

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ОРБИТ ВОКРУГ ЧЕРНЫХ ДЫР С ПРИЛИВНЫМ ЗАРЯДОМ

*М. Шариф**, *Л. Коусар***

*Математический факультет, Университет Пенджаба
54590, Лахор, Пакистан*

Поступила в редакцию 11 июля 2017 г.

(Перевод с английского)

STABILITY OF CIRCULAR ORBITS AROUND A TIDAL CHARGED BLACK HOLE

M. Sharif, L. Kousar

Исследуется влияние приливного заряда на экваториальное круговое движение нейтральной пробной частицы вблизи черной дыры, обладающей приливным зарядом. Исследуется устойчивость и неустойчивость круговых орбит во всех возможных конфигурациях в неэкстремальном и экстремальном случаях. Показано, что отрицательный приливный заряд увеличивает энергию и момент импульса нейтральной пробной частицы, движущейся вокруг черной дыры. Получена непрерывная область устойчивости для экстремального и неэкстремального случаев. Найдено, что при $Q < 0$ как область устойчивости, так и радиус последней устойчивой круговой орбиты возрастают.

DOI: 10.7868/S0044451018010054

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование черных дыр (ЧД) привлекало внимание исследователей и научного сообщества на протяжении целого ряда лет. Черные дыры являются одним из замечательных предсказаний общей теории относительности из-за своих выдающихся и интригующих свойств. Черная дыра представляет собой небесный объект, обладающий сильным гравитационным притяжением, так что находящаяся поблизости материя, и даже свет, не могут вырваться из его гравитационного поля. Черные дыры имеют вокруг себя четкую гравитационную границу, называемую горизонтом событий, за которым ни о каком событии ничего нельзя узнать. Идея таких компактных объектов впервые была предложена Мичеллом в работе [1], где они были названы темными звездами. В работе [2] было получено, что при взры-

ве очень массивной звезды возникает область, обладающая сильным гравитационным притяжением. В зависимости от массы, черные дыры подразделяются на первичные ЧД, ЧД звездных масс и сверхмассивные ЧД. Первичные ЧД, образовавшиеся в период раннего расширения Вселенной из материи с высокой плотностью, имеют массу порядка массы Солнца. ЧД звездных масс, сформировавшиеся в результате взрывов массивных звезд, имеют массу порядка $(5-10)M_{\odot}$. Сверхмассивные ЧД находятся в центрах галактик и являются чрезвычайно массивными, а именно, их масса составляет $(10^6-10^{10})M_{\odot}$ [3].

В течение последних нескольких десятков лет большой интерес вызывало обсуждение движения частиц (заряженных или нейтральных, массивных или безмассовых) вокруг ЧД. Устойчивость/неустойчивость круговых орбит вокруг черных дыр можно было бы понять лучше, изучая динамику частиц вблизи этих компактных объектов. Геодезические играют важную роль в описании движения частиц вокруг небесных тел. Круговые геодезические несут информацию о геометрии

* E-mail: msharif.math@pu.edu.pk

** E-mail: lubnaali127@gmail.com

пространства-времени. Они имеют ряд интересных свойств, таких как сохранение направления движения частиц на поверхности и определение пути объекта, масса которого мала по сравнению с массой ЧД. В работе [4] были исследованы структуры геодезических для ЧД Шварцшильда – анти-де Ситтера и были найдены все возможные движения на соответствующих уровнях энергии. В работе [5] исследовалась динамика нейтральной пробной частицы вблизи ЧД Рейсснера – Нордстрема (РН) и анализировались различные характеристики круговых орбит как для черных дыр, так и для голых сингулярностей. В этой работе также исследовались устойчивые зоны для круговых орбит вокруг ЧД Керра и были найдены все радиусы, на которых пробная частица может иметь нулевой момент импульса [6]. В работе [7] исследовалась устойчивость круговых орбит для регулярных ЧД Бардина и Айона-Беато – Гарсия и было обнаружено, что спектральные линии качественно аналогичны спектральным линиям для случая ЧД Шварцшильда. В работе [8] исследовалось движение частиц в контексте ЧД высшей размерности и был сделан вывод, что высшие размерности имеют большое влияние на динамику частиц.

Широко обсуждаются основанные на мире бран модели Вселенной, поскольку они эффективно описывают многомерные теории физических взаимодействий. В этих моделях наблюдаемая Вселенная (3-брана) может вкладываться в пятимерное пространство-время (балк). Влияние балкового пространства-времени на ЧД на бране можно обнаружить по приливному заряду, возникающему из-за совместной гравитации браны и балка [9]. ЧД, имеющая приливный заряд, называется заряженной ЧД с приливным зарядом. В случае отрицательного заряда приливные эффекты усиливаются, поскольку гравитация на бране усиливает гравитационное поле вокруг ЧД [10].

В работе [11] исследовалась первая статическая сферически-симметричная ЧД на бране и было получено, что параметр приливного заряда усиливает ее гравитационное поле. В работе [12] рассматривалась динамика пробной частицы в контексте ЧД Керра – Ньюмана и было получено, что отрицательный приливный заряд стремится увеличить радиусы горизонта и последней устойчивой круговой орбиты. В работе [13] анализировалась устойчивость для случая ЧД Керра – анти-де Ситтера и было показано, что ее метрика становится устойчивой при равных параметрах вращения. В работе [14] анализировалось образование таких ЧД на БАК и было най-

дено, что они образуются в течение времени жизни ускорителя. В работе [15] обсуждалась термодинамика заряженной ЧД с приливным зарядом и было найдено, что отрицательный заряд усиливает гравитационные эффекты на бране. В своей недавней работе авторы исследовали движение частиц вблизи намагниченной ЧД с приливным зарядом [16].

В настоящей работе исследуется устойчивость круговых орбит в контексте заряженной ЧД с приливным зарядом. Работа построена следующим образом. В разд. 2 обсуждается круговое движение пробной частицы и вычисляется ее эффективный потенциал в экваториальной плоскости. В разд. 3 рассматривается формализм устойчивости черных дыр для неэкстремального и экстремального случаев. Также обсуждается поведение энергии и момента импульса для частицы, движущейся вокруг заряженной ЧД с приливным зарядом. Результаты работы приведены в последнем разделе.

2. ЭКВАТОРИАЛЬНОЕ КРУГОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим круговое движение нейтральной пробной частицы, движущейся вблизи заряженной ЧД с приливным зарядом. Линейный элемент при этом имеет вид (см. [11])

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2},$$

а M и Q – масса и заряд ЧД. Горизонты ЧД можно получить, решая уравнение

$$f(r) = 0,$$

что дает

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q}, \quad Q > 0. \quad (2)$$

Если $Q < M^2$, то мы получаем два положительных вещественных корня, r_+ и r_- , соответствующих горизонту событий и горизонту Коши. Если $Q > M^2$, то горизонта не будет, что означает наличие голой сингулярности. Если $Q = M^2$, то мы получаем только один горизонт, что приводит к экстремальному случаю, когда

$$r = r_+ = r_- = M.$$

В случае отрицательного заряда существует только один горизонт. Вектор u^α , касательный к кривой $x^\alpha(\tau)$, определяется как

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau},$$

где τ — аффинный параметр вдоль этой кривой. 4-импульс пробной частицы, имеющей массу μ , определяется как

$$P^\alpha = \mu \dot{x}^\alpha.$$

Поскольку метрика остается инвариантной при временной трансляции и вращении вокруг оси симметрии, соответствующие векторы Киллинга определяются следующим образом:

$$\xi_{(t)}^\alpha \partial_\alpha = \partial_t, \quad \xi_{(\phi)}^\alpha \partial_\alpha = \partial_\phi, \quad (3)$$

где

$$\xi_{(t)}^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad \xi_{(\phi)}^\alpha = (0, 0, 0, 1).$$

Динамику нейтральной частицы можно исследовать с помощью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad (4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по собственному времени τ . Для линейного элемента (1) получаем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-f(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \quad (5)$$

В экваториальной плоскости имеем

$$\left(\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \right),$$

что сводится к

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-f(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 \dot{\phi}^2 \right]. \quad (6)$$

Компоненты 4-импульса имеют вид

$$P_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -f(r) \dot{t}, \quad P_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{f(r)} \dot{r},$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi},$$

где P_t и P_ϕ сохраняются вдоль геодезических. Соответствующие энергия и момент импульса имеют вид

$$E = -g_{\alpha\beta} \xi_t^\alpha P^\beta = \mu f(r) \dot{t}, \quad L = g_{\alpha\beta} \xi_\phi^\alpha P^\beta = \mu r^2 \dot{\phi}.$$

Решая эти уравнения для \dot{t} и $\dot{\phi}$, получаем

$$\dot{t} = \frac{E}{\mu f(r)}, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{\mu r^2}. \quad (7)$$

Условие нормировки

$$g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -k$$

приводит к уравнению

$$-f(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = -k, \quad (8)$$

где $k = 0, 1, -1$ соответствуют нулевой, времениподобной и пространственноподобной геодезическим. Используя уравнения (7) и (8), получаем

$$-\frac{E^2}{\mu^2 f(r)} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} = -k. \quad (9)$$

Эффективный потенциал в точках разворота ($\dot{r} = 0$) определяется как

$$U_{eff}^2 = \frac{E^2}{\mu^2} = \left(k + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{r^2} \right). \quad (10)$$

Максимальное значение эффективного потенциала соответствует неустойчивым, а его минимальное значение — устойчивым круговым орбитам; если $r \rightarrow \infty$, то это значение становится постоянным. Нормируем эту постоянную, полагая полную энергию частицы равной E/μ . Рассмотрим движение пробной частицы по круговой орбите радиуса r , которая представляет собой точку конволюции эффективного потенциала, полученную путем решения уравнения

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0.$$

Константы движения имеют вид [17, 18]

$$\frac{L^2}{\mu^2} = k \frac{r^2 (Mr - Q)}{r^2 - 3Mr + 2Q}, \quad (11)$$

$$\frac{E^2}{\mu^2} = k \frac{(r^2 - 2Mr + Q)^2}{r^2 (r^2 - 3Mr + 2Q)}. \quad (12)$$

Используя уравнения (10) и (11), получаем (см. [19])

$$Mr^3 - 6M^2 r^2 + 9MQr - 4Q^2 = 0. \quad (13)$$

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Обсудим устойчивость круговых орбит для неэкстремального и экстремального случаев.

3.1. Неэкстремальный случай

Сначала рассмотрим неэкстремальный случай, для которого

$$0 < Q < M^2.$$

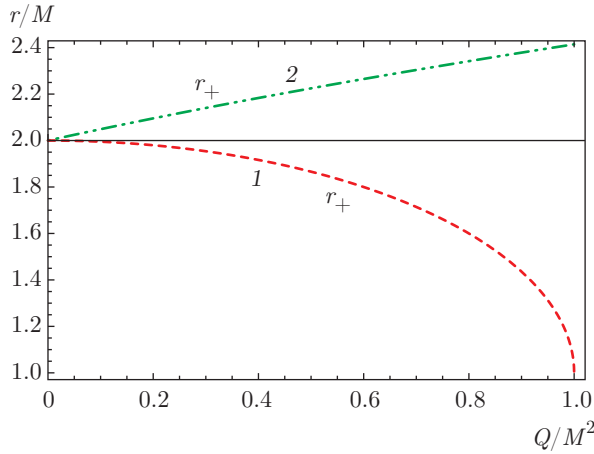


Рис. 1. Сравнение радиусов внешнего горизонта для ЧД РН (1) и заряженной ЧД с приливным зарядом (2)

Из уравнений (11) и (12) видно, что движение возможно только при

$$r > r^* = \frac{Q}{M}$$

и

$$r^2 - 3Mr + 2Q > 0,$$

т.е. $r < \check{r}_-$ и $r > \check{r}_+$, где

$$\check{r}_{\pm} = \frac{3M \pm \sqrt{9M^2 - 8Q}}{2},$$

а вдоль пространственноподобных геодезических — только в областях $r < r^*$ и $r \in (\check{r}_+, \check{r}_-)$. Здесь мы рассмотрим времениподобные круговые орбиты при $r > \check{r}_+$. Было получено, что для ненулевого заряда

$$r_- < \check{r}_- < r^* < r_+ < \check{r}_+.$$

При $Q = M^2$ имеем

$$r_+ = r_- = \check{r}_-,$$

а при $Q \rightarrow 0$ имеем

$$r_- = \check{r}_- = r^*.$$

Сравнение радиусов горизонта событий для заряженной ЧД с приливным зарядом ($Q < 0$) и ЧД РН показано рис. 1. Из рисунка видно, что радиус горизонта событий для заряженной ЧД с приливным зарядом больше, чем для ЧД РН. График зависимости r_{lsc0} от заряда для заряженной ЧД с приливным зарядом показан на рис. 2. При $Q = M^2$ значение радиуса минимально и равно

$$r_{lsc0}^{min} = 4M,$$

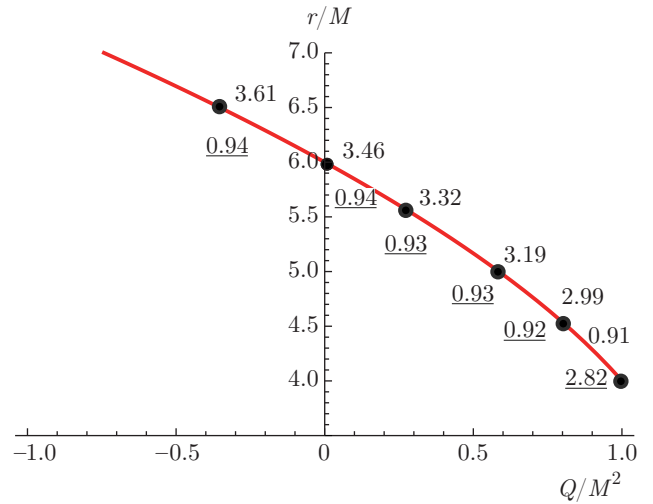


Рис. 2. Радиус последней устойчивой круговой орбиты

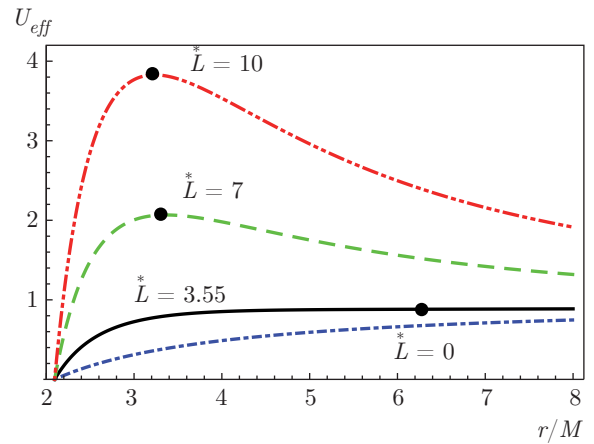


Рис. 3. (В цвете онлайн) Зависимости эффективного потенциала при различных значениях момента импульса для неэкстремального случая

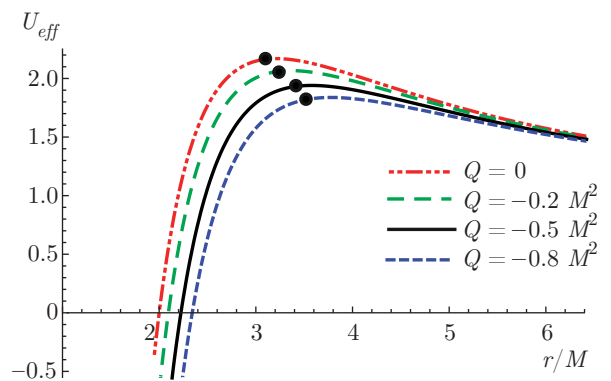


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости эффективного потенциала для различных значений отрицательного приливного заряда при $L = 7$

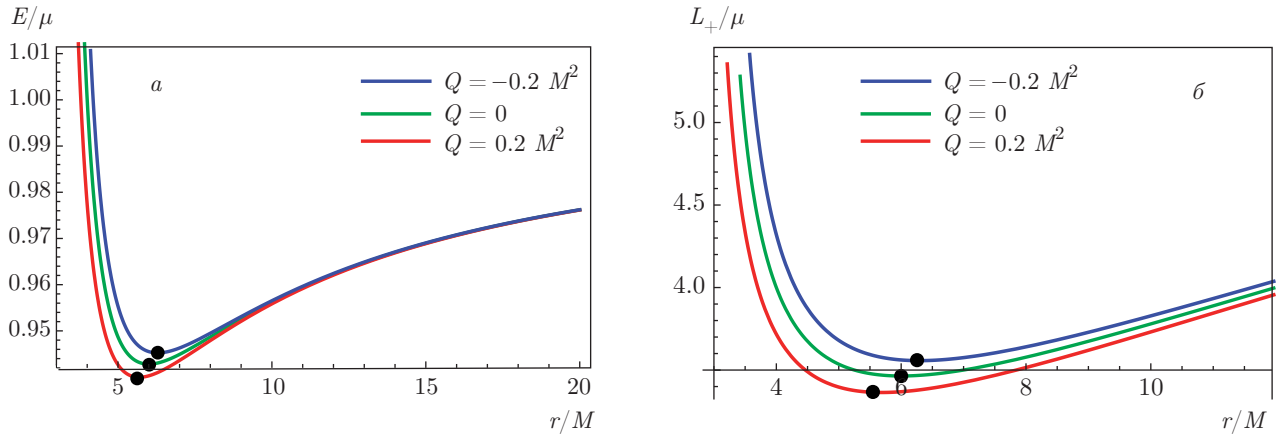


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости энергии (а) и момента импульса (б) для круговой орбиты при различных значениях приливного заряда

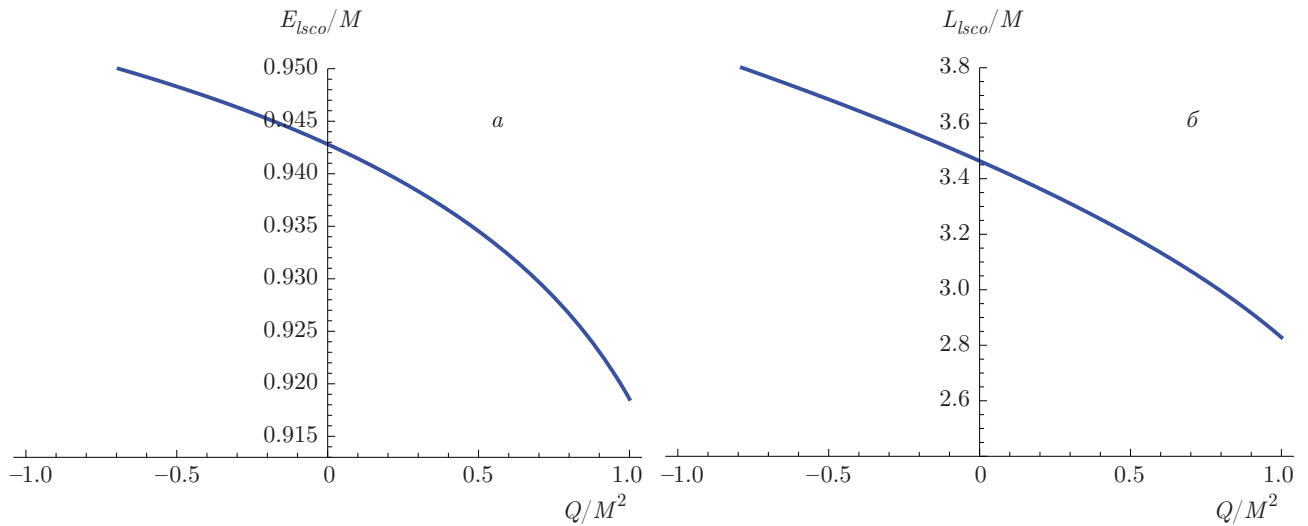


Рис. 6. Зависимости энергии (а) и момента импульса (б) для последней устойчивой круговой орбиты

при $Q = 0$ радиус становится равен

$$r_{lSCO} = 6M$$

(случай Шварцшильда), а затем монотонно возрастает при возрастании отрицательного значения заряда. На рисунке также приведены значения энергии и момента импульса (подчеркнуты) в каждой точке.

На рис. 3 приведены зависимости эффективного потенциала при $Q < 0$ для различных значений момента импульса $L^* = L_+/M\mu$. На этих графиках ($Q = -0.2M^2$) горизонту событий соответствует значение $r_+ \approx 2.09M$, которое больше соответствующего значения для случая ЧД РН [5]. При $L^* \approx 3.55$ имеем $r_{min} \approx 6.29M$, при этом эффективный потен-

циал минимален, и мы получаем устойчивые орбиты.

На рис. 4 показаны зависимости эффективного потенциала U_{eff} для различных значений отрицательного приливного заряда. На рисунке видно, что эффективный потенциал принимает минимальное значение при $Q = -0.8M^2$. Кроме того, оказалось, что эффективный потенциал U_{eff} уменьшается при отрицательном заряде, что указывает на устойчивое поведение круговых орбит.

Для экстремальных значений эффективного потенциала,

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0,$$

уравнение (10) принимает вид

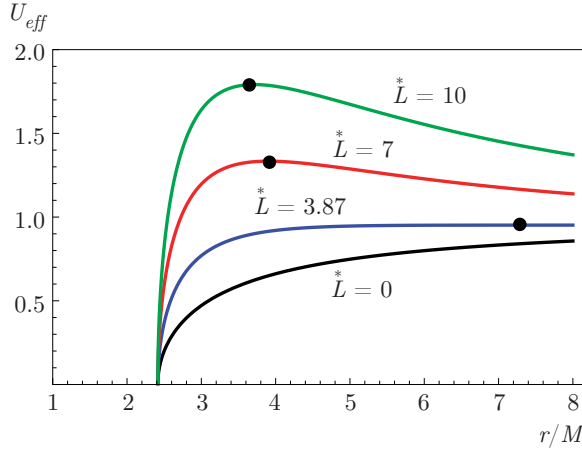


Рис. 7. Зависимости эффективного потенциала для различных значений момента импульса в экстремальном случае

$$Mr^3 - \left(Q + \frac{L^2}{\mu^2}\right)r^2 + \frac{3ML^2}{\mu^2}r - \frac{2QL^2}{\mu^2} = 0. \quad (14)$$

Его положительный вещественный корень соответствует радиусу круговой орбиты r_{co} . Вообще говоря, в области $r > \tilde{r}_+$ круговые орбиты не всегда существуют. Заметим, что эти орбиты существуют при $|L/M\mu| > 3.36$ (положительный заряд) и $|L/M\mu| > 3.55$ (отрицательный заряд). Получаем, что для экстремального случая круговые орбиты существуют при $|L/M\mu| > 2.96$. Используя уравнение (13), получаем радиус последней устойчивой круговой орбиты в виде

$$\begin{aligned} \frac{r_{lsco}}{M} = 2 + & \left\{ 4 - \frac{3Q}{M^2} + \right. \\ & \left. + \left[8 + \frac{2Q^2}{M^4} + \frac{Q - 9 + \sqrt{5 - \frac{9Q}{M^2} + \frac{4Q^2}{M^4}}}{M^2} \right]^{2/3} \right\} \times \\ & \times \left[8 + \frac{2Q^2}{M^4} + \frac{Q - 9 + \sqrt{5 - \frac{9Q}{M^2} + \frac{4Q^2}{M^4}}}{M^2} \right]^{-1/3}. \quad (15) \end{aligned}$$

Получаем, что орбиты, имеющие радиус больше, чем r_{lsco} , более устойчивы, при этом круговое движение полностью неустойчиво в области $\tilde{r}_+ < r < r_{lsco}$.

На рис. 5 показаны зависимости энергии и момента импульса для круговой орбиты для слу-

чая заряженной ЧД с приливным зарядом. При $Q = -0.2M^2$ энергия и момент импульса имеют минимальные значения, соответственно равные $E_{min}/\mu \approx 0.945$ и $L_{min}^* \approx 3.557$, в точке $r_{min} \cong 5.68M$. Отметим также, что значения энергии и момента импульса при отрицательном заряде больше, чем при положительном. Используя (15), решим аналитически уравнения (11) и (12) для энергии и момента импульса для последней устойчивой круговой орбиты. Получаем, что соответствующие энергия и момент импульса увеличиваются при отрицательном заряде и уменьшаются при возрастании положительного заряда (см. рис. 6).

3.2. Экстремальный случай

Рассмотрим ЧД ($Q = M^2$) в экстремальном случае, когда уравнение (10) принимает вид

$$U_{eff} = \sqrt{1 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left(1 - \frac{M}{r}\right)}. \quad (16)$$

Как можно видеть, $U_{eff} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и обращается в нуль на горизонте $r_{\pm} = M$. Соответствующие энергия и момент импульса принимают вид

$$\frac{E^2}{\mu^2} = \frac{(r - M)^3}{r^2(r - 2M)}, \quad \frac{L^2}{\mu^2} = \frac{Mr^2}{r - 2M}. \quad (17)$$

Радиус круговой орбиты равен

$$\frac{r_{co}}{M} = \frac{L^2 - L\sqrt{-8\mu^2 M^2 + L^2}}{2\mu^2 M^2}. \quad (18)$$

Поведение эффективного потенциала для заряженной ЧД с приливным зарядом в экстремальном случае, соответствующем отрицательному значению заряда $Q = -0.2M^2$, показано на рис. 7. На рисунке видно, что горизонту событий соответствует значение $r_+ \approx 2.414M$. Отметим также, что значение $L^* \approx 3.87$ соответствует устойчивым круговым орбитам вокруг ЧД в экстремальном случае, а неустойчивые орбиты получаются при возрастании значения момента импульса. Следует также заметить, что для данных ЧД круговые орбиты при отрицательном заряде более устойчивы [5], чем для ЧД РН.

Зависимости энергии и момента импульса нейтральной частицы, движущейся вокруг ЧД в экстремальном случае, показаны на рис. 8. Как видно из рисунка, значения энергии и момент импульса больше для отрицательного заряда (кривые 1), чем для положительного (кривые 2). Локальные минимумы полученных зависимостей определяют радиус последней устойчивой круговой орбиты.

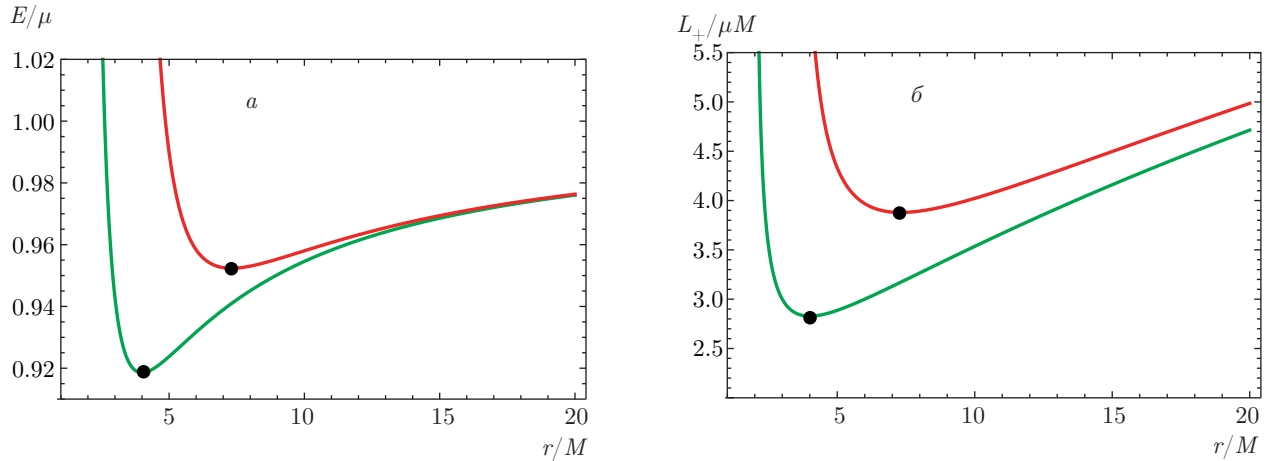


Рис. 8. (В цвете онлайн) Зависимости энергии (а) и момента импульса (б) нейтральной частицы в экстремальном случае

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе исследовалась динамика нейтральной пробной частицы, движущейся по круговым орбитам вокруг заряженной ЧД с приливным зарядом. Обсуждаются некоторые свойства круговых орбит вокруг ЧД для неэкстремального и экстремального случаев. Проведен анализ устойчивости для всех возможных конфигураций заряженных ЧД с приливным зарядом. Кроме того, вычислены энергия и момент импульса пробной частицы и в этом контексте исследовано влияние приливного заряда на движение частицы. Таким образом, были получены следующие результаты.

Были получены круговые орбиты с нулевым моментом импульса при

$$r = r^* = Q/M.$$

Была исследована только одна область устойчивости, начинающаяся при минимальном радиусе r_{lsc} и продолжающаяся до бесконечности. Полученные зависимости демонстрируют неустойчивые круговые орбиты при больших значениях заряда и момента импульса. Кроме того, изучено влияние отрицательного приливного заряда на движение частицы и на устойчивые круговые орбиты. Было получено, что отрицательный заряд увеличивает радиус и внешнего горизонта, и последней устойчивой круговой орбиты. Значения энергии и момента импульса пробной частицы больше для ЧД с отрицательным зарядом, чем для ЧД РН [5]. Получено, что устойчивые круговые орбиты сдвинуты дальше от ЧД. Эти результаты указывают на то, что для отрицательного заряда круговые орбиты более

устойчивы, чем для положительного. Таким образом, можно сделать вывод, что приливный заряд играет существенную роль в движении частиц вокруг заряженных черных дыр ЧД с приливным зарядом.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Michell, Phil. Trans. Roy. Soc. **74**, 35 (1784).
2. J. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
3. S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press (1983); V. P. Frolov and A. Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*, Oxford University Press (2011).
4. N. Cruz, M. Olivares, and R. J. Villanueva, Class. Quantum Grav. **22**, 1167 (2005).
5. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, Phys. Rev. D **83**, 024021 (2011).
6. D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini, Phys. Rev. D **84**, 044030 (2011).
7. Z. Stuchlík and J. Schee, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1550020 (2015).
8. M. Sharif and S. Iftikhar, Eur. Phys. J. C **76**, 147 (2016).
9. R. Emparan, T. G. Horowitz, and C. R. Myers, J. High Energy Phys. **01**, 007 (2000).
10. A. Chamblin et al., Phys. Rev. D **63**, 064015 (2001).
11. N. Dadhich et al., Phys. Lett. B **487**, 1 (2000).

12. A. N. Aliev and A. E. Gumrukuoglu, Phys. Rev. D **71**, 104027 (2005).
13. B. M. N. Carter and I. P. Neupane, Phys. Rev. D **72**, 043534 (2005).
14. D. M. Gingrich, Phys. Rev. D **81**, 057702 (2010).
15. A. L. Gergely, N. Pidokrajt, and S. Winitzki, Eur. Phys. J. C **71**, 1569 (2011).
16. M. Sharif and L. Kousar, Astrophys. Space Sci. **362**, 122 (2017).
17. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
18. R. Ruffini, *On the Energetics of Black Holes*, Gordon and Breach (1973).
19. J. M. Cohen and R. Gautreau, Phys. Rev. D **19**, 2273 (1979).