

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВРЕМЕННОМ И ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

*В. Л. Кузьмин\**

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
195251, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 25 апреля 2017 г.

На основе описания переноса излучения в терминах уравнения Бете–Солпитера выполнено моделирование Монте-Карло обратного рассеяния поляризованного оптического излучения во временном и частотном представлениях. Рассчитаны гистограммы ультракороткого импульса во временном представлении линейно и циркулярно поляризованного излучения; обнаружено, что на расстояниях между источником и приемником порядка транспортной длины гистограммы имеют сильную зависимость от вида поляризации, а в случае круговой поляризации с ростом анизотропии рассеяния изменяется направление вращения плоскости поляризации.

DOI: 10.7868/S0044451017100066

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Перенос оптического излучения в сильно неоднородных средах вызывает большой интерес благодаря, прежде всего, биомедицинским приложениям (см. [1–5]). Подход, известный как спектроскопия диффузных волн фотонной плотности (ДВФП) [6, 7], состоит в зондировании биоткани или биофантома модулированным лазерным излучением в ближней инфракрасной области с частотами модуляции до сотен мегагерц (термин ДВФП в настоящее время практически заменен в литературе на DNIRS — diffuse near infra-red spectroscopy, см. [8]).

В современном эксперименте при исследовании рассеяния в сильно неоднородных средах, включая биоткани и биомодели, измеряются сигналы в частотном представлении, в частотном домене. Интерес представляет также задача о миграции фотонов во временном домене [?, 10], когда исследуется временная развертка (или гистограмма) рассеянного излучения источника ультракоротких импульсов. Теоретически зависимость от времени хорошо описывается в диффузионном приближении, с известными ограничениями.

Метод Монте-Карло широко применяется в моделировании миграции фотонов в тканях и биофан-

томах [11–15], в основном на платформе широко известного алгоритма MCML (Monte Carlo modeling of light) [13]. В работах [10, 16] было показано в рамках численного эксперимента, что моделирование ряда по кратностям рассеяния может быть интерпретировано как описание временной эволюции ультракороткого сигнала во времени.

В работе [17] были выполнены измерения и моделирование приведенных коэффициентов рассеяния  $\mu'_s$  и поглощения  $\mu_a$  для раствора интралипида, используемого как стандартный биофантом, в широком интервале частот модуляции  $\omega$  и двух длин волн инфракрасного излучения в частотно-доменной технике ДВФП. Численные результаты оказываются в хорошем согласии с экспериментальными данными и с предсказаниями диффузионного приближения.

Повышенный интерес вызывает изучение распространения и рассеяния поляризованного света в случайно-неоднородных средах [18–24]; диагностика непрозрачных систем с помощью поляризованного света более информативна, нежели при использовании неполяризованного света. Поляризованный свет, претерпевший многократное рассеяние в случайной среде, содержит информацию о размерах и распределении по размерам рассеивающих частиц, их концентрации и диэлектрических свойствах.

Было показано, что при распространении циркулярно поляризованного света в случайной среде с крупномасштабными неоднородностями наблюда-

\* E-mail: kuzmin\_vl@mail.ru

ется эффект поляризационной памяти, состоящий в том, что хаотизация заданной поляризации света требует значительно большего числа актов рассеяния, чем хаотизация по направлению. Был открыт [22, 25] эффект зависимости остаточной поляризации, в частности, зависимости направления вращения плоскости поляризации, или знака киральности света, от размера рассеивателей. Это явление, связанное с изменением знака киральности, было экспериментально обнаружено при исследовании обратного рассеяния в геометрии с разделенными узкими пучками входящего и выходящего излучения [22].

В случае рассеяния назад, по аналогии с зеркальным отражением, естественно ожидать, что детектируемый свет в основном будет содержать кросс-поляризованную компоненту, поскольку направление вращения вектора поляризации связано с направлением волнового вектора. Такое доминирование кросс-поляризованной компоненты в обратном рассеянном свете действительно имеет место для систем с рассеивателями, размер которых значительно меньше длины волны. Однако в средах с крупномасштабными неоднородностями, в которых размер рассеивателей порядка или больше длины волны, доминирующей неожиданно оказывается кополяризованная компонента.

В настоящей работе мы рассчитываем обратное рассеяние поляризованного излучения для сред, в которых анизотропия рассеяния описывается с помощью фазовой функции Хеньи–Гринштейна. Применяя развитый алгоритм Монте-Карло [26–28], основанный на стохастическом вычислении итерационного ряда уравнения Бете–Солпитера по порядкам рассеяния, мы выполняем вычисления гистограмм ультракоротких импульсов во временном представлении и сигналов ДВФП в частотном представлении в общем случае поляризованного излучения.

Раздел 2 содержит общее описание переноса оптического излучения в рамках теоретико-полевого подхода, в разд. 3 приведены выражения для поляризованных компонент рассеянного излучения. Раздел 4 содержит результаты моделирования во временном представлении, а разд. 5 — в частотном. Раздел 6 содержит обсуждение и заключение.

## 2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЯ

Пусть на случайно-неоднородную среду с локальной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{r})$  падает плоская монохроматическая волна  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)$  с час-

тотой  $\omega$ . Спектральная компонента поля определяется волновым уравнением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}_1 \hat{T}_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1), \quad (1)$$

где  $\hat{T}_0(\mathbf{r}) = \epsilon_0^{-1} \hat{P}(\mathbf{r}) r^{-1} k_0^2 \exp(ik_0 r)$  — функция Грина в нерассеивающей среде с восприимчивостью  $\epsilon_0$ ,  $\hat{P}(\mathbf{r}) = \hat{I} - r^{-2} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$  — проектор, обеспечивающий поперечность электромагнитной волны в приближении дальней зоны,  $\Delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) - \epsilon_0$ ,  $k_0 = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света. Интегрирование проводится по полупространству  $z > 0$ , где  $z$  — декартова координата, нормальная границе среды.

Среднее по конфигурациям рассеивателей произведения флуктуации поля  $\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  и флуктуации комплексно-сопряженного дает интенсивность рассеянного излучения

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \langle \delta\mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (2)$$

Выражение (2) представляется в виде произведения двух рядов, полученных путем итерации волнового уравнения для поля и его комплексно-сопряженного. При статистическом усреднении по конфигурациям рассеивателей отдельные слагаемые произведения итерационных рядов содержат многочастичные корреляционные функции диэлектрической проницаемости  $\langle \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_n) \Delta\varepsilon^*(\mathbf{r}'_1) \dots \Delta\varepsilon^*(\mathbf{r}'_m) \rangle$ . В результате хаотизации по разности фаз, возникающей при многократном рассеянии, при условии слабого рассеяния  $\lambda \ll l$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $l$  — средняя длина свободного пробега фотона, практически выживает только некогерентная, лестничная в диаграммных терминах составляющая, описывающая последовательности актов рассеяния полей  $\delta\mathbf{E}$  и  $\delta\mathbf{E}^*$  на одной и той же последовательности флуктуаций,

$$\begin{aligned} \langle \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) \dots \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_n) \Delta\varepsilon^*(\mathbf{r}'_1) \dots \Delta\varepsilon^*(\mathbf{r}'_m) \rangle_L &= \\ &= \delta_{nm} \prod_{i=1}^n \langle \Delta\varepsilon(\mathbf{r}_i) \Delta\varepsilon^*(\mathbf{r}'_i) \rangle. \quad (3) \end{aligned}$$

Оставляя только такие лестничные составляющие многочастичных корреляторов, некогерентную часть интенсивности рассеянного излучения представим в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle_L &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4\pi)^{2n}} \times \\ &\times \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n d\mathbf{r}'_1 \dots d\mathbf{r}'_n \hat{T}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n) \hat{T}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \times \\ &\times \langle \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_n) \Delta \varepsilon^*(\mathbf{r}'_n) \rangle \prod_{i=1}^{n-1} \hat{T}^*(\mathbf{r}'_{i+1} - \mathbf{r}'_i) \hat{T}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \times \\ &\times \langle \Delta \varepsilon(\mathbf{r}_i) \Delta \varepsilon^*(\mathbf{r}'_i) \rangle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}'_i) \mathbf{E}(\mathbf{r}_i), \quad (4) \end{aligned}$$

где цепочка «одетых» тензоров  $\hat{T}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)$  действует на поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ , а цепочка комплексно-сопряженных тензоров  $\hat{T}^*(\mathbf{r}'_{i+1} - \mathbf{r}'_i)$  — на поле  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}'_i)$ .

Представим некогерентную составляющую прямого произведения рассеянных полей на большом расстоянии  $r_0$  от рассеивающего объема до детектора в виде

$$\begin{aligned} \langle \delta E_{\beta_2}^*(\mathbf{r}) \delta E_{\beta_1}(\mathbf{r}) \rangle_L &= \\ &= \frac{S}{r_0^2} L_{\beta_2 \beta_1 \alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) E_{\alpha_2} E_{\alpha_1}, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\beta_2$  и  $\beta_1$  — поляризация рассеянных полей  $\delta \mathbf{E}^*(\mathbf{r})$  и  $\delta \mathbf{E}(\mathbf{r})$ , а  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  — поляризация падающих полей  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_i)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i)$ ,  $S$  — площадь, с которой собирается рассеянное излучение,  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_f$  — волновые векторы падающего и рассеянного излучения.

Тензор четвертого ранга  $\hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  описывает перенос электромагнитного излучения в случайной среде и представляется в виде итерационного ряда по кратностям рассеяния:

$$\hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}^{(n)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i), \quad (6)$$

где первое слагаемое описывает вклад однократного рассеяния,

$$\begin{aligned} \hat{I}^{(1)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \hat{P}'(\mathbf{k}_f) \hat{P}'(\mathbf{k}_i) \hat{P}(\mathbf{k}_f) \hat{P}(\mathbf{k}_i) p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \times \\ &\times \Gamma_R l_s^{-1} \int_0^{\infty} dz_1 \exp \left[ -z_1 \left( \frac{1}{l \cos \theta_f} + \frac{1}{l \cos \theta_i} \right) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

$\theta_i$  — угол падения,  $\theta_f$  — угол рассеяния, отсчитываемый от обратного направления. Общий член ряда имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{I}^{(n)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \left( \frac{\Gamma_R}{l_s} \right)^n \int d\mathbf{R}_n \dots d\mathbf{R}_2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} dz_1 \exp \left( -\frac{z_n}{l \cos \theta_f} - \frac{z_1}{l \cos \theta_i} \right) p(\mathbf{k}_{2n} - \mathbf{k}_i) \times \\ &\times \hat{M}'(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_{n-1}, \dots, \mathbf{k}_i) \hat{M}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_{n-1}, \dots, \mathbf{k}_i) \times \\ &\times \Lambda(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1}) \dots \Lambda(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad (8) \end{aligned}$$

где цепочка проекционных операторов

$$\begin{aligned} \hat{M}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_{n-1}, \dots, \mathbf{k}_i) &= \\ &= \hat{P}(\mathbf{k}_f) \prod_{j=2}^{\infty} \hat{P}(\mathbf{k}_{j-1}) \hat{P}(\mathbf{k}_i) \quad (9) \end{aligned}$$

преобразует падающее поле вдоль траектории, содержащей  $n$  актов рассеяния в точках  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n$ , на каждом шаге;

$$\mathbf{k}_{j-1} = \frac{k(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j-1})}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_{j-1}|}.$$

Тензоры  $\hat{M}'(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  и  $\hat{M}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  образуются как прямое произведение цепочек проекторов  $\hat{P}'(\mathbf{k}_j)$  и  $\hat{P}(\mathbf{k}_j)$ , действующих на поля соответственно  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Функция

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \exp(-R/l) R^{-2} \quad (10)$$

возникает из произведения двух комплексно-сопряженных функций Грина во фраунгоферовом приближении и описывает пропагатор однократного рассеяния. Фазовая функция

$$p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) = \frac{\tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)}{\int \tilde{G}(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) d\Omega_f} \quad (11)$$

описывает зависимость сечения рассеяния от угла рассеяния,

$$\tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\mathbf{r} \langle \Delta \varepsilon(0) \Delta \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (12)$$

представляет собой фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости. Как правило, при моделировании рассеяния света в биотканях используется фазовая функция Хенли–Гринштейна (см. [29])

$$p(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) = \frac{(4\pi)^{-1}(1-g^2)}{(1+g^2-2g(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{k}_i)k^{-2})^{3/2}}. \quad (13)$$

Она описывает зависимость сечения рассеяния от угла рассеяния и содержит один параметр

$$g = \overline{\cos \theta} = \frac{\int d\Omega_f \tilde{G}_0(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \cos \theta_f}{\int d\Omega_f \tilde{G}_0(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)} \quad (14)$$

— средний косинус угла рассеяния между волновыми векторами  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_f$ ;  $\int d\Omega_f$  означает интегрирование по ориентациям вектора  $\mathbf{k}_f$ ;  $\Gamma_R = 2(1 + \overline{\cos^2 \theta})^{-1}$  — рэлеевский множитель,

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{\int d\Omega_f \tilde{G}_0(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \cos^2 \theta_f}{\int d\Omega_f \tilde{G}_0(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)}$$

— средний квадрат косинуса угла рассеяния.

Малые значения  $g$  соответствуют рэлеевскому типу рассеяния на системе точечных рассеивателей, тогда как большие значения параметра анизотропии  $g$  ( $1 - g \ll 1$ ) соответствуют рассеянию в среде, размер рассеивающих частиц в которой порядка или больше длины волны зондирующего излучения.

Отметим, что в случае электромагнитного поля рассеяние является сильно анизотропным даже в случае  $g = 0$ ; этот параметр описывает анизотропию фурье-образа коррелятора диэлектрической восприимчивости; информация об анизотропии содержится также в рэлеевском множителе.

### 3. КО- И КРОСС-ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ КОМПОНЕНТЫ РАССЕЙННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим нормальное падение,  $\mathbf{k}_i = k\mathbf{n}^{(3)}$ , где  $\mathbf{n}^{(i)}$  — орты вдоль декартовых осей  $x, y, z$ , и рассеяние строго назад,  $\mathbf{k}_f = -k\mathbf{n}^{(3)}$ .

Пусть падающий свет линейно поляризован вдоль оси  $x$ ; рассеянный свет содержит в общем случае две компоненты, ко- и кросс-поляризованные. Ко-поляризованная компонента представляется в виде свертки тензора четвертого ранга  $\hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  с диадами  $\mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)}$ :

$$I^{(pol)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} \hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} = L_{xxxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i), \quad (15)$$

а линейная кросс-поляризованная — как свертка  $\hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$  с  $\mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)}$  справа и  $\mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)}$  слева,

$$I^{(depol)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mathbf{n}^{(1)} \otimes \mathbf{n}^{(1)} \hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \mathbf{n}^{(2)} \otimes \mathbf{n}^{(2)} = L_{yyxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i). \quad (16)$$

Для круговой поляризации представим падающий свет как две компоненты, сдвинутые друг относительно друга на четверть волны и поляризованные соответственно вдоль  $\mathbf{n}^{(1)}$  и  $\mathbf{n}^{(2)}$ . Определим два комплексных орта  $\mathbf{n}^{(\pm)} = (\mathbf{n}^{(1)} \pm i\mathbf{n}^{(2)})/\sqrt{2}$ ,  $\mathbf{n}^{(\pm)*} \cdot \mathbf{n}^{(\pm)} = 1$ ,  $\mathbf{n}^{(\pm)*} \cdot \mathbf{n}^{(\mp)} = 0$ . Орт  $\mathbf{n}^{(+)}$  описывает правовинтовую поляризацию, а орт  $\mathbf{n}^{(-)}$  — левовинтовую.

Пусть падающий свет право-поляризован. Тогда циркулярно ко-поляризованная компонента имеет вид

$$I^{(++)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mathbf{n}^{(+)*} \otimes \mathbf{n}^{(+)} \hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \mathbf{n}^{(+)*} \otimes \mathbf{n}^{(+)} = \frac{1}{2}[L_{xxxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) + L_{yyxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) + L_{yxyx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) - L_{xyyx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)], \quad (17)$$

а круговая кросс-поляризованная —

$$I^{(-+)}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \mathbf{n}^{(-)*} \otimes \mathbf{n}^{(-)} \hat{L}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \mathbf{n}^{(+)} \otimes \mathbf{n}^{(+)*} = \frac{1}{2}[L_{xxxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) + L_{yyxx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) - L_{yxyx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) + L_{xyyx}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)]. \quad (18)$$

Члены с нечетным числом поперечных индексов исчезают при усреднении. Эти четыре компоненты легко преобразуются в линейные комбинации, известные как составляющие вектора Стокса.

В методе Монте-Карло вклад  $n$ -кратного рассеяния в отдельные компоненты тензора ранга  $4 \times 4$ , описывающего преобразование двух поперечных компонент падающего нормально поля в две компоненты рассеянного строго назад, представляется в виде среднего по выборке  $N_{ph}$  падающих фотонов [27, 28]:

$$\hat{J}^{(n)}(\rho) = \frac{(l_s^{-1}l\Gamma_R)^n}{N_{ph}} \sum_{i=1}^{N_{ph}} \hat{M}' \hat{M} W_n^{(i)} \exp(-\mu z_n^{(i)}). \quad (19)$$

Здесь  $W_n^{(i)}$  — вес  $i$ -го фотона, претерпевшего  $n$  актов рассеяния, а  $z_n^{(i)}$  — расстояние до границы от точки  $\mathbf{r}_n$ .

Если отражением можно пренебречь, то построение траектории прекращается в случае, если фотон вылетает за границу системы; в этом случае вес равен единице, пока фотон не покинул систему.

При учете отражения фотон, достигший границы, возвращаем в среду согласно закону отражения, умножая весовой коэффициент на коэффициент отражения. В этом случае вес  $W_n^{(i)}$  представляет собой произведение френелевских коэффициентов отражения до  $n$ -го акта рассеяния.

Моделируя электромагнитное поле, кроме стохастического построения траектории необходимо проследить также за процессом преобразования состояния поляризации входящего поля в поляризацию выходящего поля в результате действия тензоров  $\hat{M}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_{n-1}, \dots, \mathbf{k}_i)$  вдоль заданной траектории.

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФУЗИИ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В неограниченной среде решение диффузионного уравнения для интенсивности рассеяния на расстоянии  $r = |\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s|$  в момент времени  $t$  после излучения ультракороткого импульса представляется в виде [30]

$$I^{(0)}(r, t) \sim (4\pi Dct)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dct} - \mu_a ct\right), \quad (20)$$

где параметр  $D = (\mu' + \mu_a)^{-1}/3$  известен как коэффициент диффузии фотона. Пусть

$$R_n = z_1 + \sum_{j \geq 2} r_j + z_n$$

— оптический путь, пройденный фотоном за  $n$  актов рассеяния; тогда  $t_n = R_n/c$  — время, прошедшее с момента излучения. При высоких кратностях рассеяния средняя длина пути оказывается равной сумме средних длин экстинкции,  $R_n = nl$ ; таким образом, заменяя в (20) время  $t$  на дискретное  $t_n = nl/c$ , можно интерпретировать (20) как вклад  $n$ -кратного рассеяния.

Используя для учета ограниченности среды метод зеркальных отображений, решение для геометрии полупространства  $z > 0$  представляют в виде разности решений вида (20) для источника и его зеркального образа [30], выбранного таким образом, чтобы эта разность обращалась в нуль на плоскости, экстраполированной за пределы физической границы  $z = 0$  на расстояние  $z^*$ :

$$I(\mathbf{r}_d, \mathbf{r}_s, t) = I^{(0)}(|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s|, t) - I^{(0)}(|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_m|, t). \quad (21)$$

В эксперименте источник и приемник расположены на поверхности среды,  $\mathbf{r}_s = (\mathbf{r}_{s\perp}, 0)$  и  $\mathbf{r}_d = (\mathbf{r}_{d\perp}, 0)$ , на расстоянии  $\rho = |(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s)_\perp|$  друг от друга, зеркальный источник помещен в  $\mathbf{r}_m = (\mathbf{r}_{s\perp}, z_m)$ ,  $z_m = -2z^*$ ; мы полагаем, что  $z^* \approx 0.71l_{tr}$  в соответствии с решением задачи Милна [29]; здесь  $l_{tr}$  — транспортная длина.

На рис. 1 мы представили временную развертку рассеянного ультракороткого светового импульса излучения, полученную с помощью описанного алгоритма Монте-Карло, и сравнили с результатами диффузионного приближения.

Для сопоставления мы выбрали такие же оптические параметры, как в работе [9]; положили в фазовой функции Хензи–Гринштейна параметр анизотропии рассеяния  $g = 0.8$ , в согласии с [17]; укажем на хорошее согласие с диффузионным приближением.

На рис. 2 представлены гистограммы для скалярного и линейно поляризованного электромагнитного полей для двух расстояний между источником и детектором  $\rho = 5l_{tr}, 10l_{tr}$ ; видно, что на этих расстояниях зависимость от состояния поляризации весьма слаба. При  $\rho = 5l_{tr}$  линейно ко-поляризованная компонента превышает кросс-поляризованную на величину порядка десяти процентов в

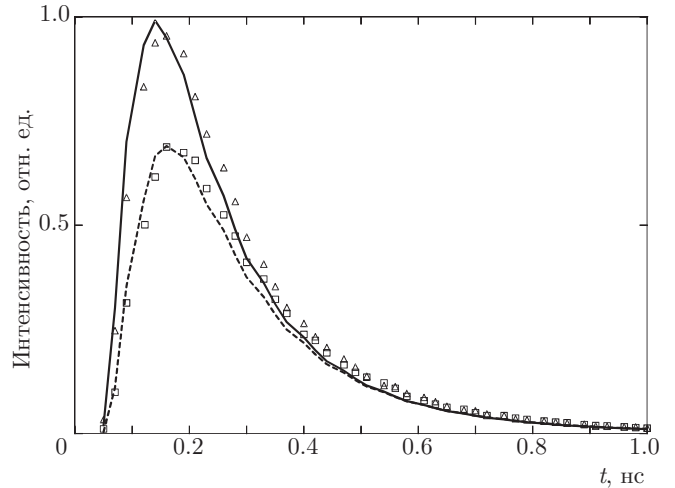


Рис. 1. Гистограммы ультракороткого импульса скалярного поля для типичных параметров биофантама  $\mu'_s = 1 \text{ мм}^{-1}$  и  $\mu_a = 0.001 \text{ мм}^{-1}$ ; расчеты Монте-Карло:  $\rho = 10 \text{ мм}$  ( $\Delta$ ),  $11 \text{ мм}$  ( $\square$ ); сплошная и пунктирная линии — диффузионное приближение для полупространства (21) для тех же расстояний

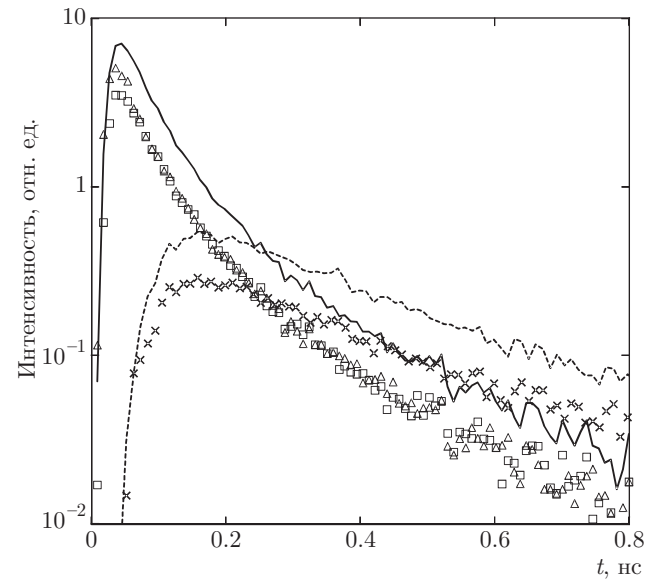


Рис. 2. Развертка ультракороткого импульса по времени задержки для двух значений расстояния между источником и детектором. Для  $\rho = 5l_{tr}$ : сплошная линия — скалярная модель поля,  $\Delta$  — линейно ко-поляризованная,  $\square$  — линейно кросс-поляризованная компоненты электромагнитного поля; для  $\rho = 10l_{tr}$ : пунктирная линия — скалярное поле,  $\times$  — линейно ко-поляризованная компонента;  $l_{tr} = 0.9 \text{ мм}$ ,  $g = 0.5$ , длина волны  $\lambda = 0.685 \text{ мкм}$

**Таблица.** Сдвиг пика гистограммы  $\tau_{max}$  (в наносекундах) ультракороткого импульса; второй и третий столбцы — диффузионное приближение соответственно для неограниченной среды и полупространства, четвертый столбец — результаты моделирования методом Монте-Карло

$\rho$ , мм	Неогр.	Полупр.	МК
$l_{tr} = 900$ мкм			
4.5	0.056	0.034	$0.042 \pm 0.004$
9.0	0.225	0.135	$0.15 \pm 0.01$
$l_{tr} = 450$ мкм			
4.5	0.113	0.068	$0.067 \pm 0.005$
9.0	0.45	0.27	$0.25 \pm 0.01$

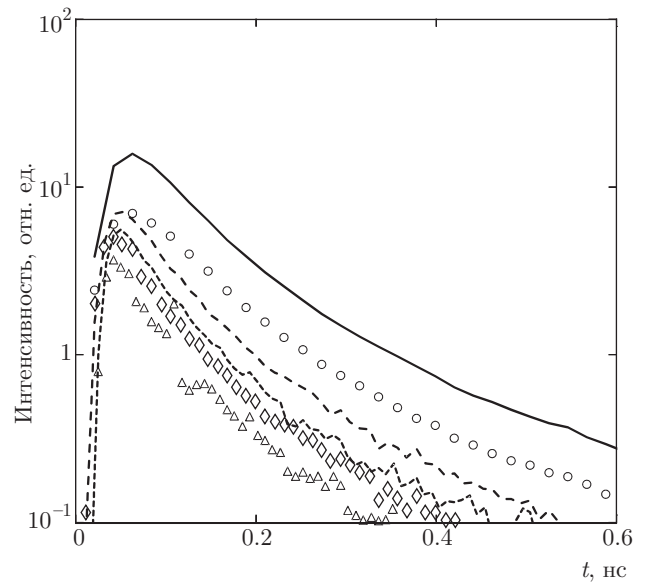
области временного пика; различие между циркулярно поляризованными компонентами еще меньше и практически неразлично на уровне стохастического шума.

Из формулы диффузионного приближения (20), описывающей временную развертку импульса в неограниченной однородной среде, нетрудно получить для времени  $\tau_{max}$ , на которое приходится пик гистограммы,

$$\tau_{max} = (3/10)\mu'_s c^{-1} \rho^2 \quad (22)$$

в пренебрежении поглощением,  $\mu_a \ll \mu'_s$ . Для полупространства из формул (20), (21) получим  $\tau_{max} = (1/2)\mu'_s c^{-1} \rho^2$ . Из приведенных рисунков видно, что численные расчеты дают оценку близкую к теоретическим оценкам для полупространства; так, при типичных значениях  $\rho = 9$  мм и  $\mu'_s = 1.1$  мм<sup>-1</sup>, полагая скорость света в среде  $c = 2 \cdot 10^{10}$  см/с, получим  $\tau_{max} = 0.14$  нс для неограниченной среды и  $\tau_{max} = 0.27$  нс для полупространства; численное моделирование дает  $\tau_{max} = 0.25$  нс. Значения  $\tau_{max}$  для неограниченной среды и полупространства в диффузионном приближении и рассчитанные методом Монте-Карло приведены в таблице для двух значений  $\rho = 5l_{tr}$  и  $10l_{tr}$ .

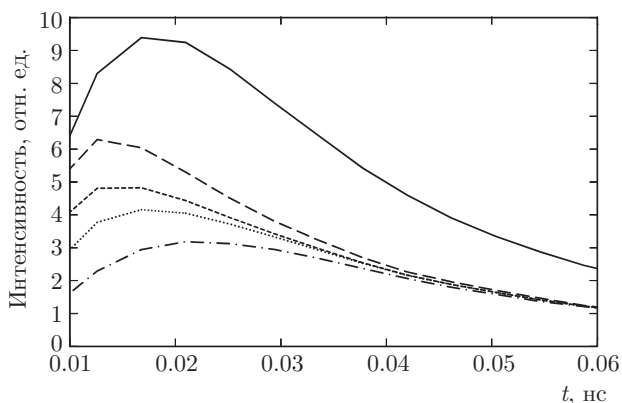
На рис. 3 приведены гистограммы для трех систем с различной анизотропией рассеяния. Видно, что при заданном расстоянии от источника до приемника высота пика гистограммы сильно убывает с ростом параметра анизотропии, т. е. с ростом размеров неоднородностей, вызывающих рассеяния; зависимости от поляризации на этих расстояниях не наблюдается; можно утверждать, что реализуется диффузионный режим.



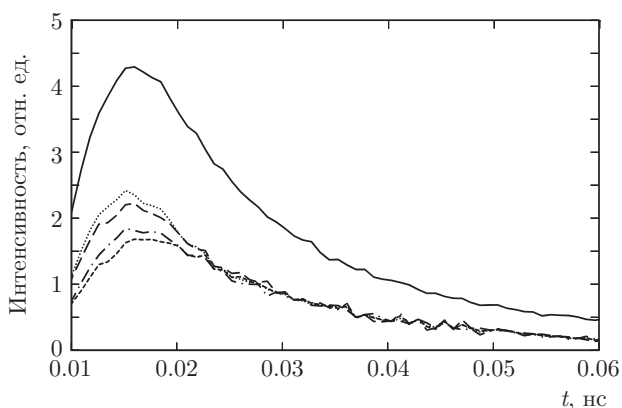
**Рис. 3.** Временные гистограммы для систем с различной анизотропией рассеяния; изотропная система,  $g = 0$ : сплошная линия — скалярное поле,  $\circ$  — электромагнитное поле; средняя анизотропия,  $g = 0.5$ : штриховая линия — скалярное поле,  $\diamond$  — электромагнитное поле; сильная анизотропия,  $g = 0.8$ : пунктирная линия — скалярное поле,  $\triangle$  — электромагнитное поле

На рис. 4, 5 представлены результаты моделирования для малых расстояний, сравнимых с транспортной длиной. Видно, что данные заметно зависят от начальной и конечной поляризации; кроме того, видно, что поляризационная зависимость для циркулярно поляризованного света качественно различна для систем с малыми и крупными в сравнении с длиной волны рассеивателями.

В представленной на рис. 2 и 3 области параметров гистограммы практически не зависят от поляризации; для расстояний, превышающих  $\rho \approx 4l_{tr}$ , излучение практически полностью деполаризовано. Мы провели моделирование в области малых расстояний на границе доступности для современного инструментария [17] и обнаружили, что гистограммы для различных поляризаций заметно различаются. Более того, зависимость от поляризации качественно изменяется при изменении степени анизотропии рассеяния, т. е. при изменении размеров рассеивателей. Мы обнаружили существенное различие в этой зависимости при разных видах поляризации, линейной или круговой. Для линейной поляризации поляризованная компонента, т. е. компонента с совпадающими поляризациями падающей и рассеянной волн, всегда превышает деполаризованную компоненту. В случае круговой поляризации ситуация ка-



**Рис. 4.** Гистограммы поляризованного излучения на расстояниях между источником и приемником  $\rho = 2l_{tr}$ : сплошная линия — скалярное поле; длинные штрихи — линейно поляризованная компонента, ко-поляризованная с входящим излучением; штрихпунктирная линия — линейно кросс-поляризованная, короткие штрихи — циркулярная кросс-поляризованная, пунктирная линия — циркулярная ко-поляризованная компоненты; рэлеевское рассеяние,  $g = 0$



**Рис. 5.** То же, что на рис. 4, в среде с сильной анизотропией рассеяния,  $g = 0.8$

чественно другая. Для систем с малым значением параметра анизотропии доминирующим в области пика гистограммы является кросс-поляризованная компонента, в соответствии с простой физической картиной зеркального отражения назад от дальней границы среды, а для системы с большим значением параметра  $g$  компоненты меняются местами: круговая ко-поляризованная компонента превосходит кросс-поляризованную. Более того, меняются местами компоненты линейно и циркулярно поляризованного излучения. Этот эффект изучался ранее в частотном представлении. Здесь он обнаружен во временном представлении, при моделировании временного затухания ультракороткого импульса.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЧАСТОТНОМ ДОМЕНЕ

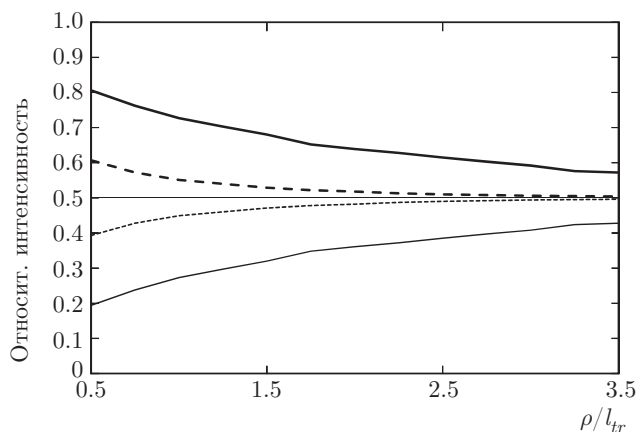
Сигналы ДВФП измеряются в частотном представлении, или, как принято говорить, в частотном домене, и определяют амплитуду и фазу модулированной составляющей фотонной плотности.

В работе [17] были описаны в рамках диффузионного приближения и численного моделирования результаты измерений сигналов ДВФП в частотном домене для раствора интралипида, обычно используемого в настоящее время в качестве био-модели, или биофантома. В работе [17] была использована установка, позволяющая проводить измерения сигналов ДВФП, перемещая узкий падающий луч вдоль поверхности биофантома. Рассеянный свет детектировался в оптоволоконном приемнике, расположенном также на поверхности раствора. Результаты моделирования, выполненные с учетом френелевского отражения [11, 12, 31, 32], полученные для расстояний, в несколько раз превышающих транспортную длину, находятся в замечательном согласии с результатами эксперимента и с результатами, полученными на основе диффузионного приближения; как и во временном представлении, на расстояниях  $\rho \approx 4l_{tr}$  и больших успевает реализоваться полная деполаризация. Однако на малых расстояниях мы обнаружили заметную зависимость от поляризации, ее вида, и связи с анизотропией рассеяния.

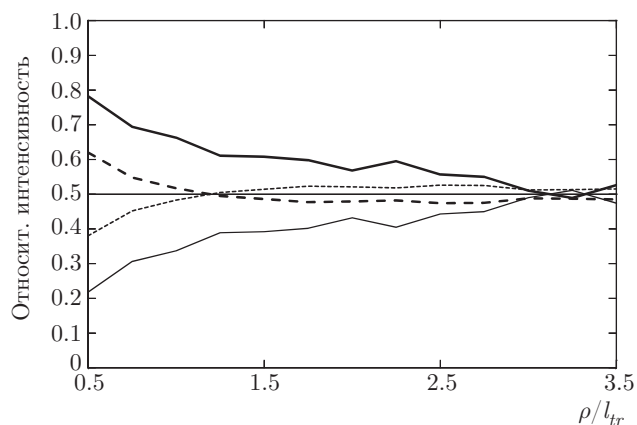
На рис. 6, 7 представлены результаты моделирования интенсивности спектральных ко- и кросс-компонент для линейной и круговой поляризаций, отнесенные к сумме обеих поляризаций, для рэлеевского рассеяния,  $g = 0$  (рис. 6), и сильно анизотропного рассеяния,  $g = 0.8$  (рис. 7), в области малых расстояний от источника до приемника. Видно, что, подобно временной зависимости, на малых расстояниях проявляется сильная поляризационная зависимость, а в случае круговой поляризации относительное доминирование кросс-поляризованной компоненты рэлеевского рассеяния на малых расстояниях сменяется доминированием ко-поляризованной компоненты при рассеянии на крупных рассеивателях,  $g = 0.8$ .

В соответствии с экспериментом мы положили параметр анизотропии  $g = 0.8$ ; выполнили расчеты, варьируя коэффициент адсорбции  $\mu_a$  в интервале от  $0.4 \cdot 10^{-2}$  до  $10^{-2} \text{ см}^{-1}$  для длины волны  $\lambda = 685 \text{ нм}$ .

Для сравнения мы использовали данные, полученные для раствора интралипида, являющегося в



**Рис. 6.** Ко- и кросс-поляризованные спектральные компоненты рассеянного назад излучения, отнесенные к суммарной интенсивности, в зависимости от расстояния  $\rho$ . Сплошная жирная линия — ко-, тонкая — кросс-линейная поляризация; штриховая линия — кросс-, пунктирная — ко-круговая поляризация. Рэлеевское рассеяние,  $g = 0$



**Рис. 7.** То же, что на рис. 6, для сильно анизотропного рассеяния,  $g = 0.8$

настоящее время наиболее распространенным оптическим аналогом биоткани.

Наиболее заметна зависимость от поляризации на малых расстояниях, при которых основную роль играют низшие кратности рассеяния и свет еще не деполаризован полностью.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках описания миграции фотонов на основе уравнения Бете–Солпитера для электромагнитного поля, выполнено моделирование обратного рассеяния оптического излучения в случайно-неоднородных средах, имитирующих биоткани, во временном и частотном представлениях.

Впервые представлены гистограммы электромагнитного излучения с линейной и круговой поля-

ризациями для сред с различной анизотропией рассеяния.

Мы показали численно, что временная гистограмма ультракороткого импульса может быть описана как серия вкладов последовательных кратностей рассеяния, подтверждая это согласием результатов моделирования с аналитическим решением диффузионного уравнения. Мы обнаружили, что значение времени задержки, соответствующего пику гистограммы, является промежуточным по отношению к значениям, следующим из диффузионного приближения для неограниченной среды и среды, занимающей полупространство.

На больших расстояниях между источником и приемником порядка десятка транспортных длин, обычных в биомедицинских приложениях, происходит практически полная деполаризация и эффектов, связанных с векторным характером поля, не наблюдается. Однако на расстояниях порядка двух–трех транспортных длин, все еще в пределах возможности измерений, мы наблюдаем заметные поляризационные эффекты и во временном, и в частотном представлениях. Во временном представлении мы обнаружили сильную зависимость гистограммы от вида поляризации и степени анизотропии рассеяния. В средах с рэлеевским рассеянием при показателе анизотропии  $g$  близком к нулевому значению наибольшее различие в области пика гистограммы наблюдается между компонентами линейно поляризованного излучения; компоненты круговой поляризации различаются слабее, при этом кросс-поляризованная компонента превосходит ко-поляризованную в соответствии с представлением о зеркальном отражении от границы. В средах с сильной анизотропией наибольшее различие наблюдается между право- и лево-поляризованными компонентами, при этом разность их интенсивностей поразительным образом изменяется по знаку: ко-поляризованная превосходит кросс-поляризованную.

Аналогичную смену знака разности интенсивностей компонент круговой поляризации при переходе от системы с малой анизотропией фазовой функции к системе с сильной анизотропией мы наблюдаем также в частотном представлении, изучая деполаризацию линейно и циркулярно поляризованного излучения с ростом расстояния между источником и приемником. Степень поляризации линейно поляризованного света убывает монотонно от 80% на расстоянии в половину транспортной длины до 10% на расстоянии  $\rho = 3.5l_{tr}$  в случае рэлеевского рассеяния и до практически полной деполари-



зации в случае сильной анизотропии. Для круговой поляризации картина совершенно другая. В случае рэлеевского рассеяния картина качественно похожа на картину деполаризации линейно поляризованного света — степень поляризации убывает с 60% на расстоянии  $\rho = 0.5l_{tr}$  практически до нуля на расстоянии  $\rho = 2.5l_{tr}$  — при доминировании кросс-поляризации. Однако в случае рассеяния в среде с сильно анизотропной индикатрисой на расстояниях порядка  $\rho = 1.5l_{tr}$  возникает слабое, но устойчивое доминирование циркулярной ко-поляризованной компоненты, т. е. происходит превращение частично кросс-поляризованного света в частично ко-поляризованный.

Таким образом, переход к наблюдению обратно рассеянного поляризованного света в приложениях может привести к существенному расширению возможностей диагностики неоднородных систем на основе методов ДВФП.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00465).

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Yodh and B. Chance, *Phys. Today* **10**, 34 (1995).
2. T. Durduran, R. Choe, W. B. Baker, and A. G. Yodh, *Rep. Progr. Phys.* **73**, 076701 (2010).
3. *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics*, ed. by V. V. Tuchin, SPIE Publ., Bellingham, WA (2016).
4. В. В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, Москва (2012).
5. *Biomedical Photonics Handbook*, ed. by T. Vo-Dinh, Vol. II, CRC Press, New York (2015).
6. M. A. O'Leary, D. A. Boas, B. Chance, and A. G. Yodh, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2658 (1992).
7. B. J. Tromberg, L. O. Svaasand, Tsong-Tse Tsay, and R. C. Haskell, *Appl. Opt.* **32**, 607 (1993).
8. D. Diaz, A. Lafontant, M. Neidrauer, M. S. Weingarten, R. A. DiMaria-Ghalili, E. Scruggs, J. Rece, G. W. Fried, V. L. Kuzmin, and L. Zubkov, *J. Biomed. Opt.* **22**, 025003 (2017).
9. M. Testorf, U. Osterberg, B. Pogue, and K. Paulsen, *Appl. Opt.* **38**, 236 (1999).
10. I. V. Yaroslavsky, A. N. Yaroslavsky, V. V. Tuchin, and H.-J. Schwarzmaier, *Appl. Opt.* **36**, 6529 (1997).
11. S. Fantini, M. A. Franceschini, and E. Gratton, *J. Opt. Soc. Amer. B* **11**, 2128 (1994).
12. D. J. Durian, *Phys. Rev. E* **50**, 857 (1994).
13. L. H. Wang, S. L. Jacques, and L. Q. Zheng, *Comp. Meth. Prog. Bio.* **47**, 131 (1995).
14. Q. Fang and D. A. Boas, *Opt. Express* **17**, 20178 (2009).
15. R. Henessy, S. Lim, M. Markey, and J. Tunnel, *J. Biomed. Opt.* **18**, 037003 (2013).
16. В. Л. Кузьмин, *Письма в ЖЭТФ* **103**, 568 (2016).
17. V. L. Kuzmin, M. Neidrauer, D. Diaz, and L. A. Zubkov, *J. Biomed. Opt.* **20**, 105006 (2015).
18. Y. L. Kim et al., *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* **9**, 243 (2003).
19. L. F. Rojas-Ochoa et al., *J. Opt. Soc. Amer. A* **21**, 1799 (2004).
20. M. Xu, *Opt. Express* **12**, 6530 (2004).
21. M. Xu and R. R. Alfano, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 213901 (2005).
22. W. Cai, X. Ni, S. R. Gayen, and R. R. Alfano, *Phys. Rev. E* **74**, 056605 (2006).
23. X. Ni and R. R. Alfano, *Opt. Lett.* **29**, 2773 (2004).
24. S. Makita et al., *Appl. Opt.* **45**, 1142 (2006).
25. A. D. Kim and M. Moscoso, *Opt. Lett.* **27**, 1589 (2002).
26. V. L. Kuzmin and I. V. Meglinski. *Opt. Comm.* **273**, 307 (2007).
27. В. Л. Кузьмин, И. В. Меглинский, *Опт. и спектр.* **106**, 294 (2009).
28. В. Л. Кузьмин, И. В. Меглинский, *ЖЭТФ* **137**, 848 (2010).
29. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, т. 1, Мир, Москва (1981).
30. M. S. Patterson, B. Chance, and B. C. Wilson, *Appl. Opt.* **28**, 2331 (1989).
31. R. C. Haskell, L. O. Svaasand, Tsong-Tse Tsay, Ti-Chen Feng, M. S. McAdams, and B. J. Tromberg, *J. Opt. Soc. Amer. A* **11**, 2727 (1994).
32. T. H. Pham, O. Coquoz, J. B. Fishkin, E. Anderson, and B. J. Tromberg, *Rev. Sci. Instr.* **71**(6), 2500 (2000).