

ВЛИЯНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА КОЛЛАПС КОЛЬЦЕВЫХ ВИХРЕЙ В АККРЕЦИОННОМ ПОТОКЕ

Е. Ю. Банникова^{a,b}, В. М. Конторович^{a,b}, С. А. Пославский^b*

^a*Радиоастрономический институт Национальной академии наук Украины
61002, Харьков, Украина*

^b*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61022, Харьков, Украина*

Поступила в редакцию 8 апреля 2014 г.

Орбитальное движение вдоль направляющей кольцевых вихрей (закрутка вихря), регулируемое спиральностью, может оказывать существенное влияние на коллапс вихря и его движение в сходящемся (аккреционном) потоке. Получены решения как для одиночного, так и для дипольного тороидального вихря в гамильтоновом представлении. Рассмотренное явление может иметь приложения в астрофизике активных ядер галактик и динамике атмосферных вихрей.

DOI: 10.7868/S0044451014090272

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время вновь возрос интерес к кольцевым вихрям, в том числе к их поведению в различных течениях (см. юбилейный выпуск журнала [1], посвященный 150-летию работы Гельмгольца [2], и приведенную там библиографию, а также обзоры и статьи [3–11]).

В данной работе мы рассматриваем влияние орбитального движения на движение вихрей в аккреционных потоках. Подобные условия реализуются, в частности, в атмосферах планет, молодых звездных системах и в активных ядрах галактик. Наличие закрутки (и связанного с ней дополнительного топологического интеграла движения [12]), как мы покажем, приводит к нетривиальной, но физически прозрачной динамике вихрей, что может оказаться полезным при исследовании атмосферных вихрей [13]. В свою очередь, это может прояснить наличие наблюдаемых возвратных движений в джетах активных ядер галактик. Вместе с тем наличие дополнительных интегралов движения должно способствовать устойчивости вихрей.

В отсутствие потока движение кольца происходит равномерно и прямолинейно вдоль его оси симметрии [14]. Учет радиального потока, т. е. наличие

источника или стока, существенного как в астрофизических, так и в геофизических приложениях, приводит к существенным различиям [15, 16]: в расходящемся потоке радиус кольца увеличивается и скорость движения замедляется, а в сходящемся потоке ситуация меняется на противоположную — уменьшение радиуса кольца приводит к увеличению его скорости.

В данной работе учитывается движение вдоль образующей кольцевого вихря (закрутка вихря), имитирующее орбитальное движение. Дополнительный интеграл движения по отношению к циркуляции Γ по малой окружности, вносимый закруткой, естественно выразить через циркуляцию скорости по большой окружности тора $\Gamma_1 = 2\pi Rv_\varphi$, где v_φ — орбитальная скорость. Соответствующее слагаемое в энергии $v_\varphi^2/2$, как известно [12], влияет на скорость движения кольцевого вихря вдоль его оси симметрии, причем знак противоположен знаку индуцированной скорости. Физика такого влияния может быть понята из следующих соображений. Орбитальное движение порождает центробежные силы в вихревом кольце, которые направлены ортогонально его завихренности. В этом случае возникает аналог подъемной силы Кутта–Жуковского, ортогональной обоим указанным векторам (см. [12]).

Так же как и в [16], задача допускает гамильтонову формулировку (см. обзоры [4, 17]), и в рамках представления о тонких тороидальных вихрях [2]

*E-mail: vkont@rian.kharkov.ua

имеет точное решение. Существенно, что в сходящемся потоке, в котором большой радиус тора монотонно уменьшается под воздействием потока, роль орбитального слагаемого по мере приближения к стоку возрастает и может качественно изменить характер движения. В частности, вихрь может поменять направление движения на обратное — отразиться от стока и уйти на бесконечность.

Отметим, что эффекты сжимаемости становятся существенными при скоростях, приближающихся к скорости звука на малых расстояниях от центра. Мы рассматриваем движения вне этой области.

2. ОДИНОЧНЫЙ ТОРОИДАЛЬНЫЙ ВИХРЬ С ЗАКРУТКОЙ (С ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ)

Рассмотрим движение вихревого кольца с циркуляцией $\Gamma < 0$ в сходящемся радиальном потоке (течение со стоком в начале координат) с функцией тока

$$\psi = \frac{P}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

где $P = \text{const} > 0$ — мощность стока (в случае источника — расходящегося потока — его мощность $Q = -P > 0$). Вдали от стока при положительных z кольцо с $\Gamma < 0$ движется в сторону убывающих значений z . В сходящемся потоке в течение всего времени движения радиус вихревого кольца уменьшается [16]. Уравнение траектории вихревого кольца находим из условия постоянства гамильтониана вдоль траектории $H = \text{const}$.

Собственная скорость кольцевого вихря с закруткой [12] равна

$$V = \dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{e^{1/4} a(R)} - \frac{4\pi^2 v_\varphi^2}{\Gamma^2} \right), \quad (1)$$

где R и $a(R)$ — большой и малый радиусы вихревого кольца, v_φ — орбитальная скорость (черта означает усреднение). Условие сохранения объема кольцевого вихря определяет $a(R)$:

$$Ra^2 = \beta^2 = \text{const}, \quad (2)$$

где величина $\beta = a_0 \sqrt{R_0}$ определяется начальными условиями. Будем считать, что циркуляция (средняя) по направляющей тора (по окружности большого радиуса) также сохраняется:

$$\Gamma_1^2 = (2\pi R)^2 \overline{v_\varphi^2} = \overline{(2\pi R v_\varphi)^2} = \text{const}. \quad (3)$$

Это находится в соответствии с сохранением спиральности $S = \int dV \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2\Gamma\Gamma_1$.

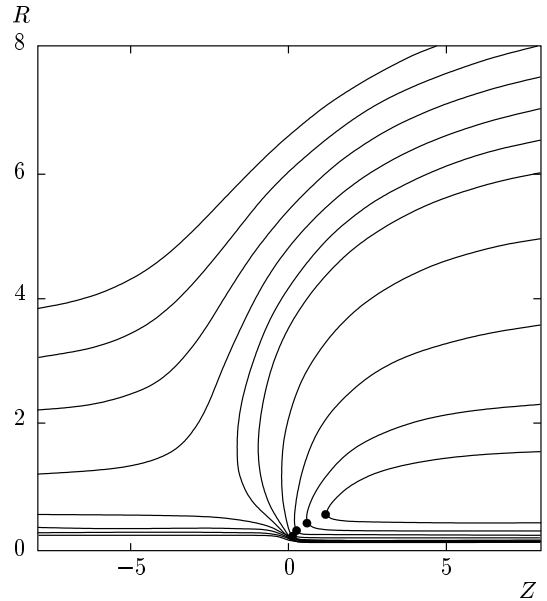


Рис. 1. Траектории одиночного кольцевого вихря с параметрами: $\Gamma = -0.2\pi$, $\beta = 0.1$ и мощностью стока $P = 4\pi$. Показаны траектории движения вихревого кольца, полученные из условия $H = \text{const}$. Видны траектории, на которых вихрь изменяет направление движения («отражается» от стока). Выделены точки поворота. Отметим, что знак циркуляции $\Gamma_1 = 10\sqrt{2}\Gamma$ несуществен, поскольку в выражение (5) входит ее квадрат

Канонические уравнения движения одиночного кольцевого вихря с закруткой в поле точечного стока мощности $P > 0$ в начале координат имеют вид

$$\dot{Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial R}, \quad \dot{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial Z}, \quad (4)$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4} \beta} + \frac{\beta^2 \Gamma_1^2}{8\pi \Gamma R^2} + \frac{PZ}{4\pi \sqrt{R^2 + Z^2}}, \quad (5)$$

подставляя которую в выражение (4), получаем систему уравнений движения одиночного кольцевого вихря с закруткой в поле точечного стока:

$$\begin{aligned} \dot{Z} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4} \beta} - \frac{\beta^2}{R^3} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 \right] - \\ - \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \quad (6) \\ \dot{R} = -\frac{P}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Влияние закрутки в сходящемся потоке приводит к тому, что направление движения центра кольца

может меняться на противоположное (рис. 1). Действительно, при движении вихревого кольца в аккреционном (сходящемся) потоке радиус кольца уменьшается и, соответственно, возрастает роль закрутки. Формально это видно из (6). Физически это легко понять, так как возрастание центробежной силы, порождаемой орбитальным движением, которая ортогональна завихренности, при увеличении кривизны кольца приводит к изменению скорости кольца за счет «подъемной силы» Кутта – Жуковского [12]. Ее вклад может привести к изменению направления движения кольца.

Будем считать, что в выражении для скорости \dot{Z} инерционное слагаемое много меньше слагаемого, описывающего вклад закрутки:

$$\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4}\beta} \ll \frac{\beta^2}{R^3} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2. \quad (7)$$

Тогда координаты точек поворота $\dot{Z} = 0$ определяются из уравнения

$$\frac{\Gamma\beta^2}{R^4} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 = -\frac{PZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Пусть вихрь движется в отрицательном направлении оси z , что соответствует $\Gamma < 0$. Если ввести обозначение

$$\alpha^3 = \frac{\beta^2\Gamma_1^2}{Q\Gamma} > 0 \quad (9)$$

для комбинации параметров, то уравнение (8) для точек поворота приводится к виду

$$x(y - \alpha^2) = \alpha^2, \quad (10)$$

где

$$x = \left(\frac{R}{Z} \right)^2, \quad y = (RZ)^{2/3}. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) представляет собой гиперболу $x = \alpha^2/(y - \alpha^2)$, рис. 2. Нетрудно найти асимптотики решения уравнения для точек поворота в интересующих нас координатах R и Z . При $y \rightarrow \alpha^2, x \rightarrow \infty$ — это гипербола $R = \alpha^3/Z$, а при $y \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$ — это корневая зависимость $R = \alpha^{3/4}\sqrt{Z}$. Минимальное значение соответствует $R_{min} \approx \alpha^{3/2}$ (рис. 3). Рассмотрение справедливо, если выполняется дополнительное условие тонкого кольца. При $\beta^2 \ll \alpha^{9/2}$ это условие выполняется вплоть до значения R_{min} . Одновременно должно выполняться условие преобладания закрутки (7). Численное решение для точек поворота приведено на рис. 3.

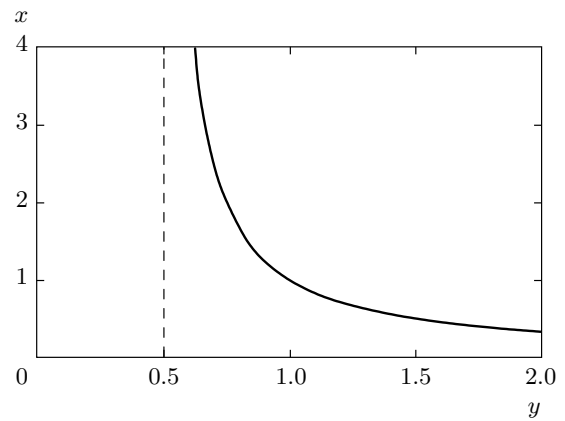


Рис. 2. Решение уравнения для точек поворота кольцевого вихря в аккреционном потоке при наличии орбитального движения в переменных (11). Штрихами показана асимптота $y = \alpha^2 = 0.5$ гиперболы

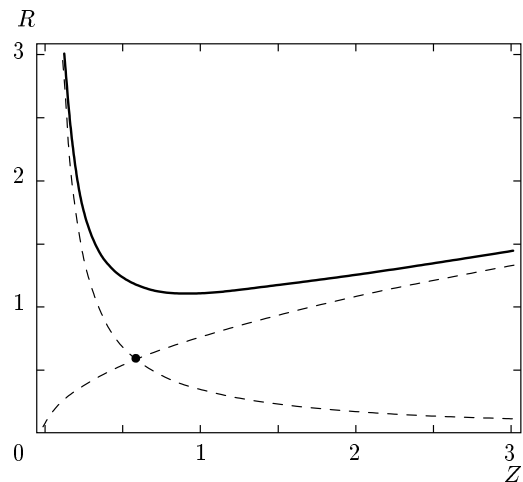


Рис. 3. Линия точек поворота одиночного вихря, соответствующая его отражению, как функция расстояния вихря от стока, находящегося в начале координат. Минимум достигается при $R_{min} \approx \alpha^{3/2}$. При меньших радиусах отражение от стока отсутствует. Точке на графике соответствуют координаты $(\alpha^{3/2}, \alpha^{3/2})$

На рис. 4 показана схема динамики кольцевого вихря с закруткой, который движется к стоку. При $\Gamma < 0$ вихрь движется справа налево вдоль оси z (левое кольцо). Сжатие по большому радиусу аккреционным потоком усиливает роль орбитального вращения, что меняет направление движения кольца на обратное (правое кольцо). Соответствующие траектории показаны на рис. 1. Выделенные точки пово-

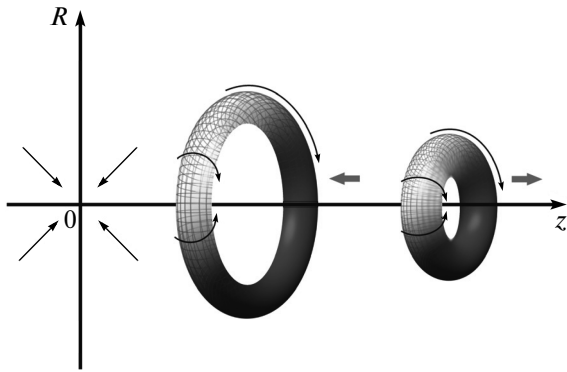


Рис. 4. Схема отражения одиночного кольцевого вихря с закруткой в фоновом радиальном потоке от стока, центр которого находится в начале координат

рота на траекториях соответствуют корневой зависимости $R \propto \sqrt{Z}$.

3. ДИПОЛЬНЫЙ ТОРОИДАЛЬНЫЙ ВИХРЬ С ЗАКРУТКОЙ

В связи с астрофизическими приложениями [18, 19] представляет интерес рассмотреть систему из двух зеркально-симметричных кольцевых вихрей (дипольный тороидальный вихрь). В работе [20] исследовалась динамика дипольного тороидального вихря в радиальном потоке в плоском (2D) описании, когда кольцевые вихри моделируются парами точечных вихрей. В отсутствие потока, как давно известно, начиная с работы Грёбли [21], в результате лобового столкновения компоненты пар меняются местами, а новые пары разлетаются под прямым углом к направлению движения с исходными по величине скоростями. Присутствие центрального радиального потока приводит к эффекту либо замедления (расходящийся поток), либо ускорения (сходящийся поток) разлетающихся в противоположные стороны пар [20]. При этом скорость выбрасываемой пары в сходящемся (аккреционном) потоке зависит от отношения мощности потока к интенсивности вихря и может достигать больших значений. В работе [19] было показано, что эффект ускоренного выброса вихревой пары в определенном смысле сохраняется и для более сложного аккреционного течения: произведение скоростей выброшенных пар определяется только монополюсной составляющей потока.

Эти решения могут интерпретироваться как движение и распад на составляющие дипольного тороидального вихря. С этой точки зрения в работах [15, 16] в 2D-описании показано, что дипольный тороидальный вихрь в аккреционном потоке сжимается по большому радиусу и, распадаясь, порождает двусторонний выброс составляющих его кольцевых вихрей по оси симметрии системы. Выброшенные вихри приобретают дополнительную скорость, «черпая энергию» от потока. Существенно, что в определенной области параметров поведение 3D-вихрей существенно отличается от их поведения в плоской 2D-модели [16]. А именно, в мощном сходящемся потоке возникает коллапс с затягиванием вихрей в область стока. При параметрах, близких к условиям коллапса, возможно попятное движение вихрей между точками поворота. Мы рассмотрим эту задачу с учетом закрутки, влияние которой в аккреционном потоке, так же как и для одиночного вихря, существенно.

3.1. Гамильтонова формулировка задачи

Уравнения для большого радиуса $R(t)$ тонкого кольцевого вихря и его положения $Z(t)$ относительно оси симметрии при наличии соосных ему вихрей были получены еще Гельмгольцем [2]. Дайсон [22] показал, что этим уравнениям соответствует интеграл энергии, благодаря чему в последующих работах им была придана гамильтонова форма [4].

При наличии потока уравнения по-прежнему остаются гамильтоновыми. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть уравнения движения (4) в полупространстве для одного кольцевого вихря из пары с функцией Гамильтона

$$H = \frac{\Gamma R}{4\pi} \ln \left(\frac{8R}{e^{7/4} a(R)} \right) - \frac{\Gamma R}{4\pi} C(k) + \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + R^2}} + \frac{\beta^2 \Gamma_1^2}{8\pi \Gamma R^2}. \quad (12)$$

Здесь функция $C(k)$ представляет собой введенную еще Гельмгольцем комбинацию эллиптических интегралов:

$$C(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \quad (13)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода, k — модуль:

$$\begin{aligned}
 K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \\
 E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \\
 k^2 &= \frac{R^2}{R^2 + Z^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Как и в предыдущем разделе, используем эти уравнения с дополнительным условием сохранения объема (2). Мы учли также, что соосные кольцевые вихри имеют в дипольном тороидальном вихре противоположные направления вращения, равные радиусы и противоположные, но равные по модулю циркуляции Γ . Последнее слагаемое в гамильтониане (12) представляет собой вклад орбитального движения (закрутки вихря).

3.2. Влияние закрутки на параметры выброса

Движению вихря по траектории соответствует постоянство функции Гамильтона $H = \text{const}$, которая фиксирует выбранную траекторию. Исходным состоянием будем считать тонкий вихрь с радиусом $R_0 \gg a_0$. Кольцевые вихри при этом находятся друг от друга на малом расстоянии $2Z_0$, удовлетворяющем условию $R_0 \gg Z_0 > a_0$. Этому соответствуют асимптотики эллиптических интегралов в гамильтониане (12) при $k \rightarrow 1$ [23]:

$$K(k \rightarrow 1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2}, \quad E(1) = 1. \tag{15}$$

Конечное состояние системы соответствует выбросу компоненты вихря в положительном направлении оси симметрии z . Таким образом, на больших расстояниях $Z \gg R$ асимптотики интегралов в (12) при $k \rightarrow 0$ имеют вид

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{K(k) - E(k)}{k} \rightarrow k \frac{\pi}{4} \rightarrow 0. \tag{16}$$

Закрутка вносит существенный вклад, влияя на условия коллапса, что видно из приводимых ниже фазовых портретов — траекторий в плоскости $R-Z$. Можно полагать, что в определенной области параметров закрутка влияет на положение точек поворота и сдвигает положение коллапса. Заметим, что в выбросах активных ядер галактик наблюдаются и возвратные движения [24], которые обычно интерпретируются как результат проекции. Мы видим, что при выбросе тороидальных вихрей такие движения могут быть вполне реальными.

Описание возвратного движения в случае дипольного тороидального вихря может быть проведено аналитически. По сравнению с уравнениями движения (6) для одиночного вихря в случае дипольного вихря добавляется слагаемое, описывающее взаимодействие между кольцами. С учетом выражения для гамильтониана (12) дополнительное слагаемое в одном из уравнений движения имеет вид

$$\dot{Z} = \dots - \frac{\Gamma}{4\pi} \left[C(k) + \frac{Rz^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \frac{\partial C(k)}{\partial k} \right]. \tag{17}$$

Производные от эллиптических интегралов можно выразить через сами интегралы (см., например, [25]):

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k}. \tag{18}$$

После ряда несложных преобразований уравнения движения для дипольного тороидального вихря в потоке от стока принимают вид

$$\begin{aligned}
 \dot{Z} &= \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4}\beta} - \frac{\beta^2}{R^3} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2 \right] + \\
 &+ \frac{\Gamma k}{4\pi R} [E(k) - K(k)] - \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}, \\
 \dot{R} &= \frac{\Gamma k}{4\pi R^2 Z} [2Z^2 K(k) - (R^2 + 2Z^2)E(k)] - \\
 &- \frac{P}{4\pi} \frac{Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

На рис. 5 показаны траектории движения одной из компонент дипольного тороидального вихря с учетом орбитального движения (рис. 5а) и без закрутки (рис. 5б). Последний случай подробно рассматривался в работе [16], где представлены подобные траектории для других параметров вихря и потока. Хорошо видно влияние закрутки на коллапс вихря. В частности, появляются траектории с возвратным движением по оси z .

Координату Z точки поворота для данной траектории, которая соответствует постоянному значению гамильтониана (12), находим из уравнения (19) при условии $\dot{Z} = 0$. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\dot{Z} = 0, \quad H = \text{const}.$$

При этом мы учитываем, что для больших значений Z взаимодействие мало и соответствующим слагаемым в (19) пренебрегаем:

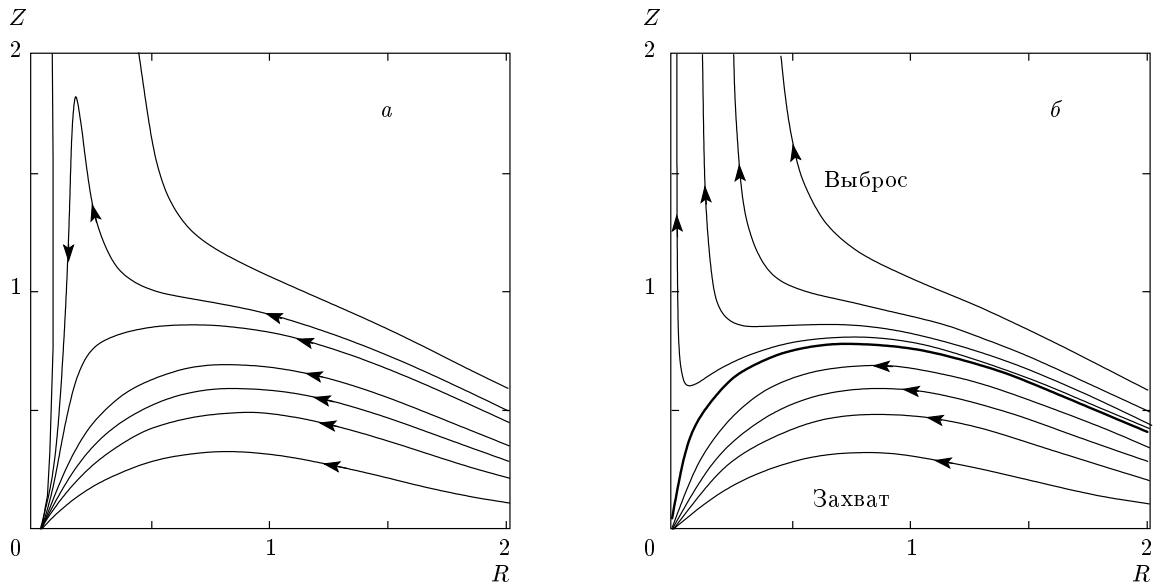


Рис. 5. Траектории компоненты дипольного тороидального вихря (линии постоянного гамильтониана) для $\Gamma = 4\pi$, $P = \Gamma^2$, $\beta = 0.01$: *a* — с учетом орбитального движения $\Gamma_1 = 10\sqrt{2}\Gamma$; *б* — в отсутствие закрутки $\Gamma_1 = 0$ (справа, жирной линией выделена сепаратриса)

$$\dot{Z} = \dots \frac{\Gamma k}{4\pi R} [E(k) - K(k)] \xrightarrow{k \rightarrow 0} \dots - \frac{\Gamma}{16R} k^3 \approx \dots - \frac{\Gamma}{16} \frac{R^2}{(Z^2 + R^2)^{3/2}} \rightarrow 0. \quad (20)$$

Для координаты Z точки поворота получаем выражение

$$Z^2 \approx \frac{QR^2}{8\pi} \left[\frac{Q}{4\pi} + \frac{3\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} - \left(H + \frac{3\Gamma R}{8\pi} \right) \right]^{-1} \approx \frac{QR^2}{8\pi} \left[\frac{3\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} - \left(H + \frac{3\Gamma R}{8\pi} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

При

$$\frac{3\beta^2\Gamma_1^2}{8\pi\Gamma R^2} \rightarrow H + \frac{3\Gamma R}{8\pi} \quad (22)$$

точка поворота по z уходит на бесконечность. Под радиусом R в точке поворота здесь следует понимать значение корня уравнения

$$\ln \frac{8R^{3/2}}{e^{1/4}\beta} = \frac{\beta^2}{R^3} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^2.$$

Для более детального рассмотрения точек поворота и динамики компонент необходимы дополнительные исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена динамика одиночного и дипольного кольцевых вихрей с учетом

закрутки, движущихся в потоке со стоком (аккреционном потоке). Показано, что в этом случае возможны возвратные движения (эффект бумеранга). Физической причиной таких движений становится сила, которая является аналогом «подъемной» силы Жуковского. Эта сила возникает в условиях, когда на завихренность кольца, направленную вдоль его образующей, действует центробежная сила от орбитального потока, ортогональная завихренности. Направление этой «подъемной» силы ортогонально плоскости вихревого кольца и обратно направлению его инерционного движения. Благодаря этому, выброс, направляемый инерционным движением кольца, меняет свое движение на обратное с уменьшением радиуса кольца, когда центробежная сила становится достаточно велика.

Авторы благодарны участникам XXII сессии Совета по нелинейной динамике РАН за полезное обсуждение, а также К. Анохиной, М. Бутузовой и А. Донец за помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Theor. Comput. Fluid Dyn. **24**, № 1–4 (2010).
2. Н. Helmholtz, J. Reine Angew. Math. **55**, 25 (1858); Г. Гельмгольц, *Основы вихревой теории*, ИКИ, Москва–Ижевск (2002).

3. В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов, *Уединенные волны в плазме и атмосфере*, Энергоатомиздат, Москва (1989).
4. В. В. Мелешко, М. Ю. Константинов, *Динамика вихревых структур*, Наук. думка, Киев (1990).
5. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, *Распространение волн в сдвиговых потоках*, Наука, Москва (1996).
6. С. В. Алексеенко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов, *Введение в теорию концентрированных вихрей*, ИКИ, Москва–Ижевск (2005).
7. G. Reznik and Z. Kizner, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24**, 65 (2010).
8. Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **137**, 1175 (2010).
9. А. В. Тур, В. В. Яновский, *Гидродинамические вихревые структуры*, Институт монокристаллов НАНУ, Харьков (2012).
10. G. Reznik and Z. Kizner, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24**, 65 (2010).
11. Ю. П. Ладиков-Роев, О. К. Черемных, *Математические модели сплошных сред*, Наук. думка, Киев (2010).
12. Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный мир, Москва (2000).
13. Г. В. Левина, М. Т. Монтгомери, *Доклады РАН* **434**, 401 (2010).
14. Г. Ламб, *Гидродинамика*, ГИТТЛ, Москва (1947).
15. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, Г. М. Резник, *ЖЭТФ* **132**, 615 (2007).
16. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, С. А. Пославский, *ЖЭТФ* **144**, 438 (2013).
17. V. V. Meleshko, *Theor. Comput. Fluid Dyn.: 150 years after Helmholtz* **24** (2010).
18. Е. Ю. Банникова, В. М. Конторович, *Астрон. ж.* **84**, 298 (2007).
19. S. A. Poslavsky, E. Yu. Bannikova, and V. M. Kontorovich, *Astrofizika* **53**(2), 174 (2010).
20. E. Yu. Bannikova and V. M. Kontorovich, *Phys. Lett. A* **373**, 1856 (2009).
21. W. Gröbli, *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch.* **22**, 37; 129 (1877).
22. F. Dyson, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **184**, 43 (1892).
23. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
24. M. L. Lister, M. F. Aller, H. D. Aller et al., *Astron. J.* **146**, 120L (2013).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982), с. 164.