_1, M_2, M_4$  и  $M_5$  малы по сравнению с  $M_6$  и  $M_7$ .

Разложим пропагатор по малому параметру. Действуя в рамках теории возмущений, гамильтониан (14) представим в виде  $\bar{H}(t) = H_0(t) + V(t)$ , где

$$H_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta e^{-i\chi(t)} \\ 0 & \Delta e^{i\chi(t)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$V(t) = \frac{\alpha\varepsilon(t)}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(3At+\chi(t))/2} & e^{i(3At-\chi(t))/2} \\ e^{-i(3At+\chi(t))/2} & 0 & 0 \\ e^{-i(3At-\chi(t))/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пропагатор ищем в виде  $U(t) = U_0(t) (I + S^{(1)}(t))$ , где  $U_0(t)$  определяется зависящим от времени гамильтонианом

$$S^{(1)}(t) = -i \int_0^t dt' U_0^{-1}(t') V(t') U_0(t'). \quad (67)$$

$$i\hbar \frac{\partial U_0(t)}{\partial t} = H_0(t) U_0(t).$$

Из уравнения (1) получаем

Таким образом, пропагатор  $U_0(t)$  можно найти согласно (21), а поправку рассчитать по формуле (67). Пусть кубит первоначально находился в основном состоянии с волновой функцией  $\langle \psi_- | = (100)$ ; нас

интересует вероятность ухода на удаленный уровень  $\langle \psi_u | = (001)$ . Расчет по указанной схеме приводит к выражению

$$p_u(t) = \frac{\alpha^2}{8} \left| \int_0^t dt' \varepsilon(t') e^{i3At'/2} \times \right. \\ \left. \times \left( -ie^{i\chi(t')/2} \frac{\sin \mu(t')}{\mu(t')} m^-(t') + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-i\chi(t')/2} \left( \cos \mu(t') - i \frac{\sin \mu(t')}{\mu(t')} m^-(t') \right) \right) \right|^2, \quad (68)$$

где

$$m^-(t) = \frac{\Delta}{2} \int_0^t dt_1 e^{i\chi(t_1)}. \quad (69)$$

Как и следовало ожидать, вероятность перехода на удаленный уровень квадратично зависит от малого параметра  $\alpha$ . Анализ (68) показывает, что если энергия удаленного уровня велика ( $A \gg \Delta$ ), то интеграл в (68) будет дополнительно сильно подавлен за

счет осциллирующего множителя, пропорционального  $e^{i3At'/2}$ . Эти соображения дают основания рассчитывать на практическую реализацию быстрых переходов между базисными состояниями кубитов под действием коротких импульсов с заведомо широким спектром.

### 5.3. Динамика населенности состояний связанных кубитов под действием униполярных импульсов в общем случае

Как известно, параметры туннельного расщепления связанных кубитов численно малы [1], поэтому при проведении аналитических расчетов мы остановимся на анализе ситуации, когда выполнены соотношения  $\Delta_1 \sim \Delta_2 \ll \varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$ . В этом случае вклад от амплитуды сигнала будет учтен точно путем соответствующего унитарного поворота, а слагаемые, зависящие от туннельных констант, можно учесть по теории возмущений.

Начнем рассмотрение с выражения (8). Основной вклад обусловлен слагаемыми на главной диагонали. Совершая унитарное преобразование, выделяющее главный вклад, приходим к выражению

$$H = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_2 e^{-i(Jt+\chi_2(t))} & \Delta_1 e^{-i(Jt+\chi_1(t))} & 0 \\ \Delta_2 e^{i(Jt+\chi_2(t))} & 0 & 0 & \Delta_1 e^{i(Jt-\chi_1(t))} \\ \Delta_1 e^{i(Jt+\chi_1(t))} & 0 & 0 & \Delta_2 e^{i(Jt-\chi_2(t))} \\ 0 & \Delta_1 e^{-i(Jt-\chi_1(t))} & \Delta_2 e^{-i(Jt-\chi_2(t))} & 0 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

где

$$\chi_j(t) = \int_0^t \varepsilon_j(t') dt' \quad (j = 1, 2).$$

Ограничимся первым приближением по туннельным константам при составлении матрицы  $M(t)$ . Тогда согласно (27), получаем

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_1 - iM_2 & M_4 - iM_5 & 0 \\ M_1 + iM_2 & 0 & 0 & M_{11} - iM_{12} \\ M_4 + iM_5 & 0 & 0 & M_{13} - iM_{14} \\ 0 & M_{11} + iM_{12} & M_{13} + iM_{14} & 0 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

где

$$M_1 + iM_2 = -\frac{\Delta_2}{2} \int_0^t e^{i(Jt'+\chi_2(t'))} dt',$$

$$M_4 + iM_5 = -\frac{\Delta_1}{2} \int_0^t e^{i(Jt'+\chi_1(t'))} dt',$$

$$M_{11} + iM_{12} = -\frac{\Delta_1}{2} \int_0^t e^{-i(Jt'-\chi_1(t'))} dt',$$

$$M_{13} + iM_{14} = -\frac{\Delta_2}{2} \int_0^t e^{-i(Jt'-\chi_2(t'))} dt'.$$

Пропагатор кубитов будет определяться выражением (21), а коэффициенты  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) — вычисляться согласно формулам Приложения В.

Чтобы получить наглядное выражение для пропагатора, рассмотрим специальный случай, когда параметры управляющих импульсов и кубитов удовлетворяют дополнительным условиям:  $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$ , а  $\Delta_1 = \Delta$ ,  $\Delta_2 = \Delta + \delta$ ,  $\delta \ll 1$ . Введем обозначение  $K^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_{11}^2 + M_{12}^2$ . В этом приближении имеем соотношения  $M_4 = M_1$ ,  $M_5 = M_2$ ,  $M_{13} = M_{11}$ ,  $M_{14} = M_{12}$ . Тогда из (70) найдем приближенные собственные значения матрицы  $M$  (с точностью порядка  $\delta$ ):

$$\mu_1 = -\frac{1}{K} \sqrt{\frac{(M_1^2 + M_2^2)(M_{11}^2 + M_{12}^2)}{2}}, \quad \mu_2 = -\mu_1,$$

$$\mu_3 = -\sqrt{2} K \left(1 + \frac{\delta}{2}\right), \quad \mu_4 = -\mu_3.$$

Выражения из Приложения В позволяют записать

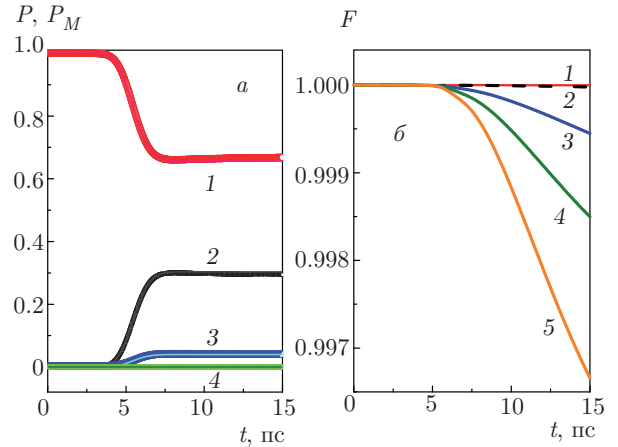
$$P_{k \rightarrow j}(t) = \left| \delta_{k,j} - i \langle e_j | M(t) | e_k \rangle + \frac{e^{i\sqrt{2}K}}{2K^2} \langle e_j | M^2(t) + \frac{i}{2K^2} \langle e_j | M^3(t) | e_k \rangle \right|^2. \quad (72)$$

Таким образом, полученное выражение для пропагатора позволяет вычислить любые вероятности переходов между состояниями двух произвольных кубитов.

В случае двух заметно различающихся по параметрам кубитов проведем анализ временной динамики под действием управляющих униполярных импульсов. На рис. 7 приведено сравнение расчетов численного моделирования и аналитических выражений, полученных на основе разложения Магнуса. Для иллюстрации предполагалось, что на каждый из кубитов одновременно воздействует гауссов сигнал одинаковой амплитуды (см. рис. 2б). Из рис. 7 видно, что после воздействия импульса населенности кубитов быстро стабилизируются, а максимальное расхождение результатов теории и численного расчета (fidelity)  $F(t)$  при  $\Delta_1 \tau \approx 0.1$  (см. оранжевую кривую на рис. 7) составляет приблизительно 3%, что говорит о хорошей аппроксимации в рамках построенной выше теории и о возможности ее расширения на регистр из  $N$  связанных кубитов. Отметим, что точность может быть дополнительно повышена путем учета следующих слагаемых в разложении Магнуса.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый подход для описания эволюции состояний кубитов под действием



**Рис. 7.** а) Временная динамика населенностей двух связанных кубитов, где непрерывные кривые  $P(t)$  получены путем численного моделирования, а точки — аналитические решения  $P_M(t)$ . Здесь населенность основного состояния ( $i = 1$ ) — красные кривые 1, населенность второго уровня ( $i = 2$ ) — черные кривые 2, третьего уровня ( $i = 3$ ) — синие кривые 3 и наивысшего уровня ( $i = 4$ ) — зеленые кривые 4. б) Поведение «точности»  $F(t)$  для различных значений туннельных констант (красная кривая 1 —  $\Delta_1 = 0.0025$  ГГц, черная 2 —  $\Delta_1 = 0.01$  ГГц, синяя 3 —  $\Delta_1 = 0.05$  ГГц, зеленая 4 —  $\Delta_1 = 0.075$  ГГц, оранжевая 5 —  $\Delta_1 = 0.1$  ГГц). Параметры импульсов  $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$  и кубитов  $\Delta_2 = \Delta_1 + \delta$ :  $\tau = 1$  пс,  $t_0 = 5$  пс,  $\varepsilon_m = 0.5$  ГГц,  $\delta = 0.01$  ГГц,  $J = 0.01$  ГГц

одиночных униполярных импульсов магнитного поля с заведомо широким спектром. Результаты показали эффективность использования развитой методики на основе разложения Магнуса для анализа процедур управления кубитными системами короткими униполярными импульсами. В частности, техника расчета хорошо описывает динамику кубитов при управлении флаксонами в цепях быстрой однокубитной логики. Важно подчеркнуть, что при определенных условиях на амплитуду и длительность сильного и ультракороткого воздействия (разд. 5.2) возможны селективные переходы в многоуровневой системе. Дальнейшее развитие предложенной концепции возможно при переходе к управлению посредством цепей сверхпроводниковой адиабатической логики с ультрамалой диссипацией энергии [35–38].

В перспективе такая методика позволит добиться эффективного управления состояниями как отдельных кубитов, так и квантовых регистров на пикосекундных временах. Предложенный подход существенно ускоряет численные расчеты управляющих цепей для многокубитных систем, поскольку

метод Магнуса основан на использовании интерполяционных процедур и не привязан к выбору шага в дискретных схемах. Заметим, что данная техника работает за рамками теории возмущений, когда на систему действуют сигналы большой амплитуды для получения заметных населенностей уровней. Важным преимуществом предлагаемого метода является также то, что после действия импульса пропагатор практически не меняется. Поэтому в рамках данного подхода возможна дальнейшая оптимизация параметров управляющих импульсов для инициализации заданных состояний и реализации различных алгоритмов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант №18-72-00158), РФФИ (гранты №№17-12-01079, 16-57-51045, 16-29-09515, 18-07-01206) и в рамках выполнения проектной части госзадания Министерства образования и науки РФ №3.3026.2017/ПЧ (разд. 2.1).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Собственные значения и собственные функции оператора Гамильтона для двух связанных кубитов без учета внешнего воздействия ( $\varepsilon_{1,2} \rightarrow 0$ ) находятся из стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом (8):

$$\begin{aligned}
 E_1^{(2)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{J^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2}, \\
 \langle e_1 | &= N_1(k_1, \Delta_1 + \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2, k_1), \\
 k_1 &= J + \sqrt{J^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2}, \\
 N_1 &= \left( \sqrt{2(k_1^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2)} \right)^{-1}, \\
 E_2^{(2)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{J^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2}, \\
 \langle e_2 | &= N_2(-k_2, \Delta_1 - \Delta_2, -\Delta_1 + \Delta_2, k_2), \\
 k_2 &= J + \sqrt{J^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2}, \\
 N_2 &= \left( 2\sqrt{Jk_2 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2} \right)^{-1}, \\
 E_3^{(2)} &= \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2}, \\
 \langle e_3 | &= N_3(-k_3, -\Delta_1 + \Delta_2, \Delta_1 - \Delta_2, k_3), \\
 k_3 &= -J + \sqrt{J^2 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2}, \\
 N_3 &= \left( \sqrt{2(-Jk_3 + (\Delta_1 - \Delta_2)^2)} \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_4^{(2)} &= \frac{1}{2}\sqrt{J^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2}, \\
 \langle e_4 | &= N_4(-k_4, -(\Delta_1 + \Delta_2), -(\Delta_1 + \Delta_2), k_4), \\
 k_4 &= -J + \sqrt{J^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2}, \\
 N_4 &= \left( \sqrt{2(k_4^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2)} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Для двух одинаковых кубитов  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$  (симметричных), возбуждаемых одинаковыми импульсами  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , можно совершить унитарный поворот с матрицей

$$U^{ST} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

разложив тем самым гамильтониан на неприводимые представления:

$$\begin{aligned}
 (U^{ST})^{-1} H U^{ST} &= -\frac{1}{2} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 2\varepsilon(t) + J & \sqrt{2}\Delta & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\Delta & -J & \sqrt{2}\Delta & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\varepsilon(t) + J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

В этом случае волновая функция синглетного состояния может рассматриваться независимо, а для изучения динамики можно ограничиться матрицей меньшей размерности

$$\begin{aligned}
 H^{ST}(t) &= -\frac{1}{2} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 2\varepsilon(t) + J & \sqrt{2}\Delta & 0 \\ \sqrt{2}\Delta & -J & \sqrt{2}\Delta \\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\varepsilon(t) + J \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Удобно выделить из  $H^{ST}$  диагональную матрицу, которая изменяет только общую фазу компонентов волновой функции и бесследную матрицу  $H^T(t)$ , определяющую нетривиальную динамику триплетного состояния:

$$\begin{aligned}
 H^T(t) &= -\frac{1}{2} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 2\varepsilon(t) + \frac{2}{3}J & \sqrt{2}\Delta & 0 \\ \sqrt{2}\Delta & -\frac{4}{3}J & \sqrt{2}\Delta \\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\varepsilon(t) + \frac{2}{3}J \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$



Нетрудно видеть, что при  $\varepsilon(t) = 0$  трем собственным значениям гамильтониана (10)

$$E_1^T = -\frac{J}{6}, \quad E_2^T = \frac{J}{6} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{J}{2}\right)^2 + \Delta^2},$$

$$E_3^T = \frac{J}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{J}{2}\right)^2 + \Delta^2}$$

соответствуют три функции, которые можно обозначить как

$$\begin{aligned} \langle T_1 | &= N_1^T(-1, 0, 1), \quad N_1^T = (\sqrt{2})^{-1}, \\ \langle T_2 | &= N_2^T(\sqrt{2}\Delta, -J + \sqrt{J^2 + 4\Delta^2}, \sqrt{2}\Delta), \\ N_2^T &= \left(4\Delta^2 + (-J + \sqrt{J^2 + 4\Delta^2})^2\right)^{-1}, \\ \langle T_3 | &= N_3^T \times \\ &\times (\sqrt{2}\Delta, -(J + \sqrt{J^2 + 4\Delta^2}), \sqrt{2}\Delta), \\ N_3^T &= \left(4\Delta^2 + (J + \sqrt{J^2 + 4\Delta^2})^2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (A.6)$$

Как видно, состояние  $|T_2\rangle$ , соответствующее уровню  $E_2^T$ , является симметричным белловским (перепутанным) состоянием.

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для дальнейших приложений полезно получить в явном виде выражения для коэффициентов разложения пропагатора по степеням матрицы  $M(t)$  трехуровневой (группа  $SU(3)$ ) и четырехуровневой (группа  $SU(4)$ ) систем.

В случае группы  $SU(3)$  коэффициенты разложения пропагатора  $U(t)$  связанных кубитов по степеням матрицы  $M(t)$  определяются системой линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 \\ 1 & \mu_3 & \mu_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_1} \\ e^{-i\mu_2} \\ e^{-i\mu_3} \end{pmatrix}, \quad (B.1)$$

где  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ . Обращая матрицу Вандермонда, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{V_3} \left( \mu_2(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + 2\mu_2)e^{-i\mu_1} - \mu_1(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_1 + \mu_2)e^{-i\mu_2} - \mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2)e^{i(\mu_1 + \mu_2)} \right), \\ u_1 &= \frac{1}{V_3} \left( -\mu_1(\mu_1 + 2\mu_2)e^{-i\mu_1} + \mu_2(2\mu_1 + \mu_2)e^{-i\mu_2} + (\mu_1^2 - \mu_2^2)e^{i(\mu_1 + \mu_2)} \right), \\ u_2 &= \frac{1}{V_3} \left( -(\mu_1 + 2\mu_2)e^{-i\mu_1} + (2\mu_1 + \mu_2)e^{-i\mu_2} - (\mu_1 - \mu_2)e^{i(\mu_1 + \mu_2)} \right), \\ V_3 &= (\mu_2 - \mu_1)(2\mu_1 + \mu_2)(2\mu_2 + \mu_1). \end{aligned} \quad (B.2)$$

В случае группы  $SU(4)$  коэффициенты разложения пропагатора  $U(t)$  кубитов по степеням матрицы  $M(t)$  определяются системой линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \mu_1^3 \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \mu_2^3 \\ 1 & \mu_3 & \mu_3^2 & \mu_3^3 \\ 1 & -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\mu_1} \\ e^{-i\mu_2} \\ e^{-i\mu_3} \\ e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} \end{pmatrix}. \quad (B.3)$$

В данном случае детерминант матрицы Вандермонда равен

$$V_4 = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3). \quad (B.4)$$

Вычисляя обратную матрицу, решение (B.3) запишем в виде

$$u_0 = \frac{1}{V_4} \left( \nu_{01}e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} + \nu_{02}e^{i\mu_3} + \nu_{03}e^{-i\mu_2} + \nu_{04}e^{-i\mu_1} \right), \quad (B.5)$$

$$u_1 = \frac{1}{V_4} \left( \nu_{11}e^{-i\mu_1} + \nu_{12}e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} + \nu_{13}e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} + \nu_{14}e^{i\mu_1} \right), \quad (B.6)$$

$$u_2 = \frac{1}{V_4} \left( \nu_{21}e^{-i\mu_2} + \nu_{22}e^{-i\mu_1} + \nu_{23}e^{i(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} + \nu_{24}e^{-i(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)} \right), \quad (B.7)$$

$$u_3 = \frac{1}{V_4} \left( \nu_{31}e^{i(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)} + \nu_{32}e^{i\mu_3} + \nu_{33}e^{-i\mu_2} + \nu_{34}e^{-i\mu_1} \right), \quad (B.8)$$

где коэффициенты определены соотношениями

$$\begin{aligned} \nu_{01} &= \mu_1 \mu_2 \mu_3 (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_3), \\ \nu_{02} &= \mu_1 \mu_2 (-\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \\ \nu_{03} &= \mu_1 \mu_2 (-\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3), \\ \nu_{04} &= \mu_2 \mu_3 (\mu_1 - \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \nu_{11} &= (-\mu_2 - \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3) ((\mu_1 + \mu_2) (\mu_2 + \mu_3) + \mu_3^2), \\ \nu_{12} &= (\mu_2 - \mu_3) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_3) (\mu_2 \mu_3 + \mu_1 (\mu_2 - \mu_3)), \\ \nu_{13} &= (-\mu_2 + \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) (\mu_1^2 + (\mu_1 + \mu_2) (\mu_2 + \mu_3)), \\ \nu_{14} &= (\mu_1 - \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3) (\mu_1^2 + (\mu_1 + \mu_3) (\mu_2 + \mu_3)), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= \mu_2 (-\mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \\ \nu_{22} &= \mu_1 (\mu_2 - \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \\ \nu_{23} &= (\mu_2 - \mu_3) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3), \\ \nu_{24} &= \mu_3 (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \nu_{31} &= (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_3), \\ \nu_{32} &= (\mu_1 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_3) (\mu_2 \mu_3 + \mu_1 (\mu_2 - \mu_3)), \\ \nu_{33} &= (-\mu_2 + \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3), \\ \nu_{34} &= (\mu_2 - \mu_3) (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Makhlin, G. Schön, and A. Schnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
2. J. Q. You and F. Nori, *Phys. Today* **58**(11), 42 (2005).
3. J. Clarke and F. K. Wilhelm, *Nature* **453**, 1031 (2008).
4. M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf, *Science* **339**, 1169 (2013).
5. F. Yan, S. Gustavsson, A. Kamal et al., *Nature Commun.* **7**, 12964 (2016).
6. D. V. Averin, K. Rabenstein, and V. K. Semenov, *Phys. Rev. B* **73**, 094504 (2006).
7. A. Fedorov, A. Shnirman, G. Schoen, and A. Kidiyaro-Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 224504 (2007).
8. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, A. L. Pankratov et al., *Phys. Rev. E* **87**, 060901(R) (2013).
9. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, S. V. Bakurskiy et al., *Appl. Phys. Lett.* **105**, 202602 (2014).
10. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, A. L. Pankratov et al., *Phys. Rev. B* **92**, 014516 (2015).
11. N. V. Klenov, A. V. Kuznetsov, I. I. Soloviev et al., *Beilstein J. Nanotechnol.* **6**, 1946 (2015).
12. P. J. Liebermann and F. K. Wilhelm, *Phys. Rev. Appl.* **6**, 024022 (2016).
13. N. V. Klenov, A. V. Kuznetsov, I. I. Soloviev et al., *Low Temp. Phys.* **43**, 789 (2017).
14. I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **29**, 174 (1927).
15. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптические резонансы и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
16. Ya. B. Zeldovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51**, 1492 (1966) [*Sov. Phys. JETP* **24**, 1006 (1967)].
17. V. I. Ritus, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51**, 1544 (1966) [*Sov. Phys. JETP* **24**, 1041 (1967)].
18. M. Grifoni and P. H. Hanngi, *Phys. Rep.* **304**, 219 (1998).
19. A. M. Satanin, M. V. Denisenko, S. Ashhab, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **85**, 184524 (2012).
20. A. V. Ustinov, M. Cirillo, and B. A. Malomed, *Phys. Rev. B* **47**, 8357(R) (1993).
21. O. A. Mukhanov, V. K. Semenov, and K. K. Likharev, *IEEE Trans. Magn. MAG* **23**, 759 (1987).
22. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, S. V. Bakurskiy et al., *Beilstein J. Nanotechnol.* **8**, 2689 (2017).
23. W. Magnus, *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 649 (1954).
24. P. Pechukas and J. L. Light, *J. Chem. Phys.* **44**, 3897 (1966).

25. P. A. Rodgers and S. Swain, Phys. B: Atom. Mol. Phys. **20**, 617 (1987).
26. A. Alvermann and H. Fehske, J. Comput. Phys. **230**, 5930 (2011).
27. T. V. Lapyeva, E. A. Kozinov, I. B. Meyerov, M. V. Ivanchenko, S. Denisov, and P. Hänggi, Comput. Phys. Commun. **201**, 85 (2016).
28. M. V. Denisenko, N. V. Klenov, and A. M. Satanin, J. Phys.: Conf. Ser. **955**, 012004 (2018).
29. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1966).
30. Нгуен Ван Хьеу, *Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц*, Атомиздат, Москва (1967).
31. С. Адлер, Р. Дашен, *Алгебры токов и их применение в физике частиц*, Мир, Москва (1970).
32. А. Барут, Р. Рончка, *Теория представления групп и ее приложения*, т. 1, Мир, Москва (1980).
33. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям, с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, Москва (1979).
34. T. Tilma, M. Byrd, and E. C. G. Sudarshan, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 10445 (2002).
35. N. Takeuchi, D. Ozawa, Y. Yamanashi, and N. Yoshikawa, Supercond. Sci. Technol. **26**, 035010 (2013).
36. A. E. Schegolev, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, and M. V. Tereshonok, Beilstein J. Nanotechnol. **7**, 1397 (2016).
37. N. Takeuchi and N. Yoshikawa, Phys. Rev. E **97**, 012124 (2018).
38. R. McDermott, M. G. Vavilov, B. L. T. Plourde et al., Quant. Sci. Technol. **3**, 024004 (2018).