

# ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-ИНДУЦИРОВАННОЙ АБСОРБЦИИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНО-ИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ $F_g \rightarrow F_e$ В ПОЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН

*Д. В. Лазебный<sup>a,b,\*</sup>, Д. В. Бражников<sup>a,b</sup>, А. В. Тайченачев<sup>a,b</sup>,  
М. Ю. Басалаев<sup>a,b,\*\*</sup>, В. И. Юдин<sup>a,b,c\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup> *Институт лазерной физики Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>b</sup> *Новосибирский государственный университет  
630090, Новосибирск, Россия*

<sup>c</sup> *Новосибирский государственный технический университет  
630073, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Рассмотрена нелинейная лазерная спектроскопия в схеме двух коллинеарных волн с произвольными эллиптическими поляризациями. Акцент сделан на исследование нелинейных поправок в спектре поглощения одной из волн. Показано, что спонтанный перенос низкочастотной зеemanовской когерентности влияет на знак сверхузкого резонанса. Для замкнутого перехода получено, что направление резонансного контура зависит только от моментов  $F_e$ ,  $F_g$ . На основе этого получена классификация для различных переходов по направлению сверхузкого резонансного контура.

DOI: 10.7868/S0044451015120020

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные интерференционные эффекты, связанные с низкочастотными атомными когерентными состояниями, представляют большой интерес для лазерной спектроскопии [1]. Электромагнитно-индуцированная прозрачность (ЭИП), связанная с явлением когерентного пленения населенностей (КПН), является ярким представителем таких эффектов. Само явление КПН впервые наблюдалось еще в 1976 г. в виде темных полос во флюоресценции паров натрия в ячейке [2]. Вскоре это явление получило теоретическое обоснование [3, 4] (см. также обзоры [5, 6]), которое заключалось в образовании особого суперпозиционного состояния в атомах в результате деструктивной интерференции дипольных пере-

ходов. Главная особенность этого состояния состоит в том, что находящиеся в нем атомы перестают рассеивать энергию из резонансного светового поля, которое индуцировало это состояние. В результате оптической накачки в установившемся режиме атомы накапливаются в этом состоянии, что приводит к резкому уменьшению поглощения энергии из лазерного поля и флюоресценции газа в ячейке. По этому состоянию КПН часто называют «темным» состоянием, а связанные с ним резонансные провалы в спектроскопическом сигнале — «темными» резонансами. Темное состояние может объединять как разные уровни основного терма (например, сверхтонкие компоненты, как это было в первом эксперименте [2]), так и совокупность магнитных подуровней одного вырожденного по проекции полного углового момента атомного состояния [7].

Идея использования явления КПН для наблюдения узких резонансов ЭИП была предложена в работе [8] (см. также обзор [9]). «Стандартной» схемой для наблюдения эффекта ЭИП, которая часто ис-

\*E-mail: becks.ddf@gmail.com

\*\*E-mail: mbasalaev@gmail.com

\*\*\*E-mail: viyudin@mail.ru

пользуется на практике, является конфигурация лазерного поля, составленная из двух сонаправленных световых волн (пробной волны и волны накачки), обладающих высокой взаимной когерентностью. При сканировании частоты одной из волн (пробной) в сигнале поглощения газовой ячейки наблюдается резкий провал — резонанс электромагнитно-индуцированной прозрачности. Другой часто используемой схемой для наблюдения резонансов ЭИП является схема с одной бегущей световой волной, поглощение которой измеряется как функция статического магнитного поля, приложенного вдоль волнового вектора [10]. Первую схему, как правило, называют двухчастотной, тогда как вторую — конфигурацией Ханле. При этом для наблюдения резонансов ЭИП с экспериментальной точки зрения удобнее вторая схема, поскольку в ней не требуется синхронизировать излучение двух лазеров или применять СВЧ-модуляторы для получения нужных частотных компонент лазерного поля.

В 1998 г. был открыт резонанс электромагнитно-индуцированной абсорбции (ЭИА) [11], имеющий знак обратный к знаку резонанса ЭИП. Резонансы ЭИА, наблюдающиеся в виде резкого увеличения поглощения, по аналогии с резонансами ЭИП иногда называют «яркими». В первых экспериментальных работах [11, 12] яркие резонансы исследовались в двухчастотной схеме, затем они также наблюдались и в конфигурации Ханле [13]. Как показали дальнейшие теоретические работы [14–16], физика ярких резонансов связана с образованием анизотропии возбужденного состояния атома и ее спонтанным переносом в основное состояние. В частности, при разрушении этой анизотропии, например, при столкновениях рабочих атомов с атомами буферного газа, резонанс ЭИА переходит в резонанс обратного знака — ЭИП [17, 18].

Одной из основных отличительных особенностей темных и ярких резонансов является их ширина, которая может быть гораздо меньше естественной ширины спектральной линии и достигать рекордно низких значений для спектроскопии атомарных газов при комнатной температуре: от сотен до единиц герц (см., например, [19–25]). В англоязычной литературе для таких резонансов используется общий термин “subnatural-width resonances” (в настоящей работе мы будем использовать общий термин «сверхузкие» резонансы). Сверхузким резонансам в сигнале поглощения также сопутствуют резкие зависимости в сигнале дисперсии показателя преломления среды. Все эти уникальные особенности темных и ярких резонансов, а также явления КПН на-

шли множество интересных приложений в лазерной физике (лазерная генерация без инверсии [26–28], сужение спектра [29] и стабилизация частоты [30] лазерной генерации), нелинейной оптике (трех- и четырехволновое смешение [9, 31–35], поворот плоскости поляризации [36, 37]), прецизионной лазерной спектроскопии газов [5] и атомных пучков [38], оптических коммуникациях («быстрый» и «медленный» свет [9, 39–45]), квантовой информатике (оптические буферы [46–48], обработка информации [49]) и физике холодных атомов (лазерное охлаждение ниже порога отдачи [5, 50–53], опрос холодных атомов [54]). Особое значение резонансы ЭИП имеют для квантовой метрологии: на их основе разрабатываются миниатюрные атомные часы [19, 22, 55–58] и магнитометры [59–61] нового поколения.

Несмотря на большой интерес в отношении исследований свойств резонансов ЭИП/ЭИА и на обилие работ, посвященных многочисленным их применениям, в теории этих эффектов имеются слабо изученные места. В частности, до сих пор не приведено строгого теоретического обоснования устоявшейся классификации дипольных переходов атомов по отношению к знаку сверхузкого резонанса (ЭИА или ЭИП) в стандартных схемах наблюдения в режиме слабого насыщения атомного перехода. Действительно, в настоящее время существует следующая классификация. «Яркими» называют переходы типа  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$  (где  $F_g$  и  $F_e$  — полные угловые моменты атома соответственно в основном и возбужденном состояниях), где в режиме малого насыщения возможно наблюдение резонансов ЭИА. В свою очередь, «темные» переходы — это переходы типа  $F_g = F \rightarrow F_e = F$  и  $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$ , на которых может наблюдаться ЭИП. Во всех случаях основное состояние должно быть вырождено ( $F > 0$ ), иначе сверхузких резонансов не наблюдается.

Такая классификация сложилась, с одной стороны, благодаря экспериментальным данным первых работ в этой области [11–13], а также благодаря многочисленным последующим исследованиям (см., например, [16, 62–70]). С другой стороны, к настоящему времени также накопилось много работ, в которых приведены разнообразные теоретические расчеты. Однако эти расчеты были выполнены либо на основе скалярных спектроскопических моделей атомной системы, либо для частных случаев атомных переходов и/или поляризаций световых волн. Например, в работах [5, 6, 62, 71, 72] и [14, 73] используются скалярные трехуровневая схема  $\Lambda$ -типа или четырехуровневая схема N-типа для описания резо-

нансов соответственно ЭИП и ЭИА. В работе [74] четырехуровневая схема использовалась для описания двойных резонансов ЭИП. Простой переход  $F_g = 0 \rightarrow F_e = 1$  в конфигурации Ханле был исследован в работе [75] для эллиптически поляризованной волны. В этой работе было продемонстрировано, что при определенных условиях нелинейный резонанс может иметь двухструктурный вид: на фоне широкого провала формируется более узкий провал в поглощении среды. Однако центральный провал не был сверхузким и объяснялся причинами, не связанными с эффектом ЭИП. В работе [70] в ходе экспериментов были детально изучены параметры сверхузких резонансов в их зависимости от интенсивности, поляризации и частоты лазерного поля, а также от трех декартовых компонент магнитного поля. При этом для теоретического описания наблюдавшихся закономерностей была использована некоторая феноменологическая модель, предлагающая аппроксимацию полученных спектроскопических сигналов соответствующими лоренцевскими функциями. Свободные параметры, входящие в эти функции, были получены из экспериментов.

Множество работ содержат численные расчеты для конкретных значений моментов атомных переходов, выполненные на основе стандартного квантово-механического подхода — оптических уравнений Блоха (см., например, [12, 16, 64, 68, 69, 76]). В частности, можно выделить работу [76], в которой были проведены обширные расчеты для серии циклических переходов типа  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$  с конкретными значениями  $F_g = 1, 2, 3, 4$ . В этой работе рассматривалась конфигурация Ханле с продольным магнитным полем и частные случаи поляризации световой волны — линейная и циркулярная. Кроме того, в этой же работе было показано, что с ростом интенсивности лазерного поля (при выходе из режима малого насыщения перехода) сверхузкий резонанс ЭИА может не наблюдаться, сливаясь с другими более широкими спектральными структурами (это объяснило, в частности, более ранний эксперимент [77]). В работе [78] была построена простая теоретическая модель для исследования эффекта Ханле в основном состоянии для произвольного атомного перехода  $F_g \rightarrow F_e$  в режиме слабонасыщающего лазерного поля. Магнитное поле в этой работе предполагалось произвольно направленным, в то время как световое — линейно поляризованным. Теоретическая модель, предложенная в работе [78], основывалась на формализме поляризационных мультипольных моментов, причем рассматривалось только основное состояние атома, которое было подготов-

лено линейно поляризованным световым полем. Такие условия задачи позволили авторам ограничиться рассмотрением только эффектов, связанных с населенностью и выстраиванием основного состояния (т. е. поляризационными моментами соответственно нулевого и второго рангов). Существенно в предложенной модели то, что она опиралась на данные эксперимента, из результатов которого и рассчитывалась продольная компонента (параллельная вектору светового поля) поляризационного момента второго ранга (выстроенности).

Суммируя сказанное выше, можно утверждать, что до сих пор не было получено явного аналитического выражения для спектроскопического сигнала для произвольного дипольного перехода  $F_g \rightarrow F_e$ , возбуждаемого эллиптически поляризованными световыми волнами (в режиме слабого насыщения перехода). В данной работе мы попытались устранить этот пробел, рассмотрев двухчастотную конфигурацию лазерного поля, составленную из двух сонаправленных лазерных волн с произвольными эллиптическими поляризациями. Нами было получено явное аналитическое выражение для спектроскопического сигнала в инвариантной форме, позволяющее, во-первых, отделить различные нелинейные эффекты (в частности, эффекты самодействия отдельных волн и интерференционные эффекты между волнами), а во-вторых, решить вопрос о знаке сверхузкого резонанса (ЭИП/ЭИА) в зависимости от конкретного типа дипольного перехода  $F_g \rightarrow F_e$ . Последнее позволило теоретически обосновать классификацию дипольных переходов, сложившуюся к настоящему моменту по отношению к знаку сверхузкого резонанса.

Теоретический анализ, проведенный в настоящей работе, основан на формализме поляризационных мультипольных моментов ( $\kappa q$ -представление для атомной матрицы плотности). Аналитическое выражение для спектроскопического сигнала рассчитывается по теории возмущений до третьего порядка по световому полю включительно, при этом учитывается сверхтонкая структура атомных термов, радиационная релаксация возбужденного состояния и пролетные эффекты (в режиме, когда  $\gamma/\Gamma \gg 1$ , где  $\gamma$  — константа спонтанной релаксации возбужденного состояния,  $1/\Gamma$  — среднее время пролета атомов через световой пучок). Для мультипольных моментов основного состояния эта теория возмущений из-за отсутствия спонтанной релаксации связана с пролетом атомов через ограниченный (в поперечном направлении) световой пучок. При этом после интегрирования по скоростному рас-

пределению атомов появляется «пролетный» параметр насыщения  $\gamma S/\Gamma \ll 1$  ( $S = |dE/\hbar\gamma|^2$  — обычный параметр насыщения перехода в резонансе). Далее исследуется нелинейная лазерная спектроскопия в схеме двух коллинеарных волн. Для этого определен инвариантный вид нелинейной поляризации среды и получены достаточно компактные аналитические выражения для спектроскопического сигнала мощности одного из пучков на выходе из газовой ячейки. Детально анализируются поляризационные и резонансные особенности внутридуплеровской спектроскопии в случае однонаправленных волн. При этом особый акцент делается на исследование влияния, которое оказывает процесс спонтанного переноса анизотропии на амплитуду и знак нелинейных резонансов. В итоге проведена классификация для дипольных переходов с различными моментами основного и возбужденного состояний  $F_g, F_e$ . Также продемонстрировано, что знак узкого резонанса, обусловленного анизотропией, наведенной одной из волн на распространение другой, зависит от поляризации полей, в то время как знак сверхузкого резонанса зависит только от типа перехода, т. е. от моментов  $F_e, F_g$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  резонансно взаимодействует с дипольным переходом  $F_g \rightarrow F_e$  ( $F_g, F_e$  — полные угловые моменты основного ( $g$ ) и возбужденного ( $e$ ) состояний). При этом будем использовать квантовомеханический формализм матрицы плотности  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  в вигнеровском представлении. В базисе зеemanовских волновых функций основного состояния  $\{|F_g, m_g\rangle\}$  ( $m_g = -F_g, \dots, F_g$ ) и возбужденного состояния  $\{|F_e, m_e\rangle\}$  ( $m_e = -F_e, \dots, F_e$ ) матрицу  $\hat{\rho}$  можно разбить на матричные блоки:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{gg} + \hat{\rho}^{ee} + \hat{\rho}^{eg} + \hat{\rho}^{ge}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{\rho}^{gg}$  и  $\hat{\rho}^{ee}$  — матрицы плотности (эрмитовские) для основного и возбужденного состояний:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{gg} &= \sum_{m_g, m'_g} |F_g, m_g\rangle \rho_{m_g m'_g}^{gg} \langle F_g, m'_g|, \\ \hat{\rho}^{ee} &= \sum_{m_e, m'_e} |F_e, m_e\rangle \rho_{m_e m'_e}^{ee} \langle F_e, m'_e|, \end{aligned} \quad (2)$$

с матричными элементами соответственно  $\rho_{m_g m'_g}^{gg}$  и  $\rho_{m_e m'_e}^{ee}$ . Аналогично определяются матрицы оптической когерентности:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{eg} &= \sum_{m_e, m_g} |F_e, m_e\rangle \rho_{m_e m_g}^{eg} \langle F_g, m_g|, \\ \hat{\rho}^{ge} &= (\hat{\rho}^{eg})^\dagger. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда в модели констант релаксации оптическое уравнение Блоха для матрицы плотности сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + i\omega_{eg} + \gamma_{eg} \right) \hat{\rho}^{eg} &= \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}^{eg} \hat{\rho}^{gg} - \hat{\rho}^{ee} \hat{V}^{eg} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla - i\omega_{eg} + \gamma_{eg} \right) \hat{\rho}^{ge} &= \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}^{ge} \hat{\rho}^{ee} - \hat{\rho}^{gg} \hat{V}^{ge} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \Gamma \right) \hat{\rho}^{ee} + \hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\} &= \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}^{eg} \hat{\rho}^{ge} - \hat{\rho}^{eg} \hat{V}^{eg} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \hat{\rho}^{gg} + \Gamma (\hat{\rho}^{gg} - \hat{\rho}^{gg}(0)) &= \\ &= \hat{G}\{\hat{\rho}^{ee}\} - \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{V}^{ge} \hat{\rho}^{ge} - \hat{\rho}^{ge} \hat{V}^{ge} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих уравнениях выражение для оператора взаимодействия с электромагнитным полем в дипольном приближении

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{E} = \hat{V}^{eg} + \hat{V}^{eg\dagger}$$

в соответствии с теоремой Вигнера–Эккарта имеет вид

$$\hat{V}^{eg} = -\frac{d_{eg}}{\sqrt{3}} \sum_{q=0, \pm 1} \hat{T}_{1q}^{eg} (-1)^{-q} E_{-q}, \quad (8)$$

где  $d_{eg} \equiv \langle F_e || \hat{d} || F_g \rangle$  — приведенный матричный элемент дипольного момента перехода, причем

$$d_{ge} = (-1)^{F_g - F_e} d_{eg}^*. \quad (9)$$

Величины  $E_q$  в (8) — ковариантные компоненты электрического поля в циклическом базисе  $\{\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\pm 1} = \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}\}$ :

$$\mathbf{E} = \sum_{q=0, \pm 1} (-1)^{-q} E_{-q} \mathbf{e}_q. \quad (10)$$

Операторы Вигнера первого ранга  $\hat{T}_{1q}^{eg}$  определяются через  $3j$ -символы:

$$\hat{T}_{1q}^{eg} = \sqrt{3} \sum_{\{m\}} (-1)^{F_e - m_e} \begin{pmatrix} F_e & 1 & F_g \\ -m_e & q & m_g \end{pmatrix} \times |F_e, m_e\rangle \langle F_g, m_g|. \quad (11)$$

Далее, в уравнениях (4), (5) параметр  $\gamma_{eg}$  — это скорость релаксации оптической когерентности. Оператор  $\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\}$  в (6) описывает радиационный распад и столкновительную деполаризацию в возбужденном состоянии, причем

$$\text{Tr}\{\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\}\} = \gamma_0 \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\}, \quad (12)$$

где  $\gamma_0$  — скорость радиационного распада возбужденного уровня. Здесь и везде далее под символом  $\text{Tr}\{\dots\}$  будем подразумевать операцию взятия следа только по внутренним степеням свободы. Добавим, что в отсутствие деполаризующих столкновений имеют место соотношения

$$\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\} = \gamma_0 \hat{\rho}^{ee}, \quad \gamma_{eg} = \gamma_0/2 + \Gamma. \quad (13)$$

Параметр  $\Gamma$  в формулах (6), (7), (13) — это скорость релаксации (пролетной или диффузионной) в основном состоянии к начальному (изотропному) распределению  $\hat{\rho}^{gg}(0)$  в отсутствие светового поля.

Оператор

$$\hat{\mathcal{G}}\{\hat{\rho}^{ee}\} = \beta \gamma_0 \frac{2F_e + 1}{3} \sum_{q=0, \pm 1} \hat{T}_{1q}^{eg\dagger} \hat{\rho}^{ee} \hat{T}_{1q}^{eg} \quad (14)$$

в правой части уравнения (7) для матрицы плотности в основном состоянии  $\hat{\rho}^{gg}$  описывает спонтанный переход из возбужденного состояния в основное. Этот процесс включает в себя перенос как зеэмановских населенностей (вклад членов с матричными элементами  $\rho_{m_e m_e}^{ee}$ ), так и зеэмановских когерентностей (вклад членов с матричными элементами  $\rho_{m_e m_e'}^{ee}$  при  $m_e \neq m_e'$ ). В целом его нужно рассматривать как спонтанный перенос полной населенности  $\text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\}$  и зеэмановской анизотропии. Коэффициент  $0 \leq \beta \leq 1$  — это коэффициент ветвления спонтанного распада с уровня  $F_e$  на нижний уровень  $F_g$ . При  $\beta = 1$  переход  $F_g \rightarrow F_e$  является замкнутым, т. е. полная населенность на переходе сохраняется ( $\text{Tr}\{\hat{\rho}^{gg}\} + \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\} = \text{const}$ ). Это следует из формулы (12) и из соотношения

$$\text{Tr}\{\hat{\mathcal{G}}\{\hat{\rho}^{ee}\}\} = \beta \gamma_0 \text{Tr}\{\hat{\rho}^{ee}\}. \quad (15)$$

В сущности, именно исследование влияния оператора спонтанного прихода (14) в сочетании с оператором релаксации возбужденного состояния  $\hat{\gamma}\{\hat{\rho}^{ee}\}$  на амплитуду и знак нелинейных резонансов и является основной целью настоящей статьи.

## 2.1. Неприводимое $\kappa q$ -представление

Выше мы записали уравнения для матрицы плотности в  $Fm$ -представлении. Однако для решения некоторых задач удобно работать в так называемом  $\kappa q$ -представлении [79, 80], когда матрица плотности разбивается на неприводимые представления различных рангов группы  $SU(2)$ .

Введем для этого тензорные операторы Вигнера  $\hat{T}_{\kappa q}^{ab}$  рангов  $\kappa$  ( $|F_a - F_b| \leq \kappa \leq F_a + F_b$ ), которые определяются как

$$\hat{T}_{\kappa q}^{ab} = \sqrt{2\kappa + 1} \sum_{\{m\}} (-1)^{F_a - m_a} \begin{pmatrix} F_a & \kappa & F_b \\ -m_a & q & m_b \end{pmatrix} \times |F_a, m_a\rangle \langle F_b, m_b|. \quad (16)$$

Здесь индексы  $a$  и  $b$  могут принимать оба значения  $e, g$ . Для данных операторов выполняются условия ортогональности и полноты:

$$\text{Tr}\{\hat{T}_{\kappa_1 q_1}^{ab} \hat{T}_{\kappa_2 q_2}^{ab\dagger}\} = \delta_{\kappa_1 \kappa_2} \delta_{q_1 q_2},$$

$$\sum_{\kappa, q} \langle F_a, m_a | \hat{T}_{\kappa q}^{ab} | F_b, m_b \rangle \langle F_c, m_c | \hat{T}_{\kappa q}^{dc\dagger} | F_d, m_d \rangle = \delta_{F_a F_d} \delta_{F_b F_c} \delta_{m_a m_d} \delta_{m_b m_c}.$$

Разбиение матрицы плотности (1) на неприводимые составляющие  $\rho_{\kappa q}^{ab}$  осуществляется следующим образом:

$$\rho_{\kappa q}^{ab} \equiv \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{T}_{\kappa q}^{ba}\}. \quad (17)$$

Это определение позволяет найти ковариантные компоненты неприводимого тензора ранга  $\kappa$ . Обратное преобразование имеет вид

$$\hat{\rho}^{ab} = \sum_{\kappa, q} (-1)^{F_a - F_b - q} \rho_{\kappa - q}^{ab} \hat{T}_{\kappa q}^{ab} = \sum_{\kappa, q} \rho_{\kappa q}^{ab} \hat{T}_{\kappa q}^{ba\dagger}. \quad (18)$$

Далее нам понадобятся выражения для неприводимого представления оператора дипольного взаимодействия (8), которые можно вывести из правила сумм для произведения двух  $3jm$ -символов [81]:

$$\{\hat{V}^{eg}\}_{\kappa} = -\delta_{1\kappa} \frac{d_{eg}}{\sqrt{3}} (-1)^{F_g - F_e} \mathbf{E}, \quad (19)$$

$$\{\hat{V}^{eg\dagger}\}_{\kappa} = -\delta_{1\kappa} \frac{d_{eg}^*}{\sqrt{3}} \mathbf{E}^*.$$

Таким образом, ненулевым является только тензор первого ранга  $\kappa = 1$  (вектор), компоненты которого  $\hat{V}_{1q}^{eg}$  с точностью до общего множителя совпадают с ковариантными компонентами  $E_q$  вектора электрического поля (10). Поэтому в (19) мы опустили компонентные индексы  $\{q\}$  и записали формулы в векторном обозначении.

Теперь, используя формулы (19) и (А.5) из Приложения, а также учитывая вещественность вектора  $\mathbf{E}$ , из (4)–(7) нетрудно получить оптические уравнения Блоха в  $\kappa q$ -представлении (см., например, [82]):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + i\omega_{eg} + \gamma_{eg} \right) \rho_{\kappa q}^{eg} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{\kappa_1} d_{eg} (-1)^{2F_g + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_g & F_e & F_g \end{Bmatrix} \times \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \rho_{\kappa_1}^{gg} \otimes \mathbf{E} \right\}_{\kappa q} - \sum_{\kappa_1} d_{eg} (-1)^{2F_e + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \times \right. \\ & \quad \times \left. \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_e & F_g & F_e \end{Bmatrix} \left\{ \mathbf{E} \otimes \rho_{\kappa_1}^{ee} \right\}_{\kappa q} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + i\omega_{eg} + \gamma_{eg} \right) \rho_{\kappa q}^{ge} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \left[ \sum_{\kappa_1} d_{ge} (-1)^{2F_e + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_e & F_g & F_e \end{Bmatrix} \times \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \rho_{\kappa_1}^{ee} \otimes \mathbf{E} \right\}_{\kappa q} - \sum_{\kappa_1} d_{ge} (-1)^{2F_g + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \times \right. \\ & \quad \times \left. \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_g & F_e & F_g \end{Bmatrix} \left\{ \mathbf{E} \otimes \rho_{\kappa_1}^{gg} \right\}_{\kappa q} \right], \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \gamma_{\kappa} + \Gamma \right) \rho_{\kappa q}^{ee} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \sum_{\kappa_1} \left[ d_{eg} (-1)^{F_e + F_g + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{Bmatrix} \times \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \rho_{\kappa_1}^{ge} \otimes \mathbf{E} \right\}_{\kappa q} - d_{ge} (-1)^{F_e + F_g + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \times \right. \\ & \quad \times \left. \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{Bmatrix} \left\{ \mathbf{E} \otimes \rho_{\kappa_1}^{eg} \right\}_{\kappa q} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \rho_{\kappa q}^{gg} + \Gamma (\rho_{\kappa q}^{gg} - \rho_{\kappa q}^{gg}(0)) = \\ & = -\beta\gamma_0 (-1)^{F_e + F_g + \kappa} (2F_e + 1) \begin{Bmatrix} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{Bmatrix} \rho_{\kappa q}^{ee} + \\ & + \frac{i}{\hbar} \sum_{\kappa_1} \left[ d_{ge} (-1)^{F_g + F_e + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{Bmatrix} \times \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \rho_{\kappa_1}^{eg} \otimes \mathbf{E} \right\}_{\kappa q} - d_{eg} (-1)^{F_g + F_e + \kappa} \Pi_{\kappa_1} \times \right. \\ & \quad \times \left. \begin{Bmatrix} 1 & \kappa_1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{Bmatrix} \left\{ \mathbf{E} \otimes \rho_{\kappa_1}^{ge} \right\}_{\kappa q} \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

При выводе уравнения (22) для матрицы плотности возбужденного состояния нами использовалось очевидное соотношение

$$\{\widehat{\gamma}\{\widehat{\rho}^{ee}\}\}_{\kappa q} = \gamma_{\kappa} \rho_{\kappa q}^{ee}, \quad (24)$$

которое является следствием изотропности деполаризующих столкновений в модели констант релаксации. Параметр  $\gamma_{\kappa}$  — это скорость релаксации мультипольного момента ранга  $\kappa$ . Очевидно также, что столкновения увеличивают скорость деполаризации атома в возбужденном состоянии по отношению к скорости спонтанного распада  $\gamma_0$ , т.е. с физической точки зрения нужно полагать в общем случае  $\gamma_{\kappa} \geq \gamma_0$ . В отсутствие деполаризующих столкновений имеет место  $\gamma_{\kappa} = \gamma_0$  для всех  $\kappa$ , а также  $\gamma_{eg} = \gamma_0/2 + \Gamma$ . Матрица  $\rho_{\kappa q}^{gg}(0)$  в уравнении (23) есть начальная матрица плотности в  $\kappa q$ -представлении.

Отметим, что при записи как уравнений (20)–(23) в  $\kappa q$ -представлении, так и уравнений (4)–(7) в обычном  $Fm$ -представлении нами пока не использовалось резонансное приближение (приближение вращающейся волны). Эта стандартная процедура будет проводиться в дальнейшем, когда при решении конкретных задач в уравнениях будут отбрасываться нерезонансные члены.

### 3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

Пусть атомы резонансно взаимодействуют с бегущим по оси  $z$  бихроматическим световым пучком:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & f(\mathbf{r}_{\perp}) (E_1 \mathbf{e}_1 \exp\{-i(\omega_1 t - k_1 z)\} + \\ & + E_2 \mathbf{e}_2 \exp\{-i(\omega_2 t - k_2 z)\} + \text{с.с.}). \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_{1,2}$  и  $k_{1,2}$  — частоты и волновые векторы полей,  $E_{1,2}$  — их амплитуды, а  $\mathbf{e}_{1,2}$  — комплексные единичные векторы эллиптической поляризации, которые могут быть произвольными. Функция  $f(\mathbf{r}_{\perp}) \leq 1$ , где  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_{\perp} = 0$ , описывает поперечный (в плоскости  $xy$ ) профиль (например, гауссов) напряженности пучков с характерным размером  $r_0$ . В режиме пролетного времени величина  $r_0$  определяет скорость релаксации в основном состоянии  $\Gamma \sim v_0/r_0$  ( $v_0$  — средняя скорость пролета атомов через световой пучок в поперечном направлении).

При рассмотрении различных задач нелинейной оптики и спектроскопии в качестве первоначального этапа исследований требуется определить выражение для матрицы плотности атомов, находящихся под действием резонансного излучения. В дальнейшем будем использовать неприводимое  $\kappa q$ -представление и уравнения (20)–(23) из предыдущего раздела. Как видно, эти уравнения являются весьма громоздкими и в общем случае не существует надежных методов получения аналитических

результатов. Кроме того, специфика основного состояния, для которого релаксация весьма незначительна, не позволяет построить стационарную теорию возмущений по обычному параметру насыщения  $S = (dE/\hbar\gamma_0)^2$ . Однако в экспериментах часто имеют дело с узкими световыми пучками и здесь появляется возможность построения теории возмущений с учетом конечного среднего времени (пролетного или диффузионного) взаимодействия атомов со световым пучком  $\tau$ . Поскольку фактор ограниченности световых пучков уже учтен в уравнениях (20)–(23) путем введения дополнительной скорости релаксации  $\Gamma = 1/\tau$ , то теперь под вектором поля  $\mathbf{E}$  в уравнениях для матрицы плотности (20)–(23) будем понимать вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \text{с.с.}, \\ \mathbf{E}_1 &= E_1 \mathbf{e}_1 \exp\{-i(\omega_1 t - kz)\}, \\ \mathbf{E}_2 &= E_2 \mathbf{e}_2 \exp\{-i(\omega_2 t - kz)\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь мы учли также, что при исследовании нелинейных резонансов в двухуровневой системе разность частот  $\omega_1 - \omega_2$  столь незначительна, что можно с большой степенью точности полагать для волновых векторов  $k_1 = k_2 = k$ .

Далее уравнения (20)–(23) будем решать методом последовательных приближений по степеням поля  $E$  до  $E^3$  включительно. Ниже распишем каждый шаг этой итерационной процедуры по отдельности. При этом, поскольку в модели пролетной константы релаксации  $\Gamma$  задача становится одномерной, в уравнениях (20)–(23) будем учитывать движение атомов только вдоль светового пучка (по координате  $z$ ), т. е.

$$\mathbf{v}\nabla = v \frac{\partial}{\partial z}.$$

### 3.1. Нулевое приближение

Пусть изначально имеется изотропный газ атомов, находящихся в основном состоянии, т. е. в нулевом приближении по полю  $E$  матрица плотности в  $\kappa q$ -представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa}^{gg}(0) &= \delta_{\kappa 0} \frac{1}{\sqrt{2F_g + 1}} \mathcal{F}(v), \\ \rho_{\kappa}^{ee}(0) &= 0, \quad \rho_{\kappa}^{eg}(0) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Тепловое распределение  $\mathcal{F}(v)$  атомов по скоростям в обычных условиях описывается стандартной формой распределения Максвелла–Больцмана:

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{\pi^{1/2} \bar{v}} \exp\left(-\frac{v^2}{\bar{v}^2}\right), \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{M}}. \quad (28)$$

### 3.2. Первый шаг итерации

Из формул (20)–(23) следует, что поправка первого порядка  $\rho_{\kappa}(1)$  по полю  $E$  появляется только для членов  $\rho_{\kappa}^{eg}$  и  $\rho_{\kappa}^{ge}$ , описывающих оптическую когерентность между основным и возбужденным состояниями. Подставляем нулевое приближение (27) в правую часть уравнений (20), (21) и, используя выражение для поля (26), получим в резонансном приближении:

$$\begin{aligned} \rho_{\kappa}^{eg}(1) &= i\delta_{\kappa 1} \frac{d_{eg}}{\hbar} \frac{(-1)^{F_e - F_g}}{\sqrt{3}(2F_g + 1)} \times \\ &\times \left[ \frac{\mathbf{E}_1}{L_{eg}^{(1)}} + \frac{\mathbf{E}_2}{L_{eg}^{(2)}} \right] \mathcal{F}(v), \\ \rho_{\kappa}^{ge}(1) &= -i\delta_{\kappa 1} \frac{d_{ge}}{\hbar} \frac{(-1)^{F_e - F_g}}{\sqrt{3}(2F_g + 1)} \times \\ &\times \left[ \frac{\mathbf{E}_1^*}{L_{eg}^{(1)*}} + \frac{\mathbf{E}_2^*}{L_{eg}^{(2)*}} \right] \mathcal{F}(v), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$L_{eg}^{(j)} = \gamma_{eg} - i(\omega_j - \omega_{eg} - kv), \quad j = 1, 2 \quad (30)$$

— комплексные резонансные знаменатели. Из (29) видно, что ненулевые поправки первого порядка по  $E$  появляются только для ранга  $\kappa = 1$ .

### 3.3. Второй шаг итерации

Прежде чем приступить к вычислению вторых поправок по полю, отметим, что эти поправки описывают формирование неравновесного распределения (т. е. наведенной анизотропии) атомов в основном и возбужденном состояниях.

Подставляя выражения (29) в (22), запишем уравнение для матрицы плотности возбужденного состояния с точностью до членов  $E^2$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_{\kappa} + \Gamma \right) \rho_{\kappa}^{ee}(2) &= \\ = \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar^2} (-1)^{F_e + F_g + \kappa} \frac{\mathcal{F}(v)}{2F_g + 1} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{array} \right\} \times \\ \times \left[ \frac{\{\mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(1)*}} + \frac{\{\mathbf{E}_2^* \otimes \mathbf{E}\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(2)*}} + \right. \\ \left. + \frac{\{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}_1\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(1)}} + \frac{\{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}_2\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(2)}} \right], \end{aligned} \quad (31)$$

откуда видно, что в возбужденном состоянии во втором порядке по  $E$  формируются мультипольные моменты рангов  $\kappa = 0$  (скаляр, населенность),  $\kappa = 1$

(вектор, ориентация) и  $\kappa = 2$  (квадруполь, выстраивание). Учитывая в правой части (31) только резонансные члены, находим

$$\rho_{\kappa}^{ee}(2) = \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar^2} (-1)^{F_e+F_g+\kappa} \frac{\mathcal{F}(v)}{2F_g+1} \times \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{matrix} \right\} \times \sum_{\{j,l\}=1,2} \frac{2\gamma_{eg} + i\Delta_{jl}}{\gamma_{\kappa} + \Gamma + i\Delta_{jl}} \frac{\{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}}, \quad (32)$$

где

$$\Delta_{jl} = \omega_j - \omega_l.$$

Для определения вторых поправок по полю к матрице плотности основного состояния  $\rho_{\kappa}^{gg}(2)$  также подставим сначала выражения (29) в правую часть уравнения (23). Отбрасывая при этом в правой части нерезонансные (быстро осциллирующие) члены, получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma \right) \rho_{\kappa}^{gg}(2) = -\beta\gamma_0 (-1)^{F_e+F_g+\kappa} \times (2F_e+1) \left\{ \begin{matrix} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{matrix} \right\} \rho_{\kappa}^{ee}(2) - \frac{|d_{eg}|^2}{\hbar^2} \frac{(-1)^{F_g+F_e} \mathcal{F}(v)}{2F_g+1} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{matrix} \right\} \times \sum_{\{j,l\}=1,2} \frac{[2\gamma_{eg} + i\Delta_{jl}] \{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}}. \quad (33)$$

Используя явный вид (32) для  $\rho_{\kappa}^{ee}$ , находим

$$\rho_{\kappa}^{gg}(2) = -\frac{|d_{eg}|^2 \mathcal{F}(v)}{\hbar^2} \frac{(-1)^{F_g+F_e}}{2F_g+1} \times \sum_{\{j,l\}=1,2} \frac{2\gamma_{eg} + i\Delta_{jl}}{\Gamma + i\Delta_{jl}} \frac{\{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}} \times \left[ \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{matrix} \right\} + \frac{\beta\gamma_0(2F_e+1)(-1)^{F_g+F_e}}{\gamma_{\kappa} + \Gamma + i\Delta_{jl}} \times \left\{ \begin{matrix} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{matrix} \right\} \right]. \quad (34)$$

Здесь необходимо отметить, что в этой сумме члены с  $j \neq l$  содержат резонансный знаменатель, соответствующий пролетной ширине  $\Gamma$ . Дальнейшее рассмотрение будем проводить в приближении

$$\Gamma \ll \gamma_{eg}, \gamma_{\kappa}. \quad (35)$$

Поэтому в формуле (34) можно смело пренебречь  $\Gamma$  и  $\Delta_{jl}$  на фоне указанных величин  $\gamma_{eg}, \gamma_{\kappa}$ , что позволяет несколько упростить предыдущее выражение:

$$\rho_{\kappa}^{gg}(2) = -\frac{|d_{eg}|^2}{\hbar^2} \frac{2\gamma_{eg}}{\Gamma} \sum_{\{j,l\}=1,2} \frac{\mathcal{F}(v)}{1 + i\Delta_{jl}/\Gamma} \times \frac{\{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_{\kappa}}{L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}} \frac{(-1)^{F_g+F_e}}{2F_g+1} \times \left[ \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{matrix} \right\} + \frac{\beta\gamma_0}{\gamma_{\kappa}} (2F_e+1) (-1)^{F_g+F_e} \times \left\{ \begin{matrix} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{matrix} \right\} \right], \quad (36)$$

в котором вся зависимость от угловых моментов перехода  $F_g \rightarrow F_e$  содержится в одном общем множителе.

При сравнении формул (36) и (32) видно, что, хотя оба этих вклада имеют второй порядок по полю, тем не менее величина нелинейной поправки (36) является доминирующей, так как содержит множитель  $\gamma_{eg}/\Gamma \gg 1$ , большая величина которого обусловлена относительно низкой скоростью релаксации (пролетной или диффузионной) в основном состоянии. Поэтому при вычислении следующего (третьего) порядка теории возмущения достаточно будет ограничиться использованием только выражения (36).

### 3.4. Третий шаг итерации

Подставляя теперь (36) в правую часть (20), (21), получим уравнение для нелинейных ( $\sim E^3$ ) по полю вкладов  $\tilde{\rho}_{\kappa}^{eg}, \tilde{\rho}_{\kappa}^{ge}$ , описывающих оптическую когерентность между основным и возбужденным состояниями. При этом, имея в виду дальнейшие электродинамические приложения, мы будем интересоваться только неприводимым тензором ранга  $\kappa = 1$  (т.е. вектором):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_{eg} + i\omega_{eg} \right) \rho_1^{eg}(3) = \frac{2i\gamma_{eg}|d_{eg}|^2 d_{eg}}{\Gamma \hbar^3} \times \sum_{\kappa=0}^2 \sum_{\{jl\}=1,2} \frac{\Pi_{\kappa} (-1)^{F_e-F_g} A^{(\kappa)} \mathcal{F}(v)}{1 + i\Delta_{jl}/\Gamma} \times \frac{\{\{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_{\kappa} \otimes \mathbf{E}\}_1}{L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}}, \quad (37)$$

где



$$A^{(\kappa)} = \frac{1}{2F_g + 1} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{Bmatrix} \times \\ \times \left[ \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{Bmatrix} + \frac{\beta\gamma_0}{\gamma_\kappa} (2F_e + 1) (-1)^{F_g + F_e} \times \right. \\ \left. \times \begin{Bmatrix} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{Bmatrix} \right]. \quad (38)$$

При выводе (37) мы не учитывали в правой части (20) вклады, связанные с возбужденным состоянием, поскольку, как уже отмечалось выше,  $\rho_\kappa^{ee}(2)$  много меньше поправок в основном состоянии  $\rho_\kappa^{gg}(2)$ .

При учете в правой части только резонансных членов уравнение (37) легко интегрируется:

$$\rho_1^{eg}(3) = \frac{2i\gamma_{eg}|d_{eg}|^2 d_{eg}}{\Gamma \hbar^3} \times \\ \times \sum_{\kappa=0}^2 \sum_{\{jlp\}=1,2} \frac{\Pi_\kappa (-1)^{F_e - F_g} A^{(\kappa)} \mathcal{F}(v)}{1 + i\Delta_{jl}/\Gamma} \times \\ \times \frac{\{\{\mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l\}_\kappa \otimes \mathbf{E}\}_1}{\tilde{L}_{eg}^{(jlp)} L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}}, \quad (39)$$

где

$$\tilde{L}_{eg}^{(jlp)} = \frac{\gamma}{2} - i[\omega_p + \omega_l - \omega_j - \omega_{eg} - kv]. \quad (40)$$

Таким образом, с точностью до членов  $E$  и  $E^3$ , определяемых по формулам (29) и (39), мы имеем неприводимый тензор оптической когерентности ранга  $\kappa = 1$ :

$$\rho_1^{eg} \approx \rho_1^{eg}(1) + \rho_1^{eg}(3). \quad (41)$$

Матрица  $\rho_1^{ge}$  легко определяется операцией эрмитового сопряжения:

$$\rho_{1q}^{ge} = (-1)^{F_e - F_g - q} \rho_{1-q}^{eg*}.$$

Далее перейдем к исследованию тензорных и спектроскопических особенностей сигналов, возникающих при прохождении лазерных пучков через резонансную газовую среду.

#### 4. СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

Как известно, распространение световых волн в среде описывается волновым уравнением:

$$[\nabla[\nabla\mathbf{E}]] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации среды, который в случае разреженного газа определяется следующим образом:

$$\mathbf{P} = \bar{n}_0 \langle \mathbf{d} \rangle.$$

Здесь  $\bar{n}_0$  — средняя концентрация частиц, а  $\langle \mathbf{d} \rangle = \langle \text{Tr} \{ \hat{\mathbf{d}} \hat{\rho} \} \rangle_{\mathbf{v}}$  — наведенный дипольный момент атома, который, используя  $\kappa q$ -представление, можно записать в виде

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (d_{ge} \langle \rho_1^{eg} \rangle_{\mathbf{v}} + \text{с.с.}), \quad (43)$$

где символ  $\langle \dots \rangle_{\mathbf{v}}$  означает усреднение (интегрирование) по скоростям частиц. Исходя из формул (41), (29) и (39), для нашей постановки задачи находим

$$\mathbf{P} = i \frac{\bar{n}_0 |d_{eg}|^2}{\hbar} \frac{1}{3(2F_g + 1)} \times \\ \times \left[ \mathbf{E}_1 \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(1)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_2 \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} \right] + \\ + i \frac{2\bar{n}_0 |d_{eg}|^4 \gamma_{eg}}{\hbar^3 \Gamma \sqrt{3}} \sum_{\kappa=0}^2 \sum_{\{jlp\}=1,2} \frac{\Pi_\kappa A^{(\kappa)}}{1 + i\Delta_{jl}/\Gamma} \times \\ \times \{ \{ \mathbf{E}_j^* \otimes \mathbf{E}_l \}_\kappa \otimes \mathbf{E}_p \}_1 \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{\tilde{L}_{eg}^{(jlp)} L_{eg}^{(j)*} L_{eg}^{(l)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} + \text{с.с.} \quad (44)$$

Подставляя выражение (44) в (42), можно теперь рассматривать задачу о прохождении световых пучков через резонансную газовую среду и исследовать различные особенности, в том числе и спектроскопические, возникающие при этом.

В большинстве практически интересных случаев уравнение (42) можно упростить, пользуясь стандартным методом медленно меняющихся амплитуд. Для этого представим положительно-частотную фурье-компоненту монохроматического  $j$ -го пучка с частотой  $\omega_j$  и волновым вектором  $k_j \mathbf{e}_z$  (в вакууме) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r}) \exp \{ -i(\omega_j t - k_j z) \}, \quad j = 1, 2. \quad (45)$$

Здесь явно выделены быстрые пространственные и временные осцилляции, а  $\tilde{\mathbf{E}}_j(\mathbf{r})$  — комплексная векторная амплитуда поля, которая медленно меняется на размерах длины волны  $\lambda_j = 2\pi c/\omega_j$ . Аналогично, у вектора  $\mathbf{P}$  (44) выделим быстро меняющуюся часть:

$$\mathbf{P}_j = \tilde{\mathbf{P}}_j \exp \{ -i(\omega_j t - k_j z) \}, \quad (46)$$

с той же частотой  $\omega_j$  и волновым вектором  $k_j$ , заключив медленную пространственную зависимость в векторе  $\tilde{\mathbf{P}}_j$ . Например, если нас интересует сигнал на частоте второй волны  $\omega_2$ , то из (44) находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_2 = & i \frac{\bar{n}_0 |d_{eg}|^2}{\hbar} \frac{1}{3(2F_g + 1)} \left\langle \frac{\mathcal{F}(\mathbf{v})}{L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_v \mathbf{E}_2 + \\
 & + i \frac{2\bar{n}_0 |d_{eg}|^4 \gamma_{eg}}{\sqrt{3} \hbar^3 \Gamma} \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(2)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_v \times \\
 & \times \sum_{\kappa=0}^2 \Pi_{\kappa} A^{(\kappa)} \{ \{ \mathbf{E}_2^* \otimes \mathbf{E}_2 \}_{\kappa} \otimes \mathbf{E}_2 \}_1 + \\
 & + i \frac{2\bar{n}_0 |d_{eg}|^4 \gamma_{eg}}{\sqrt{3} \hbar^3 \Gamma} \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(1)}} \right\rangle_v \times \\
 & \times \sum_{\kappa=0}^2 \Pi_{\kappa} A^{(\kappa)} \{ \{ \mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}_1 \}_{\kappa} \otimes \mathbf{E}_2 \}_1 + \\
 & + i \frac{2\bar{n}_0 |d_{eg}|^4 \gamma_{eg}}{\sqrt{3} \hbar^3 \Gamma} \left\langle \frac{\mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_v \times \\
 & \times \sum_{\kappa=0}^2 \frac{\Pi_{\kappa} A^{(\kappa)}}{1 + i\Delta_{12}/\Gamma} \{ \{ \mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}_2 \}_{\kappa} \otimes \mathbf{E}_1 \}_1. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Забегая несколько вперед, скажем, что первое слагаемое в правой части обусловлено линейным по полю откликом среды и дает доплеровский контур в спектре поглощения, а остальные три связаны с нелинейными вкладами, содержащими информацию как о самодействии поля (вторая поправка), так и о взаимодействии с другой волной. Именно две последние поправки описывают появление в спектроскопическом сигнале узких резонансных структур даже в случае большого доплеровского уширения линейного резонанса.

В случае разреженного газа и малой длины газовой ячейки, когда можно не учитывать изменение профиля светового пучка, из (42), (45), (46) получаем укороченное уравнение для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mathbf{E}}_j = i2\pi k_j \tilde{\mathbf{P}}_j, \quad (48)$$

в котором мы пренебрегли производными по  $x$  и  $y$ , а также всеми вторыми производными.

Пусть область резонансного взаимодействия атомов со светом находится внутри интервала  $0 \leq z \leq L$ . Тогда, если  $j$ -я волна распространяется по оси  $z$  в положительном направлении, то для поля на выходе из среды имеем следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{E}}_j(L) = \tilde{\mathbf{E}}_{j0} + 2i\pi k_j \int_0^L \tilde{\mathbf{P}}_j dz, \quad (49)$$

где  $\tilde{\mathbf{E}}_{j0}$  — вектор поля на входе.

Будем полагать далее, что поле на выходе из газовой ячейки  $\tilde{\mathbf{E}}_j(L)$  незначительно отличается от начального  $\tilde{\mathbf{E}}_{j0}$  (оптически тонкая среда), т. е. второе слагаемое в правой части (49) является малой поправкой к первому. В этом приближении в подынтегральном выражении для  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  можно считать, что  $\tilde{\mathbf{E}}_j \approx \tilde{\mathbf{E}}_{j0}$ , в результате этого находим

$$\tilde{\mathbf{E}}_j(L) \approx \tilde{\mathbf{E}}_{j0} + 2i\pi k_j L \tilde{\mathbf{P}}_j. \quad (50)$$

Обычно при прохождении узкого светового пучка через среду исследуют спектральную зависимость интенсивности (или мощности) поля, вышедшего из среды, которая определяется квадратом амплитуды поля. В соответствии с (50) можно записать выражение

$$|\tilde{\mathbf{E}}_j(L)|^2 \approx |\tilde{\mathbf{E}}_{j0}|^2 + 4\pi k_j L \operatorname{Re} \left\{ i \left( \tilde{\mathbf{E}}_{j0}^* \cdot \tilde{\mathbf{P}}_j \right) \right\}, \quad (51)$$

в котором опущен малый член, пропорциональный  $|\tilde{\mathbf{P}}_j|^2$ .

#### 4.1. Общий геометрический анализ спектроскопического сигнала

Для определенности будем исследовать сигнал от второго пучка, который в этом случае играет роль пробного поля. Однако отметим, что это совершенно не означает малости амплитуды  $|\mathbf{E}_2|$  по отношению к  $|\mathbf{E}_1|$ , поскольку все предыдущие формулы были получены без дополнительных предположений о сравнительной величине полей для различных пучков.

Как следует из формулы (26), начальные векторные амплитуды полей можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_{10} = E_1 \mathbf{e}_1, \quad \tilde{\mathbf{E}}_{20} = E_2 \mathbf{e}_2, \quad (52)$$

где  $E_j$  — скалярная амплитуда,  $\mathbf{e}_j$  — единичный вектор эллиптической поляризации. В соответствии с (51) и (47), можно записать выражение для интенсивности второго пучка на выходе из среды следующим образом:

$$I_2(L) \approx I_2(0) \left( 1 - \alpha L \operatorname{Re} \left[ \mathcal{D} + \tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} \right] \right), \quad (53)$$

где параметр  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{4\pi\bar{n}_0 |d_{eg}|^2}{\hbar\bar{v}},$$

по порядку величины совпадает с коэффициентом поглощения интенсивности в центре доплеровского контура.

Величина  $\mathcal{D}$  определяет зависимость линейного коэффициента поглощения от частоты  $\omega_2$ :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{3(2F_g + 1)} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(\mathbf{v})}{L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}}. \quad (54)$$

Первая нелинейная поправка в (53)

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{2|d_{eg}E_2|^2\gamma_{eg}}{\sqrt{3}\hbar^2\Gamma} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(2)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} \times \\ &\times \sum_{\kappa=0}^2 \Pi_{\kappa} A^{(\kappa)} (\{\{\mathbf{e}_2^* \otimes \mathbf{e}_2\}_{\kappa} \otimes \mathbf{e}_2\}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*) \end{aligned} \quad (55)$$

связана с самодействием поля.

Вторая нелинейная поправка в (53)

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{2|d_{eg}E_1|^2\gamma_{eg}}{\sqrt{3}\hbar^2\Gamma} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(1)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} \times \\ &\times \sum_{\kappa=0}^2 \Pi_{\kappa} A^{(\kappa)} (\{\{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_1\}_{\kappa} \otimes \mathbf{e}_2\}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*) \end{aligned} \quad (56)$$

учитывает влияние, которое оказывает анизотропия, наведенная первой волной, на распространение второго пучка.

Последняя поправка в (53)

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \frac{2|d_{eg}E_1|^2\gamma_{eg}}{\sqrt{3}\hbar^2\Gamma} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}} \times \\ &\times \sum_{\kappa=0}^2 \frac{\Pi_{\kappa} A^{(\kappa)}}{1 + i\Delta_{12}/\Gamma} (\{\{\mathbf{e}_1^* \otimes \mathbf{e}_2\}_{\kappa} \otimes \mathbf{e}_1\}_1 \cdot \mathbf{e}_2^*) \end{aligned} \quad (57)$$

связана с нелинейными резонансами, обусловленными интерференционными (когерентными) эффектами.

Используя формулы из [81] для тензорных произведений различных рангов, находим

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= S_A \left( -\frac{1}{3}A^{(0)} - \frac{1 - |\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2|^2}{2}A^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + 3|\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2|^2}{6}A^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= S_B \times \\ &\times \left( -\frac{1}{3}A^{(0)} + \frac{|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2 - |\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2|^2}{2}A^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 - 3|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2 - 3|\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2|^2}{6}A^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= S_C \times \\ &\times \left( -\frac{|\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2|^2}{3}A^{(0)} - \frac{1 - |\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2}{2}A^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 + 3|\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2 - 2|\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2|^2}{6}A^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$S_A = \frac{2|d_{eg}E_2|^2\gamma_{eg}}{\hbar^2\Gamma} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(2)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}}, \quad (61)$$

$$S_B = \frac{2|d_{eg}E_1|^2\gamma_{eg}}{\hbar^2\Gamma} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(1)}} \right\rangle_{\mathbf{v}}, \quad (62)$$

$$S_C = \frac{2|d_{eg}E_1|^2\gamma_{eg}}{\hbar^2\Gamma(1 + i\Delta_{12}/\Gamma)} \left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_{\mathbf{v}}. \quad (63)$$

Вычисление скалярных произведений дает:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2|^2 &= \cos^2(2\varepsilon_2), \\ |\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2|^2 &= \cos^2\varphi \cos^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\ &\quad + \sin^2\varphi \sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ |\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2|^2 &= \cos^2\varphi \cos^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \\ &\quad + \sin^2\varphi \sin^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (64)$$

что позволяет выразить спектроскопический сигнал через параметры эллиптичности  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и угол  $\varphi$  между главными осями эллипсов поляризации (см. рис. 1).

Суммируя результаты данного раздела, отметим, что все нелинейные поправки  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  имеют вид произведения двух множителей, один из которых ( $S_A$ ,  $S_B$  и  $S_C$ ) содержит информацию о форме спектроскопического сигнала (зависимость от частот  $\omega_j$ ), а другой определяет поляризационную зависимость данного вклада и содержит (через коэффициенты  $A^{(\kappa)}$ ) информацию об угловых моментах перехода ( $F_g, F_e$ ) и релаксационных константах  $\gamma_{\kappa}$ . Добавим также, что, как видно из (59), (60), единичные векторы поляризаций  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  входят в векторную часть выражений для нелинейных поправок  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  симметрично.

#### 4.2. Амплитудно-частотная характеристика спектроскопического сигнала

Выше мы провели анализ зависимости сигнала интенсивности от геометрии взаимодействующих полей. Эта зависимость для любых типов атомов или молекул имеет достаточно универсальный вид (53), где вся спектроскопическая информация об энергетической и угловой структурах резонансных уровней содержится в коэффициентах  $\mathcal{D}$ ,  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ ,  $A^{(\kappa)}$  (см. формулы (38), (54), (61)–(63)).

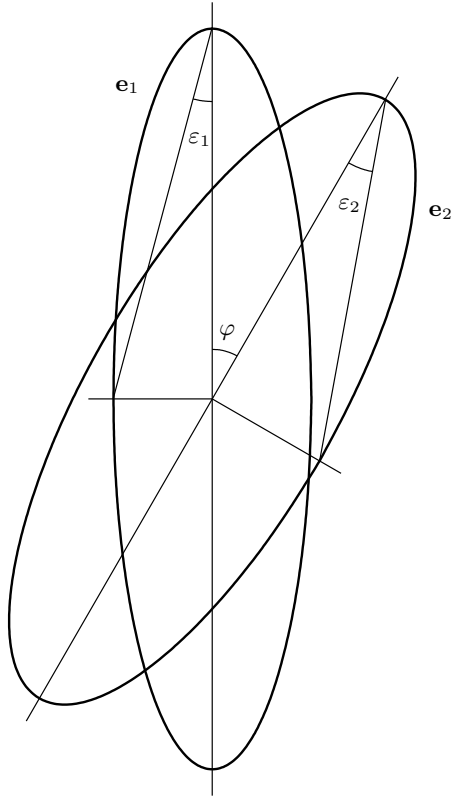


Рис. 1. Взаимное расположение эллипсов поляризации

Для определения явного вида коэффициентов  $\mathcal{D}$ ,  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  нам в дальнейшем потребуется следующее хорошо известное соотношение (см., например, [83]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{p-t} = -i\pi w(p) \text{ при } \text{Im}(p) > 0, \quad (65)$$

$$w(p) = e^{-p^2} (1 - \text{Erf}(-ip)).$$

Тогда с учетом (28) легко находим коэффициент  $\mathcal{D}$  из (54):

$$\mathcal{D} = \frac{\sqrt{\pi} w(p^{(2)})}{3(2F_g + 1)}, \quad (66)$$

где

$$p^{(j)} = \frac{\omega_j - \omega_{eg} + i\gamma/2}{k\bar{v}}. \quad (67)$$

Зависимость (66) от частоты  $\omega_2$  представляет собой стандартный доплеровский контур линейного поглощения с шириной, приблизительно равной  $k\bar{v}$ , при  $k\bar{v} \gg \gamma$ .

Для определения коэффициента  $S_A$  из (61), проведем сначала несложные преобразования:

$$\frac{1}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(2)*} L_{eg}^{(2)}} = \frac{1}{\gamma^2} \left[ \frac{1}{L_{eg}^{(2)}} + \frac{1}{L_{eg}^{(2)*}} + \gamma \frac{1}{(L_{eg}^{(2)})^2} \right]. \quad (68)$$

Тогда с учетом (68), (65), (30) и (28) можно записать

$$\left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(2)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_v = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma^2} \left[ w(p^{(2)}) + w(-p^{(2)*}) + \frac{2\gamma}{\sqrt{\pi} k\bar{v}} \left( 1 + i\sqrt{\pi} p^{(2)} w(p^{(2)}) \right) \right]. \quad (69)$$

В результате окончательно получим

$$S_A = \frac{\sqrt{\pi} \gamma S_2}{\Gamma} \left[ w(p^{(2)}) + w(-p^{(2)*}) + \frac{2\gamma}{\sqrt{\pi} k\bar{v}} \left( 1 + i\sqrt{\pi} p^{(2)} w(p^{(2)}) \right) \right], \quad (70)$$

где  $S_2 = |d_{eg} E_2 / \hbar \gamma|^2$  — параметр насыщения по амплитуде второго поля, а  $p^{(2)}$  определяются из (67). Отметим, что для типичных экспериментальных условий выражение (70) можно еще несколько упростить, отбросив третье слагаемое в квадратных скобках, так как обычно  $\gamma \ll k\bar{v}$ .

Как видно из (70), первая нелинейная поправка  $\tilde{A}$  в (53), также как и  $\mathcal{D}$  (см. (66)), имеет частотную зависимость в виде суперпозиции доплеровских контуров с характерной шириной  $k\bar{v}$  и никак не связана с наличием другого поля. Учитывая подобную поправку в задаче о распространении эллиптически поляризованного светового пучка в газе резонансных атомов, можно исследовать некоторые поляризационные эффекты, связанные с самодействием поля: самовращение эллипса поляризации и изменение его параметра эллиптичности  $\varepsilon$ .

Оставшиеся две поправки  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  в (53) содержат информацию о нелинейном взаимодействии полей и обуславливают появление в спектроскопическом сигнале узких субдоплеровских резонансов.

#### 4.2.1. Нелинейная спектроскопия в однонаправленных световых пучках

В этом случае будем полагать  $k_1 = k_2 = k$ , поскольку, даже если частоты полей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  различаются на величину частоты сверхтонкого расщепления в основном состоянии, для большинства элементов при типичных условиях экспериментов выполняется условие  $|k_1 - k_2|\bar{v} \ll 1/\bar{\tau}$  и различие величин

волновых векторов на результат практически не сказывается.

Для определения нелинейной поправки  $\tilde{B}$  проведем преобразование

$$\frac{1}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(1)}} = \frac{1}{\gamma + i\Delta_{12}} \times \left[ \frac{i}{\Delta_{12}} \frac{1}{L_{eg}^{(2)}} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{L_{eg}^{(1)*}} \right] - \frac{i}{\gamma \Delta_{12}} \frac{1}{L_{eg}^{(1)}}. \quad (71)$$

Тогда с учетом (71), (65), (30) и (28) можно записать

$$\left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(1)}} \right\rangle_v = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma + i\Delta_{12}} \times \left[ \frac{i}{\Delta_{12}} \left( w(p^{(2)}) - w(p^{(1)}) \right) + \frac{1}{\gamma} \left( w(p^{(1)}) + w(-p^{(1)*}) \right) \right]. \quad (72)$$

Итоговое выражение для поправки  $\tilde{B}$  находим из (62):

$$S_B = \frac{\sqrt{\pi}\gamma S_1}{\Gamma(1 + i\Delta_{12}/\gamma)} \left[ \frac{i}{\Delta_{12}/\gamma} \left( w(p^{(2)}) - w(p^{(1)}) \right) + \left( w(p^{(1)}) + w(-p^{(1)*}) \right) \right], \quad (73)$$

где  $S_1 = |d_{eg} E_1 / \hbar \gamma|^2$  — параметр насыщения по амплитуде первого поля.

Из формулы (73) видно, что поправка  $\tilde{B}$  описывает субдоплеровские резонансы с шириной порядка  $2\gamma$ . При этом резонансная структура проявляется в зависимости от разности частот

$$\Delta_{12} = \omega_1 - \omega_2.$$

Для вычисления нелинейной интерференционной поправки  $\tilde{C}$  также сначала проведем преобразование:

$$\frac{1}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(2)}} = \frac{1}{(\gamma + i\Delta_{12})^2} \times \left[ \frac{1}{L_{eg}^{(2)}} + \frac{1}{L_{eg}^{(1)*}} + (\gamma + i\Delta_{12}) \frac{1}{(L_{eg}^{(2)})^2} \right]. \quad (74)$$

Выполним усреднение выражения (74), используя (65), (30) и (28):

$$\left\langle \frac{k\bar{v} \mathcal{F}(v)}{L_{eg}^{(2)} L_{eg}^{(1)*} L_{eg}^{(2)}} \right\rangle_v = \frac{\sqrt{\pi}}{(\gamma + i\Delta_{12})^2} \times \left[ w(p^{(2)}) + w(-p^{(1)*}) + \frac{2(\gamma + i\Delta_{12})}{\sqrt{\pi} k\bar{v}} \times \left( 1 + i\sqrt{\pi} p^{(2)} w(p^{(2)}) \right) \right]. \quad (75)$$

Тогда в соответствии с (75) из (63) получим

$$S_C = \frac{\sqrt{\pi}\gamma S_1}{\Gamma(1 + i\Delta_{12}/\gamma)(1 + i\Delta_{12}/\gamma)^2} \times \left[ w(p^{(2)}) + w(-p^{(1)*}) + \frac{2\gamma(1 + i\Delta_{12}/\gamma)}{\sqrt{\pi} k\bar{v}} \times \left( 1 + i\sqrt{\pi} p^{(2)} w(p^{(2)}) \right) \right]. \quad (76)$$

Для нашей постановки задачи выполняется условие  $\Gamma \ll \gamma$ , поэтому выражение (76) описывает сверхузкие резонансы с пролетной шириной  $\Gamma$ . Эти резонансы возникают только вблизи двухфотонного резонанса  $\Delta_{12} = 0$ . Таким образом, мы определили вид нелинейных поправок  $\tilde{B}$  (59) и  $\tilde{C}$  (60), которые в сочетании с формулами (54), (55) позволяют вычислить спектроскопический сигнал (53) в случае двух однонаправленных световых пучков с произвольными эллиптическими поляризациями.

### 4.3. Анализ влияния спонтанного переноса анизотропии на нелинейный спектроскопический сигнал

Выше мы определили аналитические выражения для нелинейных спектроскопических сигналов. Кроме возможности детального сравнения с экспериментами, это позволяет исследовать некоторые принципиальные особенности, обусловленные зеемановской вырожденностью энергетических уровней. Так, например, из выражения для члена прихода в уравнении (7) для матрицы плотности следует, что в процессе спонтанной релаксации атома имеет место перенос низкочастотной зеемановской когерентности (анизотропии) из возбужденного состояния в основное. В данном разделе показано, что этот эффект играет значительную роль при формировании нелинейных резонансов.

Прежде всего отметим, что спонтанный перенос анизотропии в  $\kappa q$ -представлении находит отражение в члене прихода (23) для мультипольных моментов ранга  $\kappa \geq 1$ . Влияние этого члена на спектроскопический сигнал видно из выражения (38) для коэффициентов  $A^{(\kappa)}$  и описывается вторым слагаемым в квадратных скобках, в то время как вклад от светоиндуцированных переходов описывается первым слагаемым. Таким образом, величина и знак второго слагаемого может существенно влиять на величину и знак коэффициентов  $A^{(\kappa)}$ , что, в свою очередь, может значительным образом отразиться на форме нелинейного спектроскопического сигнала.

Особенно наглядный пример принципиальной

роли спонтанного переноса зеемановской когерентности можно получить из рассмотрения замкнутого оптического перехода  $F_g \rightarrow F_e$  в поле двух однонаправленных лазерных пучков. В этом случае нелинейные поправки  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  определяются из (59) и (60), где  $A^{(\kappa)}$  имеют вид

$$A^{(\kappa)} = \frac{1}{2F_g + 1} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{array} \right\} \times \\ \times \left[ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \kappa \\ F_g & F_g & F_e \end{array} \right\} + (2F_e + 1)(-1)^{F_g + F_e} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \begin{array}{ccc} F_e & F_e & \kappa \\ F_g & F_g & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \kappa \\ F_e & F_e & F_g \end{array} \right\} \right]. \quad (77)$$

Подставляя в это выражение значение  $\kappa = 0$ , получаем  $A^{(0)} = 0$ , что является очевидным следствием замкнутости перехода  $F_g \rightarrow F_e$ , когда в процессе взаимодействия атома с полем не происходит перераспределения населенности на другие энергетические уровни. В то же время явные арифметические выражения для коэффициентов  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  зависят от типа переходов:

переходы  $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$

$$A^{(1)} = \frac{F+1}{6F^2(2F+1)^2}, \quad A^{(2)} = \frac{(F+1)(2F+3)}{10F^2(2F+1)^3}; \quad (78)$$

переходы  $F_g = F \rightarrow F_e = F$

$$A^{(1)} = \frac{2F^2 + 2F - 1}{6F^2(F+1)^2(2F+1)^2}, \quad (79) \\ A^{(2)} = \frac{(2F-1)(2F+3)}{10F^2(F+1)^2(2F+1)^2};$$

переходы  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$

$$A^{(1)} = -\frac{F}{6(F+1)^2(2F+1)^2}, \quad (80) \\ A^{(2)} = -\frac{F(2F-1)}{10(F+1)^2(2F+1)^3}.$$

Как видно, имеется следующая закономерность: для переходов  $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$  и  $F_g = F \rightarrow F_e = F$  имеем  $A^{(1,2)} \geq 0$ , а для переходов  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$  имеем  $A^{(1,2)} \leq 0$ . С другой стороны, если следить за поведением интерференционной поправки  $\tilde{C}$ , то из (60) видно, что для любых векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  коэффициенты при  $A^{(\kappa)}$  отрицательны. Следовательно, независимо от геометрической конфигурации векторов поляризации взаимодействующих полей (см. рис. 1), из (60), (76) и (78)–(80) вытекает,

что нелинейные интерференционные эффекты приводят вблизи  $\Delta = 0$

а) для переходов  $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$  и  $F_g = F \rightarrow F_e = F$  к появлению сверхузкого (с шириной приблизительно  $1/\bar{\tau}$ ) провала в линии поглощения (т. е. имеет место так называемая светоиндуцированная прозрачность (в английской аббревиатуре EIT) (см., например, [8]), обусловленная нелинейными интерференционными эффектами);

б) для переходов  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$  к появлению сверхузкого пика в поглощении (т. е. имеет место светоиндуцированная абсорбция (в английской аббревиатуре EIA), которая наблюдалась в экспериментах [11] именно на замкнутом переходе  $F_g = 3 \rightarrow F_e = 4$ , входящем в структуру  $D_2$ -линии  $^{85}\text{Rb}$ ).

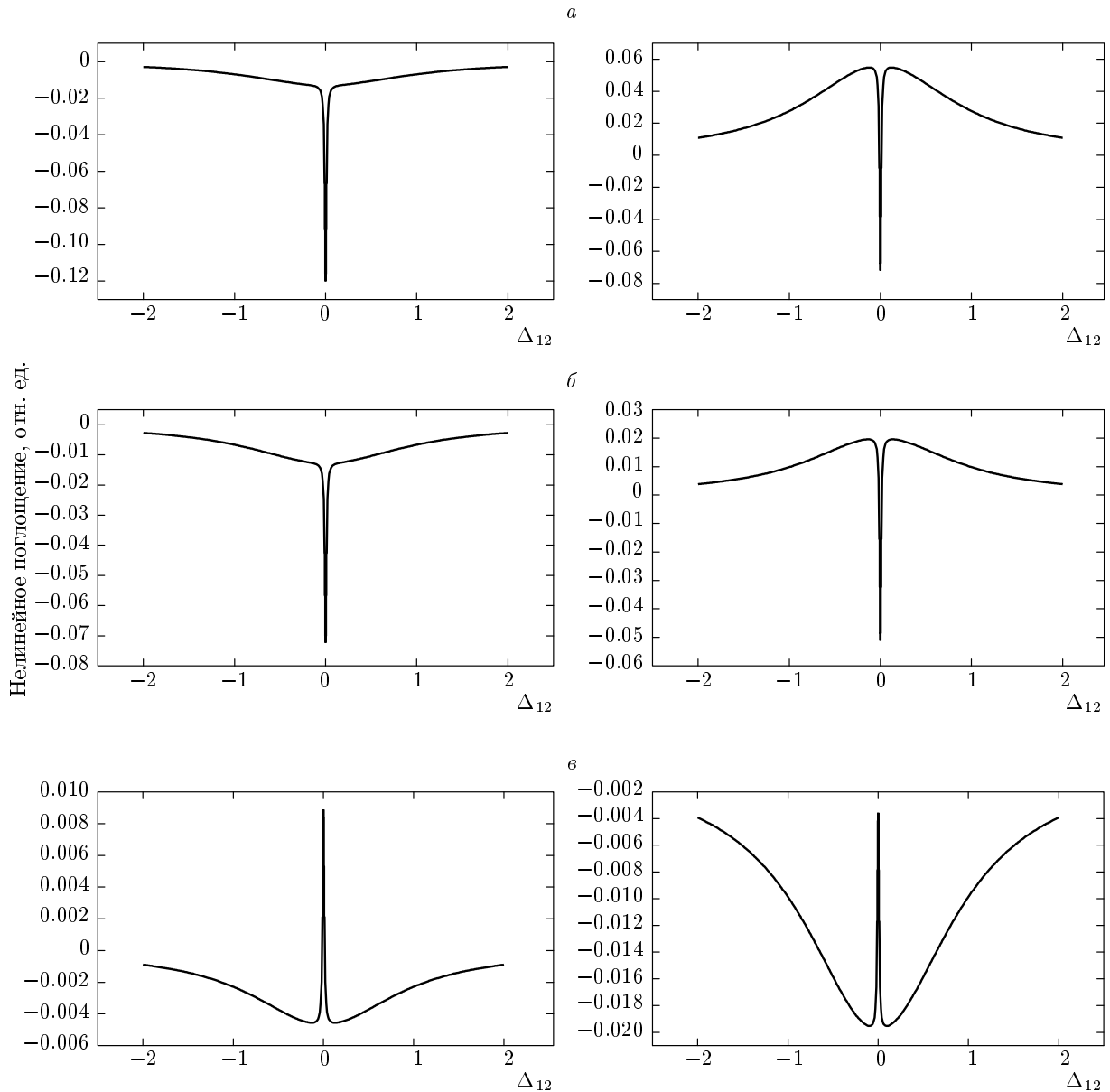
В том, что такая классификация замкнутых переходов происходит именно из-за спонтанной релаксации, нетрудно убедиться, приравнявая к нулю в формуле (77) второе слагаемое в квадратных скобках. В результате для любых переходов  $F_g \rightarrow F_e$  будем иметь  $A^{(1,2)} \geq 0$ , т. е. светоиндуцированную прозрачность.

Отметим, что, как видно из формул (59), (64), знак коэффициентов при  $A^{(\kappa)}$  зависит от векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Следовательно, в отличие от сверхузкого пика, направление резонансного контура шириной  $2\gamma$  может меняться в зависимости от геометрической конфигурации векторов поляризации.

На рис. 2 приведен пример зависимости нелинейного вклада в поглощение по отношению к линейному поглощению ( $\sim \text{Re}[\tilde{B} + \tilde{C}] / \text{Re}[D]$ ) в относительных единицах от отстройки  $\Delta_{12}$ , выраженной в единицах  $\gamma$ , для различных типов переходов в случае двух вариантов поляризации:  $\sigma_+ - \sigma_-$ -поля, образованного двумя однонаправленными волнами, имеющими противоположные круговые поляризации ( $\varepsilon_1 = \pi/4$ ,  $\varepsilon_2 = -\pi/4$ ), и варианта с  $\varepsilon_1 = \pi/8$ ,  $\varepsilon_2 = -\pi/8$ ,  $\varphi = 0$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко отметим основные результаты проведенной теоретической работы. Рассмотрена нелинейная спектроскопия атомарного газа в поле однонаправленных световых волн с различающимися частотами. Исследуемым сигналом послужила интенсивность одной из составляющих поля (пробного пучка) на выходе из кюветы в зависимости от ее частоты. При этом был рассмотрен дипольный циклический переход  $F_g = F \rightarrow F_e = F$ ,  $F \pm 1$  с произвольными значениями полных угловых момен-



**Рис. 2.** Внутридоплеровские резонансы нелинейного поглощения для различных переходов  $F_g \rightarrow F_e$ :  $F_g = 2 \rightarrow F_e = 1$  (а),  $F_g = 2 \rightarrow F_e = 2$  (б),  $F_g = 2 \rightarrow F_e = 3$  (в). Справа — при  $\varepsilon_1 = \pi/4, \varepsilon_2 = -\pi/4, \varphi = 0$ , слева — при  $\varepsilon_1 = \pi/8, \varepsilon_2 = -\pi/8, \varphi = 0$

тов  $F$ . Поляризации световых волн также предполагались в общем случае эллиптическими. Релаксационные процессы в атомной системе, связанные со спонтанным излучением и конечным временем взаимодействия атомов с полем (из-за ограниченности светового пучка), учитывались с помощью соответствующих констант (модель констант релаксации). Аналитическое выражение для спектроскопического сигнала получено в достаточно общей постановке.

Поляризация атомной среды была рассчитана с помощью теории возмущений в пролетном режиме взаимодействия атомов с полем, который часто имеет место в экспериментах при использовании узких световых пучков. Этот режим предполагает выполнение двух основных условий:  $\gamma\tau \gg 1$  и  $\gamma\tau S \ll 1$ , где  $\tau$  — время пролета атома через область светового поля,  $S$  — параметр насыщения в точном резонансе,  $\gamma$  — константа спонтанной релаксации. По-

ляризация среды рассчитана с точностью до членов третьего порядка по полю ( $E^3$ ), при этом само выражение записано в инвариантном виде.

Из полученного аналитического выражения для спектроскопического сигнала отчетливо выделяются линейные и нелинейные вклады по интенсивности пробного поля. Последние также можно разделить на слагаемое, связанное с самодействием пробного поля, слагаемое, возникающее в результате оптической накачки среды второй волной, а также член, описывающий нелинейные интерференционные эффекты. Именно последнее слагаемое представляет для нас наибольший интерес, поскольку оно ответственно за образование сверхузких резонансов ЭИП и ЭИА в спектроскопическом сигнале. Более того, в каждом из указанных вкладов в спектроскопический сигнал, связанных с линейными и нелинейными эффектами, оказалось возможным выделить слагаемые, описывающие частотную зависимость, и слагаемые, связанные только с параметрами поляризации световых волн (эллиптичностью и углом между эллипсами поляризации). Это позволило провести общий геометрический анализ спектроскопического сигнала, который привел к важному результату. А именно, было показано, что знак спектральных структур (пик или провал), имеющих ширину порядка естественной ширины линии ( $\gamma$ ), зависит от параметров поляризации волн, тогда как знак сверхузкого резонанса (ЭИП или ЭИА) не зависит от параметров поляризации.

Особое внимание также было уделено теоретическому анализу влияния процесса спонтанного переноса анизотропии из возбужденного состояния в основное на знак сверхузкого резонанса. В частности, было показано, что вклад в спектроскопический сигнал от слагаемого, связанного со спонтанным переносом анизотропии, существенным образом зависит от типа атомного перехода и определяет знак сверхузкого резонанса. Это позволило теоретически обосновать сложившуюся ранее классификацию атомных переходов по типу сверхузкого резонанса (ЭИП или ЭИА), которая была обоснована, главным образом, лишь исходя из большого количества накопленных экспериментальных данных и большого количества численных расчетов для частных значений угловых моментов атомных переходов ( $F_g$  и  $F_e$ ) и/или частных случаев поляризаций волн (линейных, циркулярных). Таким образом, циклические дипольные атомные переходы можно разбить на следующие классы: 1) «темные» переходы  $F_g = F \rightarrow F_e = F - 1$  и  $F_g = F \rightarrow F_e = F$ , для которых возможно наблюдение резонансов ЭИП и

2) «яркие» переходы  $F_g = F \rightarrow F_e = F + 1$ , для которых возможно наблюдение резонансов яркого типа — ЭИА.

Работа проведена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание № 2014/139, проект № 825), Президиума СО РАН, РФФИ (гранты №№ 15-02-08377, 15-32-20330, 14-02-00712, 14-02-00939) и грантов Президента РФ (МК-4680.2014.2 и НШ-4096.2014.2).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Алгебра вигнеровских операторов

Приведем для справки некоторые соотношения из алгебры вигнеровских операторов, которые следуют из правил для сумм произведений соответствующего числа  $3jm$ -символов [81]:

$$\text{Tr}\{\hat{T}_{\kappa q}^{aa}\} = \sqrt{2F_a + 1} \delta_{\kappa 0} \delta_{q 0}, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Tr}\{\hat{T}_{\kappa_1 q_1}^{ab} \hat{T}_{\kappa_2 q_2}^{ba}\} = (-1)^{q_1 - F_a + F_b} \delta_{\kappa_1 \kappa_2} \delta_{q_1 - q_2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{T}_{\kappa_1 q_1}^{ab} \hat{T}_{\kappa_2 q_2}^{bc} \hat{T}_{\kappa_3 q_3}^{ca}\} &= (-1)^{2(F_a + F_b + F_c)} \times \\ &\times \sqrt{(2\kappa_1 + 1)(2\kappa_2 + 1)(2\kappa_3 + 1)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \\ F_c & F_a & F_b \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Так, из последней формулы для произведения трех вигнеровских операторов можно вывести выражение для  $\kappa q$ -представления произведения двух произвольных операторов  $\hat{P}^{ab} \hat{Q}^{bc}$ , определенных на зеемановских подпространствах, через неприводимые представления ( $P_{\kappa q}^{ab}$  и  $Q_{\kappa q}^{bc}$ ) сомножителей:

$$\begin{aligned} \{\hat{P}^{ab} \hat{Q}^{bc}\}_{\kappa q} &= \sum_{\kappa_1, \kappa_2} (-1)^{-F_a + 2F_b + F_c - \kappa_1 + \kappa_2} \times \\ &\times \Pi_{\kappa_1 \kappa_2} \left\{ \begin{matrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa \\ F_c & F_a & F_b \end{matrix} \right\} \{P_{\kappa_1}^{ab} \otimes Q_{\kappa_2}^{bc}\}_{\kappa q}, \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

где  $\{\dots \otimes \dots\}_{\kappa q}$  — стандартное обозначение тензорного произведения [81]; а символ  $\Pi_{p\dots r}$  определяется как

$$\Pi_{p\dots r} = \sqrt{(2p + 1) \dots (2r + 1)}.$$

В частности, из (A.3) находим

$$\text{Tr}\{\hat{P}^{ab} \hat{Q}^{ba}\} = (-1)^{F_b - F_a} \sum_{\kappa} (P_{\kappa}^{ab} \cdot Q_{\kappa}^{ba}). \quad (\text{A.4})$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай только целочисленных значений  $\{\kappa\}$ , когда формулу (A.3) можно переписать в виде



$$\begin{aligned} \{\widehat{P}^{ab}\widehat{Q}^{bc}\}_{\kappa q} &= \sum_{\kappa_1, \kappa_2} (-1)^{F_a+F_c+\kappa_1+\kappa_2} \Pi_{\kappa_1\kappa_2} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa \\ F_c & F_a & F_b \end{Bmatrix} \{P_{\kappa_1}^{ab} \otimes Q_{\kappa_2}^{bc}\}_{\kappa q} = \\ &= \sum_{\kappa_1, \kappa_2} (-1)^{F_a+F_c+\kappa} \Pi_{\kappa_1\kappa_2} \begin{Bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa \\ F_a & F_c & F_b \end{Bmatrix} \times \\ &\times \{Q_{\kappa_1}^{bc} \otimes P_{\kappa_2}^{ab}\}_{\kappa q}. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. G. Rautian and A. M. Shalagin, *Kinetic Problems of Nonlinear Spectroscopy*, North-Holland, Amsterdam–Oxford (1991).
2. G. Alzetta et al., *Nuovo Cim. B* **36**(1), 5 (1976).
3. E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cim.* **17**(10), 333 (1976).
4. H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud, Jr., *Opt. Lett.* **3**, 218 (1978).
5. E. Arimondo, *Progress in Optics* **35**, 257 (1996).
6. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, *УФН* **163**, 1 (1993).
7. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *ЖЭТФ* **96**, 1613 (1989).
8. K. J. Boller, A. Imamoglu, and S. E. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2593 (1991).
9. M. Fleischhauer, A. Imamoglu, and J. P. Marangos, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 633 (2005).
10. D. Budker, D. J. Orlando, and V. Yashchuk, *Amer. J. Phys.* **67**, 584 (1999).
11. A. M. Akulshin, S. Barreiro, and A. Lezama, *Phys. Rev. A* **57**, 2996 (1998).
12. A. Lezama, S. Barreiro, and A. M. Akulshin, *Phys. Rev. A* **59**, 4732 (1999).
13. Y. Dancheva et al., *Opt. Comm.* **178**, 103 (2000).
14. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 776 (1999).
15. А. В. Таichenachev, А. М. Тумаикин, and В. И. Юдин, *Phys. Rev. A* **61**, 011802 (1999).
16. C. Goren, A. D. Wilson-Gordon, M. Rosenbluh, and H. Friedmann, *Phys. Rev. A* **67**, 033807 (2003).
17. H. Failache et al., *Phys. Rev. A* **67**, 043810 (2003).
18. D. V. Brazhnikov et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **22**, 57 (2005).
19. J. Vanier, A. Godone, and F. Levi, *Phys. Rev. A* **58**, 2345 (1998).
20. R. Wynands and A. Nagel, *Appl. Phys. B* **68**, 1 (1999).
21. M. Erhard and H. Helm, *Phys. Rev. A* **63**, 043813 (2001).
22. M. Merimaa, Th. Lindvall, I. Tittonen, and E. Ikonen, *J. Opt. Soc. Amer. B* **20**, 273 (2003).
23. M. V. Balabas, T. Karaulanov, M. P. Ledbetter, and D. Budker, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070801 (2010).
24. H. J. Lee and H. S. Moon, *J. Opt. Soc. Amer. B* **30**, 2301 (2013).
25. D. V. Brazhnikov, А. В. Таichenachev, А. М. Тумаикин, and В. И. Юдин, *Las. Phys. Lett.* **11**, 125702 (2014).
26. M. O. Scully, S. Y. Zhu, and A. Gavrielides, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2813 (1989).
27. О. А. Коcharovskaya, F. Mauri, and E. Arimondo, *Opt. Comm.* **84**, 393 (1991).
28. A. S. Zibrov, M. D. Lukin, D. E. Nikonov, L. Hollberg, M. O. Scully, V. L. Velichansky, and H. G. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1499 (1995).
29. H. Wang, D. J. Goorskey, W. H. Burkett, and M. Xiao, *Opt. Lett.* **25**, 1732 (2000).
30. H. S. Moon, L. Lee, K. Kim, and J. B. Kim, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 3001 (2004).
31. P. R. Hemmer, D. P. Katz, J. Donoghue, M. Cronin-Golomb, M. S. Shahriar, and P. Kumar, *Opt. Lett.* **20**, 982 (1995).
32. В. Г. Архипкин, С. А. Мысливец, *КЭ* **22**, 933 (1995).
33. В. Г. Архипкин, Д. В. Манушкин, С. А. Мысливец, А. К. Попов, *КЭ* **25**, 655 (1998).
34. А. М. Акульшин, С. В. Баррейро, А. Лезама, *КЭ* **30**, 189 (2000).
35. А. М. Akulshin and R. J. McLean, *Phys. Rev. A* **85**, 065802 (2012).
36. Р. А. Ахмеджанов, И. В. Зеленский, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 493 (2002) [R. A. Akhmedzhanov and I. V. Zelensky, *JETP Lett.* **76**, 419 (2002)].
37. S. Pradhan, R. Behera, and A. K. Das, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 173502 (2012).
38. K. Dahl, L. S. Molella, R. H. Rinkleff, and K. Danzmann, *Opt. Lett.* **33**, 983 (2008).

39. L. V. Hau et al., *Nature* **397**, 594 (1999).
40. M. M. Kash et al., *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5229 (1999).
41. В. Г. Архипкин, И. В. Тимофеев, КЭ **30**, 180 (2000) [V. G. Arkhipkin and I. V. Timofeev, *Quant. Electron.* **30**, 180 (2000)].
42. D. Bortman-Arbiv, A. D. Wilson-Gordon, and H. Friedmann, *Phys. Rev. A* **63**, 043818 (2001).
43. А. М. Акульшин, А. Чиммино, Дж. И. Опат, КЭ **32**, 567 (2002) [A. M. Akulshin, A. Cimmino, and G. I. Opat, *Quant. Electron.* **32**, 567 (2002)].
44. A. M. Akulshin, A. Cimmino, A. I. Sidorov, P. Hannaford, and G. I. Opat, *Phys. Rev. A* **67**, 011801(R) (2003).
45. E. E. Mikhailov, V. A. Sautenkov, I. Novikova, and G. R. Welch, *Phys. Rev. A* **69**, 063808 (2004).
46. M. Fleischhauer and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5094 (2000).
47. C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau, *Nature (London)* **409**, 490 (2001).
48. J. B. Khurgin, *J. Opt. Soc. Amer. B* **22**, 1062 (2005).
49. A. Vudayagiri, *Pramana* **77**, 1127 (2011).
50. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
51. M. Kasevich and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).
52. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Письма в ЖЭТФ **65**, 744 (1997).
53. C. F. Roos et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5547 (2000).
54. A. Lipsich, S. Barreiro, P. Valente, and A. Lezama, *Opt. Comm.* **190**, 185 (2001).
55. J. Vanier, *Appl. Phys. B* **81**, 421 (2005).
56. V. Gerginov, S. Knappe, V. Shah, P. D. D. Schwindt, L. Hollberg, and J. Kitching, *J. Opt. Soc. Amer. B* **23**, 593 (2006).
57. А. В. Тайченачев, В. И. Юдин, В. Л. Величанский, and С. А. Зибров, ЖЭТФ **82**, 398 (2005).
58. S. A. Zibrov et al., *Phys. Rev. A* **81**, 013833 (2010).
59. M. Stähler et al., *Europhys. Lett.* **53**, 323 (2001).
60. P. D. D. Schwindt et al., *Appl. Phys. Lett.* **85**, 6409 (2004).
61. K. Cox et al., *Phys. Rev. A* **83**, 015801 (2011).
62. C. Y. Ye and A. S. Zibrov, *Phys. Rev. A* **65**, 023806 (2002).
63. А. С. Зибров, А. Б. Мацко, Письма в ЖЭТФ **82**, 529 (2005).
64. Д. В. Бражников и др., Письма в ЖЭТФ **83**, 71 (2006).
65. J. Fuchs et al., *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **40**, 1117 (2007).
66. M. M. Mijailović et al., *Opt. Express* **15**(3), 1328 (2007).
67. J. Dimitrijević, D. Arsenović, and B. M. Jelenković, *Phys. Rev. A* **76**, 013836 (2007).
68. M. Auzinsh et al., *Phys. Rev. A* **78**, 013417 (2008).
69. J. Dimitrijević, *Opt. Express* **16**, 1343 (2008).
70. A. Vilardi et al., *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **42**, 055003 (2009).
71. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Письма в ЖЭТФ **72**, 173 (2000).
72. A. Javan et al., *Phys. Rev. A* **66**, 013805 (2002).
73. C. Goren, A. D. Wilson-Gordon, M. Rosenbluh, and H. Friedmann, *Phys. Rev. A* **69**, 053818 (2004).
74. C. Y. Ye, A. S. Zibrov, Yu. V. Rostovtsev, and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* **65**, 043805 (2002).
75. Д. В. Бражников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, Опт. и спектр. **107**, 119 (2009).
76. F. Renzoni, C. Zimmermann, P. Verkerk, and E. Arimondo, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **3**, S7 (2001).
77. G. Théobald, N. Dimarco, V. Giordano, and P. Cerez, *Opt. Comm.* **71**, 256 (1989).
78. E. Breschi and A. Weis, *Phys. Rev. A* **86**, 053427 (2012).
79. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **47**, 1484 (1964).
80. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, ЖЭТФ **50**, 448 (1966).
81. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград (1975).
82. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).
83. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1974).