

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ СЕДИМЕНТАЦИИ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ

*И. Н. Черепанов**, *Б. Л. Смородин*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2017 г.

Конвективная устойчивость коллоидной суспензии изучена в случае, когда вертикальный размер полости меньше или сопоставим с длиной седиментации наночастиц. Рассмотрение проведено в рамках приближения Буссинеска на основе усовершенствованной модели, учитывающей зависимость термодиффузионного потока от локального значения концентрации примеси. Новым параметром задачи является отношение длины седиментации к вертикальному размеру полости. Для неподвижной коллоидной суспензии получены точное и приближенное (для случая малых концентраций) решения, описывающие распределения наночастиц. Найдено преобразование, позволяющее исследовать конвективную устойчивость стратифицированной в поле тяжести коллоидной суспензии с помощью метода Галеркина с набором простых базисных функций. Определены границы неустойчивости и характеристики критических возмущений. Показано, что в случае отрицательной термодиффузии уменьшение длины седиментации приводит к понижению порогов конвекции и уменьшению частоты нейтральных колебаний.

DOI: 10.7868/S0044451017120239

1. ВВЕДЕНИЕ

Коллоидная суспензия представляет собой жидкость-носитель с добавленными в нее наночастицами, обработанными особым образом для предотвращения их агрегирования. Наночастицы могут быть покрыты поверхностно-активным веществом (олеиновой кислотой) либо иметь двойной электрический слой. Ярким примером коллоидных суспензий являются магнитные жидкости. Коллоидные суспензии представляют собой пример бинарных смесей, которые интенсивно исследуются экспериментально и теоретически. Существенным фактором, влияющим на конвективные процессы в бинарных смесях, является поле концентрации примеси, которое формируется за счет диффузионных и термодиффузионных процессов [1–3], а также конвективного переноса [4, 5]. Термодиффузионный поток примеси в бинарных смесях (и в коллоидных суспензиях) зависит от свойств примеси и может либо совпадать по направлению с градиентом температуры (отрицательная термодиффузия), либо иметь противоположное направление (положительная термодиффу-

зия). Именно с переносом примеси связано большое разнообразие неустойчивостей, а также сценариев нелинейной эволюции протяженных и локализованных конвективных состояний [5, 6].

Существенным отличием коллоидных суспензий от молекулярных бинарных смесей является большой размер примесных частиц (10–100 нм), что приводит к уменьшению коэффициента диффузии. Неустойчивости коллоидных суспензий, связанные с процессами на различных пространственных и временных масштабах [7], а также гидродинамика подобных систем активно изучается в последние несколько десятилетий [8–11].

Система уравнений конвекции коллоидной суспензии рассматривалась в работах [8, 10], где обоснована необходимость учета не только термофореза и диффузии, но и гравитационной стратификации [10]. В работе [8] на основе оценок проанализировано влияние на скорость взвешенных в жидкости-носителе наночастиц различных дополнительных механизмов: инерции, диффузиофореза, эффекта Магнуса, дренажа жидкости, а также показано, что для типичных наножидкостей уравнение теплопроводности может быть использовано в классическом виде.

Наночастицы в жидкости не оседают на дно сосуда в поле тяжести благодаря тепловому движе-

* E-mail: che-email@yandex.ru

нию, которое поддерживает их во взвешенном состоянии. Однако под действием силы тяжести распределение концентрации по высоте является неоднородным (экспоненциально убывает с высотой) [12]. Характерная длина, на которой концентрация убывает в e раз, определяется из условия равенства тепловой энергии движения наночастиц и их энергии в гравитационном поле [13]:

$$l_{sed} = \frac{k_B T}{\delta \rho V g}, \quad (1)$$

$\delta \rho = \rho_s - \rho_f$ — разность плотностей частиц примеси, ρ_s , и жидкости-носителя, ρ_f , V — объем частицы, g — ускорение свободного падения, k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Для коллоидных суспензий характерные значения l_{sed} порядка 1–10 см.

Гравитационная седиментация наночастиц оказывает существенное влияние на конвективные течения [9, 10, 14]. До настоящего времени теоретическое рассмотрение конвективных течений коллоидных смесей [10, 14] касалось экспериментальных ситуаций, в которых высота h сосуда была намного меньше седиментационной длины l_{sed} ($h \ll l_{sed}$) [15–17]. В этом случае распределение примеси по высоте, обусловленное гравитационным разделением, хорошо подчиняется линейному закону. При этом максимальная разность концентраций, а следовательно, и отклонение концентрации от среднего значения в любой точке коллоидной суспензии много меньше средней концентрации, что позволяет использовать предположение о постоянстве коэффициента термодиффузии для всей коллоидной суспензии [10, 14], точно так же как это происходит и при рассмотрении молекулярных бинарных смесей [4, 5].

В данной статье рассматривается другой случай, когда длина седиментации имеет тот же порядок что и характерный вертикальный размер системы или немного превышает его ($h \lesssim l_{sed}$), как, например, в ситуации экспериментальной работы [18]. Распределение концентрации наночастиц по высоте в состоянии механического равновесия для такой коллоидной суспензии изменяется по экспоненте. На основе проведенных оценок доказано, что рассмотрение такой задачи при малых массовых концентрациях можно вести в рамках приближения Буссинеска, однако уравнение для переноса концентрации примеси изменяется по сравнению со случаем большой седиментационной длины ($l_{sed} \gg h$). Из-за сильных отклонений концентрации в различных точках конвективной системы от ее среднего значения необходимо

учитывать зависимость термодиффузионного потока от локальной концентрации. Этот подход реализован в данном рассмотрении. Сформулирована задача о конвективной устойчивости коллоидной суспензии и предложено преобразование, позволяющее решить ее методом Галеркина с использованием набора простых базисных функций. При этом базисные функции для концентрации примеси оказываются классическими, применяемыми в случае молекулярных смесей. Определены зависимости критических чисел Рэлея и частот нейтральных колебаний от числа Больцмана при различных значениях безразмерной длины седиментации. Проведено сравнение с предельным случаем большой седиментационной длины $l_{sed} \gg h$. Показано, что в случае отрицательной термодиффузии уменьшение длины седиментации понижает пороги конвекции и частоту нейтральных колебаний, особенно при малых значениях числа Больцмана. Этому результату дано объяснение.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтальный слой толщиной h , заполненный коллоидной суспензией и находящийся в поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{n}$ (\mathbf{n} — единичный вектор, направленный вверх). Ось x декартовой системы координат направим вдоль горизонтальных границ слоя, ось z — перпендикулярно им. Благодаря действию поля тяжести даже в изначально однородной суспензии возникает поток наночастиц, направленный к нижней границе слоя. Поскольку к горизонтальным границам слоя приложена разность температур δT , действует и другой механизм транспорта наночастиц, связанный с эффектом термодиффузии Соре [3, 4]. Коллоидные суспензии в зависимости от способа их приготовления содержат термофобные или термофильные наночастицы. В первом случае говорят о нормальной, во втором — об аномальной термодиффузии.

Уравнение состояния коллоидной суспензии запишем в виде

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - \bar{T}) + \beta(C - \bar{C})], \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность суспензии при некоторых средних значениях температуры \bar{T} и массовой концентрации наночастиц \bar{C} ; α и β — коэффициенты соответственно теплового и концентрационного расширения.

Система уравнений, описывающая тепловую конвекцию коллоидной суспензии [2, 10, 19] запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + g\mathbf{n}(\alpha T - \beta C), \quad (3a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi\Delta T, \quad (3b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)C = \\ = D\nabla \left[\nabla C + \frac{C}{l_{sed}} \mathbf{n} + S_T C(1-C)\nabla T \right], \end{aligned} \quad (3d)$$

где ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, D — коэффициент диффузии наночастиц. В уравнении (3d) для эволюции концентрации кроме конвективного и диффузионного потоков учитываются оседание частиц в поле тяжести и их термодиффузионный транспорт, вызывающий появление дополнительных градиентов концентрации $(\nabla C)_g = (C/l_{sed})\mathbf{n}$ и

$$(\nabla C)_{Soret} = S_T C(1-C)\nabla T, \quad (4)$$

где S_T — коэффициент термодиффузии Соре.

В изотермической коллоидной суспензии, заполняющей горизонтальный слой, состояние механического равновесия, когда отсутствуют макроскопические течения ($\mathbf{v} = 0$) и термодиффузионный поток частиц, распределение концентрации имеет вид

$$C = \frac{\bar{C}h}{l_{sed}} \frac{\exp(-z/l_{sed})}{1 - \exp(-h/l_{sed})}. \quad (5)$$

Несмотря на то что в случае, когда высота слоя имеет порядок длины седиментации ($h/l_{sed} \sim 1$) и количество наночастиц на верхней и нижней границах различается в несколько раз, $C(h)/C(0) = \exp(-h/l_{sed})$, максимальная разность концентраций коллоидной суспензии

$$(\delta C)_{max} = C(0) - C(h) = \bar{C} \frac{h}{l_{sed}} \quad (6)$$

мала, если остается малой средняя концентрация примеси \bar{C} ($\bar{C} \ll 1$).

В рамках приближения Буссинеска должны выполняться условия

$$\alpha(T - \bar{T}) \ll 1, \quad (7a)$$

$$\beta(C - \bar{C}) \ll 1, \quad (7b)$$

первое из которых хорошо удовлетворяется для суспензий на основе воды ($\alpha \sim 10^{-4}$) в широком диапазоне изменений температур.

Для оценки выполнимости условия (7b) выразим плотность коллоидной суспензии через массовую концентрацию C твердой примеси:

$$\rho = \left(\frac{1-C}{\rho_f} + \frac{C}{\rho_s} \right)^{-1}, \quad (8)$$

и, замечая, что

$$\rho_0 = \left(\frac{1-\bar{C}}{\rho_f} + \frac{\bar{C}}{\rho_s} \right)^{-1},$$

рассчитаем коэффициент концентрационного расширения

$$\beta = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{\bar{C}} = \rho_0 \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_s} \right). \quad (9)$$

В слабоконцентрированных коллоидных суспензиях ($\bar{C} \ll 1$) плотность смеси близка к плотности жидкости носителя ($\rho_0 \sim \rho_f$), а частицы тяжелее жидкости-носителя ($\rho_s > \rho_f$). Следовательно, выполняется соотношение

$$\beta = \frac{\rho_f}{\rho_f} - \frac{\rho_f}{\rho_s} < 1. \quad (10)$$

При этом условие (7b) будет заведомо выполняться в случае $\bar{C} \ll 1$, $h/l_{sed} \leq 1$, поскольку $C - \bar{C} < (\delta C)_{max} \ll 1$.

Далее, учитывая малость средней концентрации, $\bar{C} \ll 1$, запишем градиент концентрации, возникающий благодаря термодиффузии (4), в следующем приближении:

$$(\nabla C)_{Soret} \approx S_T C \nabla T. \quad (11)$$

Введем безразмерные переменные, выбрав следующие масштабы: h для длины, h^2/χ для времени, χ/h для скорости, δT для температуры, $\rho_0 \chi^2/h^2$ для давления, $\bar{C}h/l_{sed}$ для концентрации. Отметим, что, как и в работе [14], в качестве масштаба времени использовано характерное тепловое время, а в качестве масштаба концентрации — максимальная разность концентраций, возникающая под действием поля тяжести. В безразмерных переменных система уравнений (3) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \operatorname{Pr}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{n}\operatorname{Pr}(RT - BC), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T &= \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)C &= \\ &= \operatorname{Le} \left(\Delta C + \frac{1}{l} \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\psi R}{lB} \nabla(C\nabla T) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где введены следующие безразмерные параметры, традиционно используемые для характеристики конвекции коллоидной суспензии [10, 14]: число Рэлея R , число Больцмана B , безразмерная длина седиментации l , число Прандтля Pr , число Льюиса Le и параметр разделения смеси ψ ,

$$R = \frac{g\alpha\delta Th^3}{v\chi}, \quad B = \frac{g\beta\bar{C}h^4}{v\chi l_{sed}}, \quad l = \frac{l_{sed}}{h},$$

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Le = \frac{D}{\chi}, \quad \psi = S_T \bar{C} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Рассматривается случай твердых и идеально теплопроводных горизонтальных границ слоя:

$$\mathbf{v}(x, z = 0) = 0, \quad \mathbf{v}(x, z = 1) = 0, \quad (13)$$

$$T(x, z = 0) = 1, \quad T(x, z = 1) = 0. \quad (14)$$

Граничными условиями для концентрации является обращение в нуль нормальной составляющей потока вещества на непроницаемых границах:

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \left(\frac{1}{l} + \frac{\psi R}{lB} \frac{\partial T}{\partial z} \right) C = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (15)$$

Рассмотрим равновесное решение системы (12) для неизотермической покоящейся ($\mathbf{v} = 0$) коллоидной суспензии, удовлетворяющее граничным условиям (13)–(15) и условию сохранения массы частиц, записанному с учетом выбранного масштаба концентрации (\bar{C}/l) в виде

$$\int_0^1 C(z) dz = l. \quad (16)$$

Данное решение характеризуется линейным профилем температуры и экспоненциальным распределением частиц по высоте:

$$T_0 = 1 - z, \quad (17)$$

$$C_0(z) = \frac{\gamma l}{1 - e^{-\gamma}} e^{-\gamma z}, \quad (18a)$$

$$\gamma = \frac{1}{l} - \frac{\psi R}{lB}. \quad (18b)$$

Для сравнения с полученным приближенным решением (18) для распределения концентрации получим точное выражение для $C(z)$ с учетом квадратичного слагаемого в градиенте концентрации,

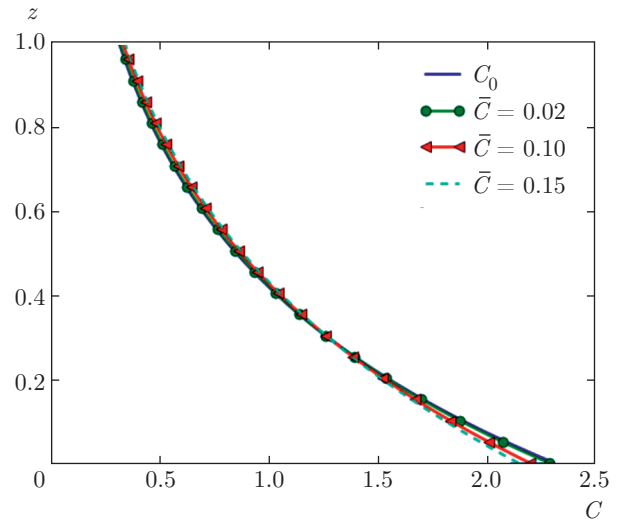


Рис. 1. (В цвете онлайн) Профиль концентрации в неподвижной жидкости. Приближенное решение, справедливое для малых концентраций C_0 , не зависит от средней концентрации; $\psi R/lB = -1, l = 1$

возникающего благодаря термодиффузии (4). Отметим, что при этом проявляется дополнительный параметр, характеризующий нашу систему — средняя концентрация \bar{C} :

$$\frac{\partial C}{\partial z} + \gamma C + \frac{\psi R}{l^2 B} \bar{C} C^2 = 0. \quad (19)$$

Запишем решение уравнения (19) с учетом закона сохранения массы примеси (16):

$$C(z) = \frac{\gamma}{Ae^{\gamma z} + \frac{\psi R}{l^2 B} \bar{C}}, \quad (20)$$

где

$$A = \frac{\psi R}{l^2 B} \bar{C} \frac{e^{\gamma} - e^{\psi R \bar{C}/lB}}{e^{\psi R \bar{C}/lB} - 1}.$$

На рис. 1 приведены профили концентрации для приближенного (18) и точного (20) решений при различной средней концентрации \bar{C} . На рисунке видно, что при малой средней концентрации $\bar{C} \leq 0.15$ приближенное решение (18) хорошо согласуется с точным решением (20): профили $C_0(z)$ и $C(z)$ различаются слабо. Это позволяет нам в дальнейшем рассматривать в качестве стационарного распределения концентрации в состоянии механического равновесия коллоидной суспензии приближенное решение $C_0(z)$, исключая тем самым необходимость рассмотрения зависимости результатов конвективной устойчивости еще от одного параметра — средней концентрации \bar{C} .

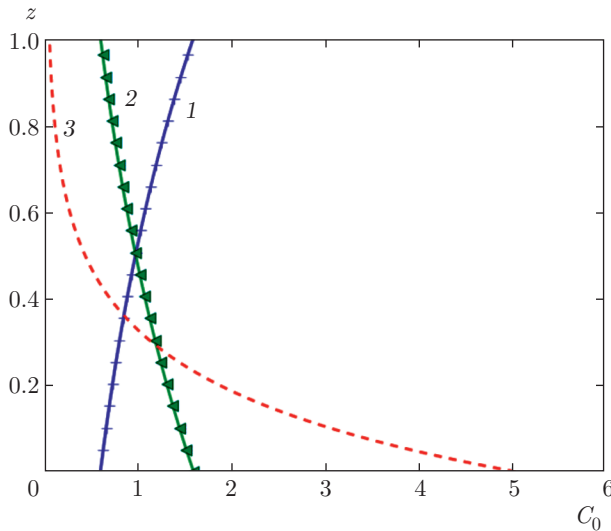


Рис. 2. (В цвете онлайн) Профили концентрации примеси при разных значениях γ : 1 — $\gamma = -1$; 2 — $\gamma = 1$; 3 — $\gamma = 5$

На рис. 2 приведены распределения концентрации примеси по высоте $C_0(z)$ (18) в слое неподвижной коллоидной суспензии при различных значениях параметра γ . Случай $\gamma < 0$ (например, в случае положительной термодиффузии, $\psi > 0$, и подогреве снизу, $R > 0$) соответствует преобладанию наночастиц у верхней границы. При $\gamma > 0$ в случае отрицательной термодиффузии, $\psi < 0$, и подогреве снизу, $R > 0$, термодиффузионный и гравитационный потоки частиц направлены к нижней горячей границе, что приводит к барометрическому распределению частиц.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для анализа устойчивости основного состояния механического равновесия коллоидной суспензии, когда $\mathbf{v} = 0$, а T_0 и C_0 заданы соответственно уравнениями (17) и (18), применим метод малых возмущений. Введем малые нестационарные возмущения вертикальной скорости $w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, температуры θ и концентрации c . После линеаризации системы уравнений (12) для тепловой конвекции коллоидной суспензии и исключения из нее давления получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta w = \text{Pr} \Delta^2 w - \text{Pr} \left(R \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right), \quad (21a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta, \quad (21b)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -w \frac{\partial C_0}{\partial z} + \text{Le} \left[\Delta c + \gamma \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\psi R}{lB} \left(C_0 \Delta \theta + \frac{\partial C_0}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right]. \quad (21c)$$

На горизонтальных твердых изотермических границах возмущения скорости и температуры обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad w' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1, \\ \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Благодаря отсутствию потока вещества через границу, для возмущений концентрации c граничное условие запишется в виде

$$\frac{\partial c}{\partial z} + \gamma c + \frac{\psi R}{lB} C_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1. \quad (23)$$

После замены переменных

$$c = C_0 \left(\varphi - \frac{\psi R}{lB} \theta \right) \quad (24)$$

граничные условия для вспомогательной функции φ принимают вид

$$\begin{aligned} C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\varphi - \frac{\psi R}{lB} \theta \right) \left(\frac{\partial C_0}{\partial z} - \gamma C_0 \right) = 0 \\ \text{при} \quad z = 0, 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая, что в основном состоянии $\partial C_0 / \partial z = -\gamma C_0$, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1. \quad (26)$$

Уравнение (21c) для эволюции концентрации после замены (24) и несложных преобразований перепишется в виде

$$\begin{aligned} C_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\psi R}{lB} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = \\ = -w \frac{\partial C_0}{\partial z} + \text{Le} \left[C_0 \left(\Delta \varphi - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Полученное уравнение разделим на C_0 ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\psi R}{lB} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \gamma w + \text{Le} \left(\Delta \varphi - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (28)$$

и исключим слагаемое с $\partial \theta / \partial t$, сложив с уравнением (21b), умноженным на $\psi R / lB$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{l} w + \frac{\psi R}{lB} \Delta \theta + \text{Le} \left(\Delta \varphi - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (29)$$

Уравнение (21a) для возмущений скорости с учетом замены (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = \text{Pr} \Delta^2 w - \\ - \text{Pr} \left[R \left(1 + \frac{\psi C_0}{l} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - B C_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Искать решение системы уравнений (21b), (29), (30) будем в виде нормальных возмущений:

$$\begin{aligned} w(t, x, z) &= w(z) \exp(-\lambda t + ikx), \\ \theta(t, x, z) &= \theta(z) \exp(-\lambda t + ikx), \\ \varphi(t, x, z) &= \varphi(z) \exp(-\lambda t + ikx), \end{aligned} \quad (31)$$

где k — волновое число, λ — декремент возмущений.

Система линейных уравнений для нормальных возмущений принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 w + \\ + k^2 \text{Pr} \left[\text{R} \left(1 + \frac{\psi C_0}{l} \right) \theta - \text{BC}_0 \phi \right] = 0, \\ \lambda \theta + w + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \theta = 0, \\ \lambda \phi + \frac{1}{l} w + \frac{\psi \text{R}}{l \text{B}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \theta + \\ + \text{Le} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \varphi - \gamma \varphi' \right] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где штрих обозначает дифференцирование по z . Граничные условия для возмущений имеют вид

$$\begin{aligned} w = w' = 0 \\ \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, 1, \\ \varphi' = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Система линейных уравнений решалась методом Галеркина [19]. Согласно идее метода, искомые функции раскладываются по некоторому набору базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (33):

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^N w_n \sin(\pi x) \sin(\pi n x), \\ \theta &= \sum_{m=1}^M \theta_m \sin(\pi m x), \\ \varphi &= \sum_{q=0}^Q \varphi_q \cos(\pi q x), \end{aligned} \quad (34)$$

где w_n, θ_m, φ_q — амплитуды соответствующих базисных функций. Подставляя разложения (34) в систему (32) и составляя условия ортогональности метода Галеркина, получим линейную систему уравнений для амплитуд w_n, θ_m, φ_q , содержащую $K = N + M + Q$ уравнений. Условием существования нетривиального решения (w_n, θ_m, φ_q) полученной системы является равенство нулю определителя

матрицы A размера $K \times K$, составленной из коэффициентов при соответствующих амплитудах. После преобразования матрицы A к виду, при котором декременты λ расположены только на диагонали,

$$A = B - \lambda E$$

(E — единичная матрица), задача определения декрементов возмущений сводится к задаче поиска собственных значений матрицы B .

Декремент λ является функцией параметров задачи, $\lambda = \lambda(\text{R}, \text{B}, l, \psi, \text{Pr}, \text{Le}, k)$, при этом условие $\text{Re} \lambda = 0$ определяет границу конвективной устойчивости.

В расчетах использовалось разложение по пятнадцати базисным функциям для каждого из полей скорости, температуры и концентрации ($N = 15, M = 15, Q = 15$). Дальнейшее увеличение количества базисных функций приводило к изменению критического значения числа Рэлея, не превышающему 0.05 %.

Расчеты проводились для значений параметров типичных для реальных коллоидных суспензий [15, 16]: $\text{Pr} = 5.5, \text{Le} = 1.5 \cdot 10^5$.

4. ПОРОГИ УСТОЙЧИВОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ КРИТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В случае аномального эффекта Соре ($\psi < 0$) термодиффузионный и гравитационный потоки одинаково направлены и усиливают друг друга. Рассмотрим в дальнейшем коллоидную суспензию Нуфлон [17] со средней концентрацией $\bar{C} \approx 0.4\%$, которой соответствует параметр разделения смеси $\psi = -0.8$. Нейтральные кривые устойчивости состояния механического равновесия коллоидной суспензии, $\text{R}(k)$, при различных значениях безразмерной седиментационной длины ($l = 1$ и $l = 30$), а также соответствующие им зависимости частоты нейтральных колебаний ($\omega = \text{Im} \lambda$) от волнового числа для случая $\text{B} = 300$ представлены на рис. 3. Уменьшение безразмерной седиментационной длины l приводит к значительному понижению границы устойчивости и частоты нейтральных колебаний. При $l = 1$ часть нейтральной кривой ($k < 0.6$) соответствует монотонным возмущениям (область $\omega = 0$ на рис. 3б). Эти результаты связаны с формированием более выраженного барометрического распределения примеси, при котором верхняя часть слоя сильно обеднена наночастицами. Свойства этой части слоя коллоидной суспензии приближаются к свойствам однородной жидкости, в которой плавучесть обеспечивается

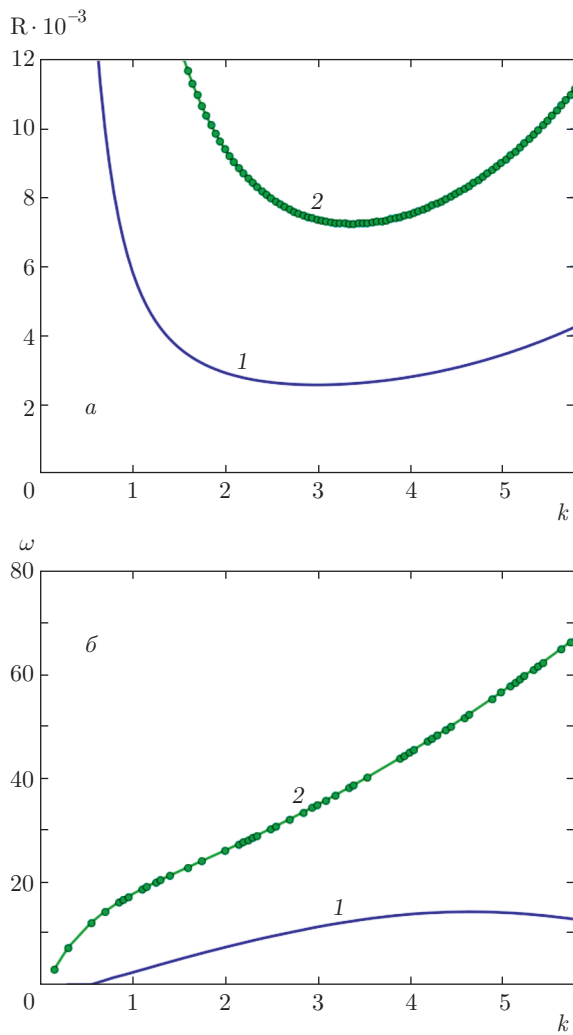


Рис. 3. (В цвете онлайн) а) Нейтральные кривые (зависимости числа Рэлея от волнового числа) и б) частота нейтральных колебаний при безразмерной длине седиментации $l = 1$ (кривые 1) и $l = 30$ (кривые 2); $\psi = -0.8$, $B = 300$, $Pr = 5.5$, $Le = 1.5 \cdot 10^5$

только тепловым расширением. При некотором критическом значении числа Рэлея в однородной жидкости возникает монотонная конвекция, порог которой ниже порога колебательной конвекции коллоидной суспензии [10].

Результаты расчетов в рамках уравнений (12) критических чисел Рэлея $R_c = \min(R(k))$, соответствующих минимумам нейтральных кривых $R(k)$ и определяющих порог конвективной устойчивости, а также частоты нейтральных колебаний ω для произвольных значений безразмерной длины седиментации l приведены на рис. 4. Как показывают расчеты, конвекция возникает в результате нарастания колебательных возмущений. В случае большой безразмерной длины седиментации ($l \gg 1$) характери-

стики R_c и ω практически постоянны, что согласуется с результатами рассмотренного ранее предельного случая [14], когда концентрация описывается линейным профилем, а параметр разделения зависит от средней концентрации и поэтому одинаков для всех точек смеси.

Отклонения порогового числа Рэлея R_c и частоты нейтральных колебаний ω от постоянных значений наблюдается в области $l < l_*(B)$. Они тем значительнее, чем меньше l , что объясняется отклонением профиля концентрации в основном состоянии от линейного закона в связи с уменьшением l и, следовательно, с ростом параметра γ (18). Если определить значение l_* условием

$$\frac{R_c(l \rightarrow \infty) - R_c(l_*)}{R_c(l \rightarrow \infty)} = 1\%,$$

то получим $l_*(B = 300) = 52$ и $l_*(B = 1000) = 22$. Анализ соотношения (18) также показывает, что наличие отрицательной термодиффузии усиливает отклонения R_c и ω от асимптотических значений $R_c(l \rightarrow \infty)$ и $\omega(l \rightarrow \infty)$.

Отметим, что часть графиков $R_c(l)$ в интервале $l \ll 1$ (см. выделенную рамкой область в начале координат на рис. 4а) соответствует такому начальному распределению концентрации, при котором величина $(\delta C)_{max} = \bar{C}/l$ становится большой и нарушается приближение Буссинеска. В рамках нашего рассмотрения мы не можем получить точных данных в этой области. Однако зависимость $R_c(l)$ должна быть убывающей. При малых l профиль концентрации $C_0(z)$ представляет быстро убывающую экспоненту: наночастицы оседают и накапливаются в пограничном слое толщиной порядка l у нижней границы, конвекция возникает в верхней части слоя высотой $1 - l$, заполненного сильно обедненной наночастицами (практически чистой) жидкостью-носителем. В предельном случае $l \rightarrow 0$ порог устойчивости стремится к хорошо известному значению для однородной жидкости $R_{0c} = 1708$ [19], а конвекция возникает в результате нарастания монотонных возмущений ($\omega \rightarrow 0$), что соответствует полностью осевшей примеси.

Зависимости критического числа Рэлея R_c , частоты нейтральных колебаний ω и критического волнового числа k_c от числа Больцмана приведены на рис. 5 для разных значений безразмерной длины седиментации. Штриховые линии 4 соответствуют предельному случаю $l \rightarrow \infty$, рассмотренному в работе [14] в приближении малой неоднородности смеси, в котором полагается независимость коэффициента термодиффузии от концентрации. Как видно

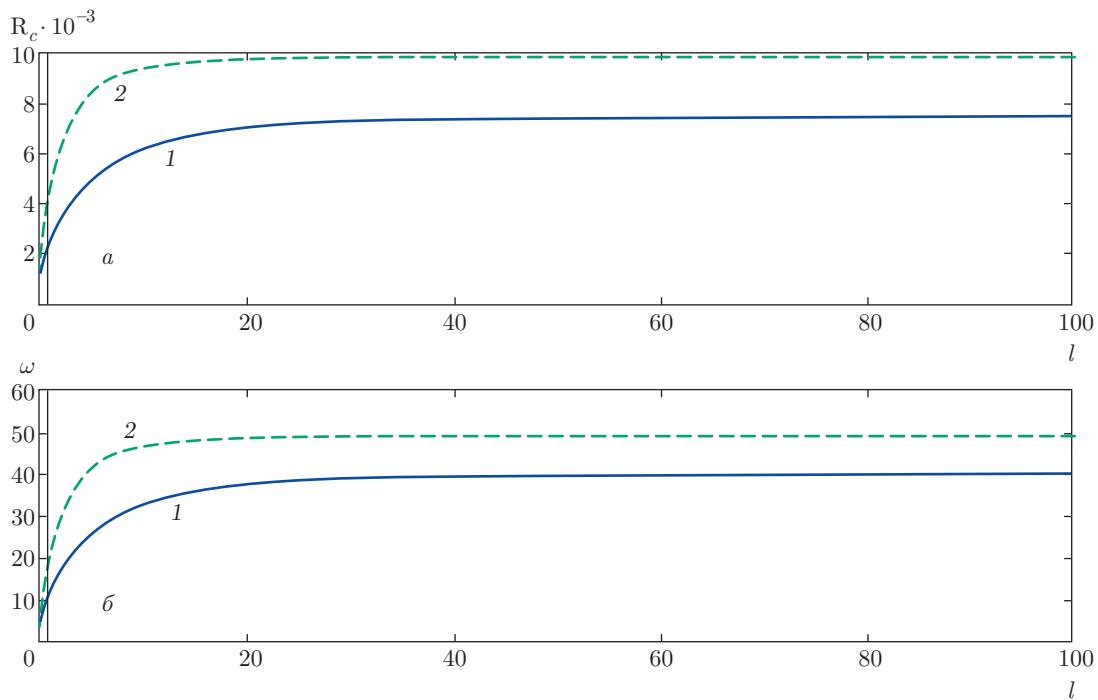


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимость критического числа Рэля (а) и частоты ω нейтральных колебаний (б) от седиментационной длины при $B = 300$ (кривые 1) и $B = 1000$ (кривые 2); $\psi = -0.8$, $Pr = 5.5$, $Le = 1.5 \cdot 10^5$

на рис. 5, в случае конечных больших l (например, $l = 30$) порог устойчивости и частота нейтральных колебаний лишь немного ниже, чем предсказывают результаты работы [14], но в области малых значений числа Больцмана B и малых l критическое число Рэля значительно уменьшается (наблюдаются сильные отличия от предельного случая $l \rightarrow \infty$). Как отмечалось выше, это связано со сменой линейного профиля концентрации частиц при больших безразмерных длинах седиментации l на барометрический при конечных значениях этого параметра.

Рассмотрим поведение зависимости $R_c(B)$ в пределе $B \rightarrow 0$. Число Больцмана $B = g\beta\bar{C}h^4/v\chi l_{sed}$ можно переписать в другом виде:

$$B = \frac{g\beta\bar{C}h^3}{v\chi} \frac{1}{l} = \frac{Ra_C}{l},$$

где Ra_C — концентрационный аналог числа Рэля, зависящий от средней концентрации. Предел $B \rightarrow 0$ может быть реализован в двух случаях: 1) толщина слоя мала по сравнению с длиной седиментации ($l = l_{sed}/h \rightarrow \infty$), а $Ra_C \neq 0$ и, следовательно, средняя концентрация наночастиц в коллоидной суспензии $\bar{C} \neq 0$; 2) безразмерная длина седиментации конечна, а $Ra_C \rightarrow 0$ ($\bar{C} \rightarrow 0$). Первый случай соответствует рассмотрению на базе предположения о за-

висимости термодиффузионного потока от средней концентрации. При этом коэффициент разделения одинаков во всей коллоидной суспензии, характеристики возникновения конвекции (штриховые линии на рис. 5) совпадают с результатами работы [14]. Во втором случае в рамках нашего подхода учитывается зависимость термодиффузионного потока от концентрации. При этом для всех конечных значений седиментационной длины l порог конвективной устойчивости в случае $B \rightarrow 0$ ($\bar{C} \rightarrow 0$), как и следует ожидать, стремится к $R_c = 1708$, частота нейтральных возмущений обращается в нуль (рис. 5б), а волновое число стремится к значению $k = 3.1$ (рис. 5в), что соответствует критическим возмущениям в однородной жидкости [19].

В случае положительной термодиффузии расчеты показывают, что порог конвективной устойчивости, определяется соотношением

$$R \approx B/\psi, \tag{35}$$

что совпадает со случаем бесконечно большой длины седиментации [14, 20]. Таким образом, значение седиментационной длины не влияет на порог устойчивости. Это объясняется тем, что при выполнении условия (35) значение параметра γ (18b), характеризующего неоднородность профиля концентрации,

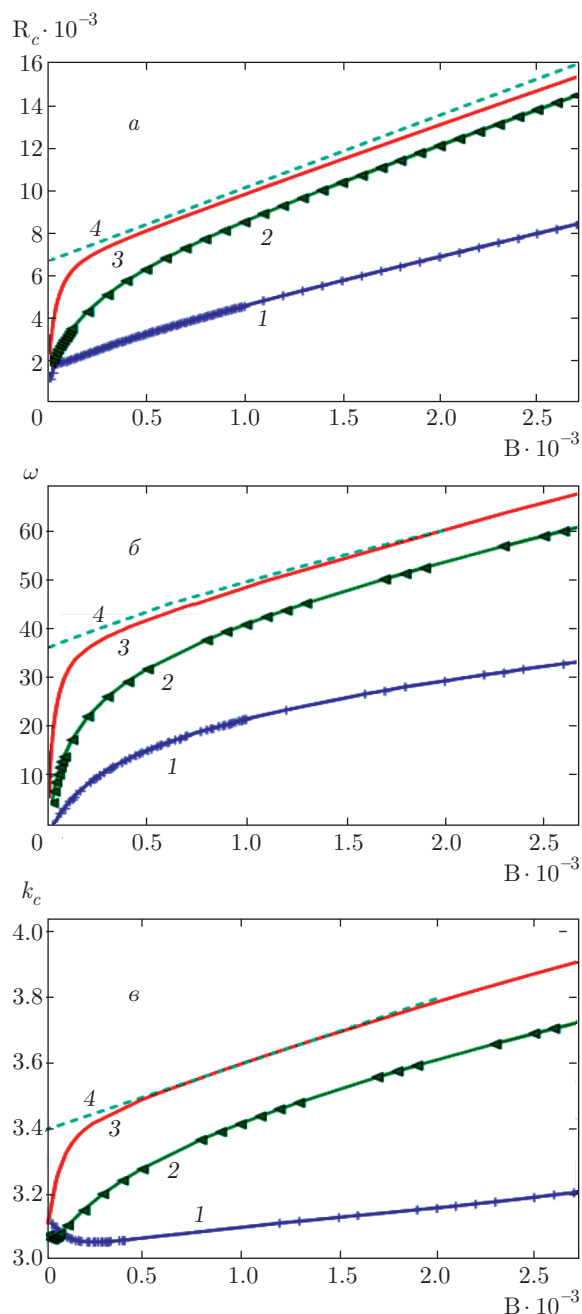


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимости критического числа Рэлея (а), частоты нейтральных колебаний (б) и критического волнового числа (в) от числа Больцмана B при безразмерной длине седиментации $l = 1$ (кривые 1), 5 (2), 30 (3), ∞ (4); $\psi = -0.8$, $Pr = 5.5$, $Le = 1.5 \cdot 10^5$

равно нулю при любых значениях l (гравитационная седиментация полностью компенсируется эффектом термодиффузии So_{re}). При этом вблизи порога устойчивости распределение примеси по высоте является практически однородным.

5. ВЫВОДЫ

Модель конвекции коллоидной суспензии модифицирована для случая, когда длина седиментации имеет порядок вертикальных размеров системы. В этом случае распределение концентрации частиц в неподвижной суспензии подчиняется экспоненциальному закону (барометрическому распределению). Из-за сильного изменения концентрации необходимо учитывать зависимость термодиффузионных потоков от локальной концентрации наночастиц, а не от средней концентрации примеси в системе, как это принято для молекулярных смесей. Показано, что в случае малых концентраций наночастиц средняя концентрация коллоидной суспензии не является самостоятельным параметром, а влияет на конвекцию только через число Больцмана. Новым параметром задачи о возникновении конвекции в общем случае является безразмерная длина седиментации — отношение длины седиментации к вертикальному размеру полости. Найдено преобразование, позволяющее решить задачу о конвективной устойчивости коллоидной суспензии с помощью метода Галеркина на основе набора простых базисных функций. Получены критические значения, характеризующие пороги возникновения конвекции: число Рэлея, волновое число и частота нейтральных колебаний. Показано, что в случае отрицательной термодиффузии коллоидной суспензии уменьшение безразмерной длины седиментации при фиксированных остальных параметрах понижает порог конвекции (критическое число Рэлея) и уменьшает характерные частоты нейтральных колебаний.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-60074).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Шапошников, ЖЭТФ **21**, 1309 (1951).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 6, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
3. W. Köhler and K. Morozov, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **41**, 151 (2016).
4. J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in Fluids*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
5. M. Lücke, W. Barten, and M. Kamps, *Physica D* **61**, 183 (1992).

6. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
7. H. Löwen, *Soft Matter* **6**, 3133 (2010).
8. J. Buongiorno, *J. Heat Transf.* **128**, 240 (2006).
9. Г. Ф. Путин, в сб.: *Материалы 11-го Рижского совещания по магнитной гидродинамике*, Рига (1984), т. 3, с. 15.
10. M. I. Shliomis and B. L. Smorodin, *Phys. Rev. E* **71**, 036312 (2005).
11. В. Я. Рудяк, А. А. Белкин, Е. А. Томилина, *Письма в ЖТФ* вып. 14, 49 (2010).
12. M. Mason and W. Weaver, *Phys. Rev.* **23**, 412 (1924).
13. В. Е. Фертман, *Магнитные жидкости*, Вышэйшая школа, Минск (1988).
14. B. L. Smorodin, I. N. Cherepanov, B. I. Myznikova et al., *Phys. Rev. E* **84**, 026305 (2011).
15. R. Cerbino, A. Vailati, and M. Giglio, *Phys. Rev. E* **66**, 055301 (2002).
16. R. Cerbino, A. Vailati, and M. Giglio, *Phil. Mag.* **83**, 2023 (2003).
17. G. Donzelli, R. Cerbino, and A. Vailati, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 104503 (2009).
18. F. Winkel, S. Messlinger, W. Schöpf et al., *New J. Phys.* **12**, 053003 (2010).
19. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
20. B. L. Smorodin and I. N. Cherepanov, *Eur. Phys. J. E* **37**(11), 118 (2014).