

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭФФЕКТАХ ПРОЗРАЧНОСТИ И АБСОРБЦИИ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОЛЕМ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Э. Г. Сапрыкин^a, А. А. Черненко^{b*}, А. М. Шалагин^{a,c}

^a *Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

^b *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

^c *Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 13 февраля 2014 г.

Методом численного моделирования исследованы физические процессы, формирующие резонансы насыщенного поглощения и магнитного сканирования в поле встречных волн произвольной интенсивности при изменении их поляризаций. На примере атомного перехода с моментом уровней $J = 1$ показано, что наблюдаемые на опыте аномалии спектров насыщенного поглощения определяются степенью открытости атомного перехода, в случае же магнитного сканирования они обусловлены магнитной когерентностью, наводимой полями непосредственно на уровнях нижнего состояния, а не переносом ее с возбужденных состояний, как представлялось ранее.

DOI: 10.7868/S0044451014080021

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования нелинейных спектроскопических эффектов при взаимодействии нескольких лазерных полей с вырожденными атомными системами ведутся уже длительное время. Такой интерес обусловлен многообразием физических процессов, протекающих в данных системах и приводящих к узким резонансным структурам в исследуемых спектрах. Многие из обсуждаемых в данной статье работ, связанных с исследованием резонансов электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП), наблюдавшихся на переходах с основного состояния, отсчитывают историю вопроса от работы [1], где был введен термин «темный резонанс». В основе данного эффекта лежит возникновение так называемого «темного состояния», накапливаясь в котором атомы перестают поглощать энергию светового поля [2] в результате явления, получившего несколько позднее название когерентного пленения населенностей [3].

Однако возникновение когерентности атомных состояний при двухфотонных переходах известно намного раньше. Впервые подобный эффект наблюдался с некогерентными источниками излучения в работе [4]. Уже к 1972 г. история исследования таких когерентных явлений имела богатую библиографию (см., в частности, обзор [5]). Если говорить о когерентных явлениях в присутствии лазерного излучения, то следует отметить работу [6], в которой было открыто явление, названное «эффектом пересечения мод». В нелинейной спектроскопии при формировании спектров излучения, поглощения и генерации наряду с эффектами изменения населенностей уровней и их расщеплением была показана существенная роль поляризации, индуцированной внешними полями, — явления, получившего название нелинейного интерференционного эффекта (НИЭФ) [7–9]. Именно НИЭФ ответствен за изменение формы спектров при изменении направления распространения полей. При объяснении опытов с наблюдением резонанса когерентности в парах щелочных металлов в [10] и затем в [11] были получены точные решения задачи о стационарном двухчастотном

*E-mail: chernen@isp.nsc.ru

возбуждении переходов Λ - и V -типов. Термин «электромагнитно-индуцированная прозрачность» стали широко использовать в случаях, когда одно из двух лазерных полей намного интенсивнее другого.

Наряду с резонансами прозрачности в экспериментах и при численном моделировании были обнаружены также и инвертированные резонансы (резонансы поглощения) [12–15]. При этом круг явлений, приводящих к возникновению инвертированных нелинейных резонансов, оказался довольно широк, он не ограничивался процессами на основном состоянии. Недавно узкие резонансы поглощения большой интенсивности были предсказаны и детально описаны в работах [16].

Однако не всегда причины появления инвертированных резонансов получали адекватное толкование. Чаще интерпретация таких резонансов вызывала затруднения. Так, в опытах [12] инвертированные резонансы, зарегистрированные на переходе с участием метастабильного состояния, объяснялись подобно явлениям, возникающим при оптической накачке основного состояния. Впоследствии было показано, что эти резонансы носят аномальный характер и не могут быть описаны в приближении широко используемого метода пробного поля [17] подобно механизмам, действующим на основном состоянии. Только много времени спустя использование численных методов анализа показало, что инверсия резонансов может быть обусловлена насыщающим действием пробного поля [18]. Результаты работы [18] по инверсии резонансов при увеличении интенсивности пробного поля представляются интересными в общем плане. Пробное поле не может быть бесконечно слабым, потому что есть ограничения как чисто экспериментального свойства, например, преодоление фона рассеянного света, так и связанные со свойствами исследуемой системы. Так, в опытах с основным состоянием практически любая разумная интенсивность пробной волны существенно изменяет заселенности подуровней основного состояния, и это требует ревизии теоретических результатов, полученных без учета этого обстоятельства.

В этом контексте следует упомянуть недавний эксперимент с рубидием [15], где интенсивность пробной волны менялась от значений, много меньших интенсивности встречной сильной волны, до значений, намного ее превышающих. При таких условиях был также зарегистрирован инвертированный резонанс (пик в провале), конечно, сильно уступающий по контрасту резонансам [12], но растущий с увеличением интенсивности пробной волны. Однако трудно согласиться как с заключением авто-

ров [15] о невозможности объяснить эффект ранее известными физическими явлениями, влияющими на форму линии, так и с качественным описанием его в рамках невырожденного открытого перехода.

Упомянем также работу [14], где при численном моделировании взаимодействия встречных волн с атомным переходом при его расщеплении магнитным полем была обнаружена инверсия знака нелинейного резонанса, которая объяснялась проявлением НИЭФ во встречных волнах. Однако на самом деле инвертированный резонанс оказался обычным перекрестным резонансом [19]. В работах [20, 21] свойства перекрестных резонансов были подвергнуты детальному анализу. Для этого использовался метод численного моделирования, позволяющий исследовать разнообразные типы переходов, включая и не исследованные экспериментально. Было показано, что 50-летняя история перекрестных резонансов полна заблуждений об их природе и свойствах. Выяснено, что в образование перекрестных резонансов могут давать вклад не только эффекты перераспределения населенности, но и когерентные эффекты. Выявлены условия изменения знака перекрестных резонансов, продемонстрирована ситуация, когда перекрестный резонанс имеет исключительно когерентную природу. Установлено, что влияние когерентных процессов, времен жизни уровней, параметра ветвления излучения с верхнего уровня (отношение первого коэффициента Эйнштейна к ширине уровня) и характеристик световых полей качественно различно для переходов типов Λ , V и $J = 1 - J = 1$.

Особо необычной оказалась инверсия резонансов ЭИП при изменении взаимной поляризации однонаправленных лазерных волн в методе магнитного сканирования [13]. Инвертированные при магнитном сканировании резонансы ЭИП получили название резонансов электромагнитно-индуцированной абсорбции (ЭИА). В работе [22] это явление было объяснено каскадом магнитной когерентности возбужденных состояний, впервые рассмотренным в [23]. Позднее в работах [24, 25] были исследованы и вопросы обмена магнитной когерентностью, вынуждаемого собственным излучением или столкновениями с электронами. В присутствии обмена когерентностью резонансы могут менять как ширины, так и знаки, что было продемонстрировано в опытах [26].

В работе [27] в случае однонаправленных волн в ^{85}Rb и ^{87}Rb наблюдались резонансы ЭИА, часть которых укладывалась в рамки модели [22], а часть — нет. Для объяснения этих особенностей авторами

предложен механизм столкновительного переноса населенности.

Недавно авторы [28] сообщили о регистрации в поле двух встречно направленных лазерных волн сверхузких резонансов ЭИП и ЭИА, знаки амплитуд которых зависели от взаимной ориентации плоскостей поляризаций оптических полей. При интерпретации экспериментальных результатов в работе [28] использовалось пространственно-однородное решение уравнений для матрицы плотности в модели Λ -схемы переходов с основного состояния атома. Однако модель трехуровневого атома не учитывает все характерные процессы, протекающие при взаимодействии двух световых волн с атомами, имеющими вырожденную структуру обоих уровней перехода, в реальном эксперименте [28]. В частности, эта модель не включает перенос магнитной когерентности с верхних уровней на нижние, с которым авторы [13] связывают эффект ЭИА. Тем не менее, эффект инверсии знака в результатах расчетов [28] появился, но причины этого не обсуждались.

В настоящей работе анализируются физические причины, приводящие к наблюдавшимся в эксперименте [28] зависимостям спектров магнитного сканирования от взаимной ориентации плоскостей поляризации двух встречных волн одной частоты. Показано, что основным физическим процессом, определяющим поведение амплитуд резонансов, регистрируемых на опыте, является непосредственно магнитная когерентность подуровней основного состояния, наводимая полями встречных когерентных волн. Представленные результаты дают основания считать, что следует модифицировать принятую в работах [13, 27, 28] трактовку механизма образования резонанса ЭИА как результата спонтанного переноса магнитной когерентности возбужденного состояния атомов в основное.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим задачу о спектре поглощения пробного поля в среде с переходом типа $J = 1 - J = 1$ в присутствии излучения сильного поля той же частоты и встречного направления распространения. Схема переходов приведена на рис. 1. Сильная волна предполагается плоской, монохроматической, линейно поляризованной (с частотой ω , волновым вектором \mathbf{k} , напряженностью электрического поля \mathbf{E}), резонансной атомному переходу $m - n$ (частота перехода ω_{mn}). Пробная волна также является монохроматической (с частотой ω_μ , волновым вектором

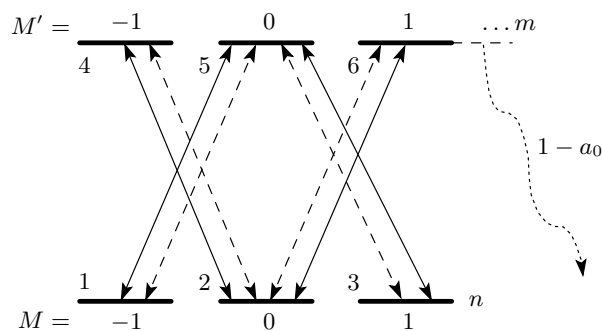


Рис. 1. Схема взаимодействия оптических полей с подуровнями перехода $J = 1 - J = 1$: сплошные линии — сильное поле, штриховые линии — пробное поле, волнистая линия — спонтанный распад магнитных подуровней состояния m на прочие нижележащие уровни, $(1 - a_0)$ — доля этого процесса

$\mathbf{k}_\mu = -\mathbf{k}$, напряженностью электрического поля \mathbf{E}_μ) с линейной поляризацией, параллельной либо ортогональной поляризации сильного поля. Предполагается, что поглощающая газовая среда помещена в магнитное поле напряженностью \mathbf{H} , величина которого может меняться, а обе волны распространяются коллинеарно направлению магнитного поля. При решении задачи учитывается насыщение среды пробной волной в предположении ее слабости по сравнению с сильной. Газ полагаем достаточно разреженным, чтобы можно было пренебречь столкновениями. Среда считается оптически тонкой.

Будем рассматривать задачу в системе координат с осью квантования вдоль направления вектора \mathbf{H} (\mathbf{H} направлен вдоль оси z). В этой системе координат в случае перехода $J = 1 - J = 1$ для обоих полей разрешены переходы с изменением магнитного квантового числа $\Delta M = \pm 1$ (рис. 1). Из схемы рис. 1 видно, что в данной системе уровней присутствуют Λ - и V -подсистемы, связанные между собой спонтанными переходами с изменением $\Delta M = 0$.

При решении задачи будем исходить из кинетических уравнений для матрицы плотности атомной системы. Согласно [29] динамика диагональных элементов матрицы плотности ($\rho_i = \rho_{ii}$) в модели релаксационных констант описывается системой уравнений

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \Gamma_i \rho_i = Q_i + \sum_k A_{ki} \rho_k - 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_j V_{ij} \rho_{ji} \right) - 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_j V_{ij}^\mu \rho_{ji} \right). \quad (1)$$

Для недиагональных элементов матрицы плотности справедлива следующая система уравнений:

$$\frac{d\rho_{ik}}{dt} + (\Gamma_{ik} + i\omega_{ik})\rho_{ik} = -i[V, \rho]_{ik} - i[V^\mu, \rho]_{ik} + R_{ik}^{(2)}. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) оператор полной производной есть

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla,$$

Γ_i — ширины уровней, Γ_{ik} — полуширины линий переходов, Q_i — скорости возбуждения уровней. Слагаемое $\sum_k A_{ki}\rho_k$ в системе уравнений (1) определяет спонтанный распад верхнего состояния m на нижнее состояние n (скорость данного процесса A_{mn}), оно присутствует в уравнениях для населенностей нижних уровней и отсутствует в уравнениях для населенностей верхних уровней. При анализе формы линии важна величина $a_0 = A_{mn}/\Gamma_m$ ($a_0 \leq 1$), называемая параметром ветвления излучения с верхнего уровня. При этом величина $1 - a_0$ определяет долю частиц, уходящих при спонтанном распаде верхнего состояния m на прочие нижележащие уровни. В уравнениях (1), (2) \mathbf{V} и \mathbf{V}^μ — операторы взаимодействия атома с сильным и пробным полями, определяемые соответственно как

$$\mathbf{V} = -\mathbf{G} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) + \text{H.c.},$$

$$\mathbf{V}^\mu = -\mathbf{G}^\mu \exp(i(\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r} - \omega_\mu t)) + \text{H.c.},$$

где операторы

$$\mathbf{G} = d\mathbf{E}/2\hbar, \quad \mathbf{G}^\mu = d\mathbf{E}_\mu/2\hbar,$$

а d — оператор дипольного момента. В уравнениях (2) слагаемое $R_{ik}^{(2)}$ определяет спонтанный перенос магнитной когерентности с уровня m на уровень n . В переходах Λ - и V -типов перенос магнитной когерентности отсутствует.

Следуя [19, 20], будем искать решения системы уравнений (1), (2) для матрицы плотности движущегося атома в следующем виде (приближение первой гармоники по ε): диагональные элементы как

$$\rho_i = \rho_i^0 + \rho_i^+ \exp(i(\varepsilon t - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r})) + \rho_i^- \exp(-i(\varepsilon t - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}));$$

недиагональные элементы на разрешенных переходах как

$$\rho_{ik} = R_{ik} \exp(-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + R_{ik}^\mu \exp(-i(\omega_\mu t - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r})) + R_{ik}^s \exp(-i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})),$$

недиагональные элементы на запрещенном переходе как

$$\rho_{ik} = r_{ik}^0 + r_{ik}^+ \exp(i(\varepsilon t - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r})) + r_{ik}^- \exp(-i(\varepsilon t - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r})),$$

где $\varepsilon = \omega_\mu - \omega$, $\omega_s = 2\omega - \omega_\mu$, $\mathbf{k}_s = 2\mathbf{k} - \mathbf{k}_\mu$. Справедливость данного вида решения в стационарном случае для исследуемого перехода в широком диапазоне интенсивностей пробной и насыщающей волны показана нами в работе [20].

В приближении вращающихся оптических полей система уравнений для матрицы плотности (1), (2) сводится к системе уравнений относительно коэффициентов ρ_i^0 , ρ_i^\pm , R_{ik} , R_{ik}^μ , R_{ik}^s , r_{ik}^0 , r_{ik}^\pm . Учитывая эрмитовость этих коэффициентов, далее выписываем только независимые уравнения.

Из уравнения (1) следует система уравнений для заселенностей подуровней нижнего состояния n :

$$\frac{d\rho_n^0}{dt} + \Gamma_n \rho_n^0 = Q_n + \sum_k A_{ki} \rho_k^0 + 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_k G_{ik} R_{ki} \right) + 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_k G_{ik}^\mu R_{ki}^\mu \right), \quad (3a)$$

$$\frac{d\rho_n^+}{dt} + (\Gamma_n + i(\varepsilon - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v})) \rho_n^+ = \sum_k A_{ki} \rho_k^+ + i \sum_k (G_{ik}^\mu R_{ki} - G_{ki} R_{ik}^\mu + G_{ik} R_{ki}^s), \quad (3b)$$

а также система уравнений для заселенностей подуровней верхнего состояния m :

$$\frac{d\rho_m^0}{dt} + \Gamma_m \rho_m^0 = Q_m + 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_i G_{ki} R_{ik} \right) + 2 \operatorname{Re} \left(i \sum_i G_{ki}^\mu R_{ik}^\mu \right), \quad (4a)$$

$$\frac{d\rho_m^+}{dt} + (\Gamma_m + i(\varepsilon - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v})) \rho_m^+ = i \sum_i (G_{ki} R_{ik}^\mu - G_{ik}^\mu R_{ki} - G_{ik} R_{ki}^s) \quad (4b)$$

(здесь значения индексов $i = 1, 2, 3$, а $k = 4, 5, 6$).

Из уравнения (2) получаем следующие системы уравнений для коэффициентов R_{ik} , R_{ik}^μ , R_{ik}^s для поляризаций на разрешенных переходах:

$$\frac{dR_{ik}}{dt} + (\Gamma_{mn} - i\Omega_{ik})R_{ik} = -iG_{ik}(\rho_i^0 - \rho_k^0) - iG_{ik}^\mu(\rho_k^+ - \rho_i^+) + iG_{il}r_{lk}^0 + iG_{il}^\mu r_{lk}^+, \quad (5a)$$

$$\frac{dR_{ik}^s}{dt} + (\Gamma_{mn} - i(\Omega_{ik} - (\varepsilon - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}))) R_{ik}^s = -iG_{ik}(\rho_i^+ - \rho_k^+) + iG_{il}r_{lk}^+, \quad (5b)$$

$$\frac{dR_{ik}^\mu}{dt} + (\Gamma_{mn} - i\Omega_{ik}^\mu) R_{ik}^\mu = -iG_{ik}(\rho_i^{+*} - \rho_k^{+*}) - iG_{ik}^\mu(\rho_i^0 - \rho_k^0) + iG_{il}r_{lk}^- + iG_{il}^\mu r_{lk}^0. \quad (5c)$$

Здесь индексы i и k обозначают подуровни разных состояний, а индексы l и k обозначают подуровни одного состояния. В системах уравнений (3)–(5) Γ_n и Γ_m — константы релаксации нижних и верхних уровней, Γ_{mn} — однородная полуширина линии перехода, $\Omega_{ik} = (\omega - \omega_{ik} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ и $\Omega_{ik}^\mu = (\omega_\mu - \omega_{ik} - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v})$ — значения отстроек частот сильного и пробного полей от частот ω_{ik} переходов между магнитными подуровнями верхнего m и нижнего n состояний с учетом доплеровского сдвига, \mathbf{v} — вектор скорости атома.

Уравнения для коэффициентов r_{ik}^0 , r_{ik}^\pm для поляризаций на запрещенных переходах между магнитными подуровнями (3–1 и 6–4) имеют следующий вид:

$$\frac{dr_{ik}^0}{dt} + (\Gamma_{ik} + i\omega_{ik})r_{ik}^0 = i(G_{il}R_{lk} - G_{lk}R_{li}^* + G_{il}^\mu R_{lk}^\mu - G_{lk}^\mu R_{li}^{\mu*}) - 0.5A_{mn}r_{64}^0, \quad (6a)$$

$$\frac{dr_{ik}^\pm}{dt} + (\Gamma_{ik} + i(\omega_{ik} + (\varepsilon - (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v})))r_{ik}^\pm = i(G_{il}^\mu R_{lk} - G_{lk}R_{li}^{\mu*} + G_{il}R_{lk}^s) - 0.5A_{mn}r_{64}^\pm. \quad (6b)$$

Здесь ω_{ik} — частоты переходов между магнитными подуровнями нижнего n либо верхнего m состояний, Γ_{ik} — полуширины линий этих переходов. Для нижнего состояния $i = 3$, $k = 1$, $l = 5$, $\Gamma_{ik} = \Gamma_n$; для верхнего состояния $i = 6$, $k = 4$, $l = 2$, $\Gamma_{ik} = \Gamma_m$. Для верхнего состояния в правых частях уравнений (6) будет отсутствовать последнее слагаемое, описывающее спонтанный перенос магнитной когерентности с верхнего состояния на нижнее. Скорость спонтанного переноса магнитной когерентности в рассматриваемой структуре уровней полагалась равной $A_{mn}/2$ [29]. Ниже рассматривается ситуация встречного распространения волн равных частот, где $\omega = \omega_\mu$, а $\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k} = -2\mathbf{k}$.

Далее будем рассматривать решение системы уравнений (3)–(6) в стационарных условиях. В этом случае в уравнениях (3)–(6) можно пренебречь частными производными по времени. В общем случае, с

учетом конечного поперечного размера пучка, производные по координатам существенны, если среднее время пролета атомом пучка сравнимо или меньше времени жизни наиболее долгоживущего состояния (в нашем случае нижнего состояния), т.е. $1/\Gamma_n \geq d_0/v_T$. При $v_T = 10^4$ см/с и характерном для экспериментальных условий поперечном размере светового пучка $d_0 \approx 0.1$ – 1 см имеем оценку $\Gamma_n \approx 10^5$ – 10^4 с $^{-1}$. При меньших ширинах, в частности, для переходов с основного состояния необходимо использовать пространственно-неоднородные решения уравнений для матрицы плотности. Проведенные нами расчеты показали, что решения пространственно-неоднородной задачи с участием основного состояния атома качественно согласуются с результатами пространственно-однородной, в которой константа релаксации нижнего уровня Γ_n заменяется средней пролетной шириной, определяемой характерным поперечным размером d_0 светового пучка и наиболее вероятной скоростью частиц v_T . Поэтому далее приведены результаты пространственно-однородных решений системы уравнений (3)–(6).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Стационарные системы уравнений для элементов матрицы плотности из (3)–(6) решались численно при вариации значений ширин верхнего Γ_m и нижнего Γ_n уровней атома, параметра ветвления излучения a_0 и интенсивностей оптических полей с использованием релаксационных характеристик перехода $1s_2$ – $2p_8$ атома неона ($A_{mn} = 1.88 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $\Gamma_m = 5.5 \cdot 10^7$ с $^{-1}$, $\Gamma_n = 10^5$ – 10^6 с $^{-1}$, $\Gamma_{mn} = (\Gamma_m + \Gamma_n)/2$). При этом значения ширин уровней изменялись от указанных выше величин до значений $\Gamma_m = \Gamma_n = \Gamma_{mn}$ при сохранении постоянным значения полуширины перехода Γ_{mn} , а величина параметра ветвления a_0 варьировалась в диапазоне 0.34–1. Ширины линий запрещенных переходов между магнитными подуровнями нижнего и верхнего состояний полагались равными значениям ширин нижнего и верхнего уровней. Доплеровская ширина линии принята равной $kv_T = 5.2 \cdot 10^9$ с $^{-1}$, диапазон изменения скоростей частиц при интегрировании составил $\pm 3kv_T$ с шагом $\Delta kv_T = (10^{-3}$ – $10^{-4})kv_T$. Параметры насыщения сильного κ_s и пробного κ_p полей были выбраны в виде

$$\kappa_s = \frac{2}{\Gamma_{mn}\Gamma_n} \left(\frac{dE}{2\sqrt{3}\hbar} \right)^2, \quad \kappa_p = \frac{2}{\Gamma_{mn}\Gamma_n} \left(\frac{dE_\mu}{2\sqrt{3}\hbar} \right)^2,$$

где E, E_μ — напряженности циркулярных компонент сильного и пробного полей, d — приведенный матричный элемент дипольного момента перехода $m-n$. Значения параметров насыщения варьировались в пределах $\kappa_s = 0.1-50$, $\kappa_p \leq \kappa_s$. Далее результаты представлены при значении параметра насыщения пробного поля $\kappa_p = 10^{-3}$.

Форма линии поглощения пробного поля (в расчете на один атом) определялась соотношением:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = -\Gamma_{mn} \left\langle \operatorname{Re} \left(\frac{i \sum_{i,k} R_{ik}^\mu G_{ki}^\mu}{|G^\mu|^2} \right) \right\rangle. \quad (7)$$

Здесь обозначение $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по максвелловскому распределению частиц по скоростям, $\alpha_0 = 4\pi\omega_{mn}d^2/c\hbar\Gamma_{mn}$ — сечение резонансного поглощения. Вероятности A_{ki} распада магнитных подуровней по каждому из спонтанных каналов полагались в расчетах одинаковыми и равными $A_{mn}/2$.

При определении вклада в коэффициент поглощения пробного поля эффектов переноса магнитной когерентности с верхнего уровня на нижний и комбинационного рассеяния на частоте $\omega_s = 2\omega - \omega_\mu$ из системы уравнений (3)–(6) исключались слагаемые, ответственные за данные процессы (полагалось $R_{ik}^{(2)} = 0$, либо $R_{ik}^s = 0$).

Результаты численного моделирования спектров насыщенного поглощения пробной волны при двух взаимных ориентациях плоскостей поляризации линейно-поляризованных пробной и насыщающей волн представлены в виде зависимостей α/α_0 от $\Omega = \omega_\mu - \omega_{mn}$ на рис. 2.

Расчеты показывают, что форма спектра насыщенного поглощения зависит как от характеристик исследуемого перехода (ширин уровней Γ_n, Γ_m и полуширины линии Γ_{mn} , параметра ветвления a_0 , величины расщепления уровней верхнего и нижнего состояний) и от интенсивностей (параметров насыщения) сильной и пробной волн, так и от взаимной ориентации плоскостей поляризации этих волн. И если характер зависимостей спектра насыщенного поглощения от параметров атомного перехода и интенсивностей световых полей изучался для многих типов переходов, то эффект влияния взаимной ориентации плоскостей поляризации этих волн на форму нелинейного резонанса поглощения исследован мало. Именно особенности поведения формы резонанса насыщенного поглощения при параллельных и ортогональных поляризациях линейно поляризованных световых волн представлены ниже.

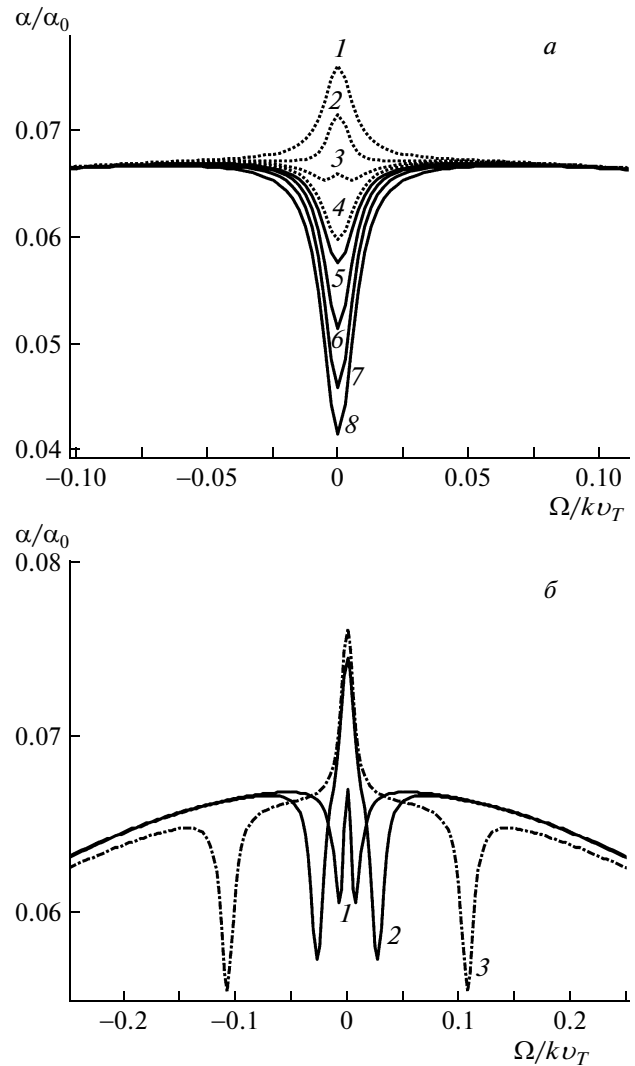


Рис. 2. Формы резонансов при значениях параметров $\kappa_s = 2$, $\kappa_p = 10^{-3}$, $a_0 = 1$ и разных расщеплениях уровней Ω_H . *а*) Ортогональные (1–4) и параллельные (5–8) поляризации полей; $\Omega_H = 0$ (1, 8), $2.5 \cdot 10^{-2}\Gamma_{mn}$ (2, 7), $5 \cdot 10^{-2}\Gamma_{mn}$ (3, 6), $0.125\Gamma_{mn}$ (4, 5); *б*) $\Omega_H = \Gamma_{mn}$ (1), $5\Gamma_{mn}$ (2), $20\Gamma_{mn}$ (3)

Наиболее ярко эти особенности проявляются для замкнутых переходов (параметр ветвления $a_0 = 1$), когда существует только один канал распада верхнего состояния на нижнее. Для данного случая на рис. 2 показано поведение формы резонанса насыщенного поглощения для перехода с долгоживущим нижним уровнем (соотношение ширин $\Gamma_m \gg \Gamma_n$) в зависимости от величины Ω_H расщепления уровней верхнего и нижнего состояний при параллельных и ортогональных поляризациях световых волн. Для простоты при расчетах частотные сдвиги верхних и нижних уровней полагались одинаковыми.

Из данных рис. 2а видно, что в отсутствие расщепления уровней ($\Omega_H = 0$) при ортогональных поляризациях полей резонанс насыщения проявляется в виде пика поглощения (кривая 1), а при параллельных — в виде традиционного провала (кривая 8). При этом амплитуды провала и пика нелинейного резонанса зависят от значений параметров насыщения сильного и пробного полей, параметра ветвления a_0 и соотношения времен жизни уровней следующим образом.

Изменение соотношения ширин уровней (при $\Gamma_n \rightarrow \Gamma_m$) при сохранении значения полуширины перехода Γ_{mn} приводит к уменьшению амплитуд пика и провала нелинейного резонанса и увеличению его ширины.

Изменение значения параметра ветвления a_0 в диапазоне 1–0.34 приводит при параллельных поляризациях полей к уменьшению амплитуды провала резонанса, а в случае ортогональных поляризаций полей пиковая форма резонанса преобразуется в форму провала. При этом критические значения параметра ветвления a_0 зависят от величины параметра насыщения сильного поля и меняются в диапазоне $a_0 \approx 0.75$ –0.6 при изменении значений параметра насыщения в диапазоне $\kappa_s = 0.5$ –500.

Влияние интенсивности сильной волны на параметры нелинейного резонанса носит обычный для резонансной системы характер [29]: с ее ростом наблюдается увеличение амплитуд и ширин нелинейного резонанса как в виде провала, так и в виде пика. Влияние интенсивности пробной волны проявляется иным образом: рост ее интенсивности приводит к уменьшению амплитуд как пика, так и провала резонанса при росте его ширины, а также к уменьшению доплеровского крыла линии поглощения, как и в работе [19].

Расщепление уровней (например, магнитным полем) в случае параллельных поляризаций полей приводит к уменьшению амплитуды провала (росту величины поглощения, кривые 5–8 на рис. 2а), а в случае ортогональных поляризаций полей — к уменьшению амплитуды пика и преобразованию пика в провал (кривые 1–4). Такие изменения формы нелинейного резонанса наблюдаются при достаточно малых величинах расщеплений (существенно меньших однородной ширины перехода) уровней $\Delta H \leq 0.1\Gamma_{mn}$, а при расщеплениях уровней $\Omega_H > 0.1\Gamma_{mn}$ формы резонансов насыщения при ортогональных и параллельных поляризациях полей становятся практически одинаковыми (кривые 4, 5).

При больших расщеплениях уровней $\Omega_H \geq 0.5\Gamma_{mn}$ (рис. 2б) в форме линии насыщенного по-

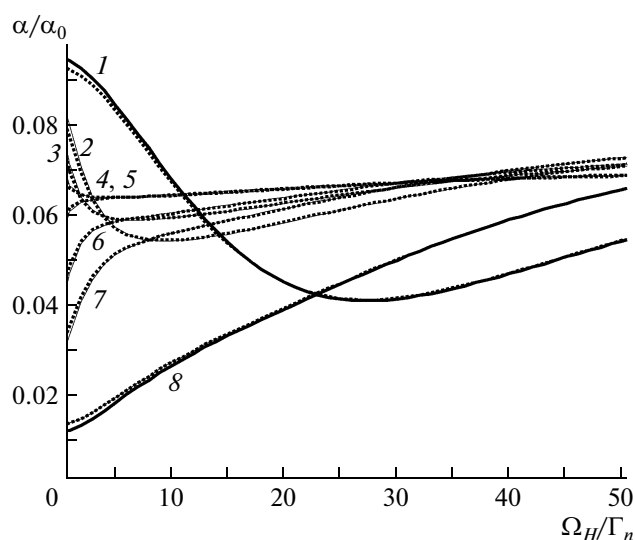


Рис. 3. Зависимости амплитуды резонанса в центре линии от величины расщепления уровней при ортогональных (кривые 1–4) и параллельных (кривые 5–8) поляризациях полей. Сплошные линии — при учете всех процессов, пунктирные линии — без вклада переноса магнитной когерентности. Значения параметров: $a_0 = 1$, $\kappa_p = 10^{-3}$, $\kappa_s = 0.5$ (4, 5), 2 (3, 6), 5 (2, 7), 50 (1, 8)

глобления наблюдаются как резонансы в виде пропускания, смещенные симметрично от центра линии на величину расщепления уровней (так называемые «родительские» резонансы), так и резонансы в виде пика поглощения в центре линии нерасщепленного перехода — перекрестные резонансы. Особенности формы линии поглощения пробной волны на данном переходе при расщеплениях уровней $\Omega_H \geq \Gamma_{mn}$ детально исследованы нами недавно в работах [20, 21].

Представляет интерес зависимость амплитуды резонанса в центре линии перехода (частоты полей $\omega = \omega_\mu \approx \omega_{mn}$) от величины расщепления уровней Ω_H — так называемый спектр магнитного сканирования. Именно данная зависимость регистрировалась в опытах [28].

На рис. 3 показаны расчетные зависимости амплитуды резонанса насыщенного поглощения в центре линии перехода для параллельных и ортогональных поляризаций световых волн от величины расщепления уровней при четырех значениях параметра насыщения сильного поля κ_s . Видно, что приведенные зависимости от величины расщепления уровней носят резонансный характер с ярко выраженным экстремумом вблизи нулевого значения расщепления. При ортогональных поляризациях полей

вблизи нуля наблюдается максимум (пик, кривые 1–4), а в случае параллельных поляризаций полей реализуется минимум (провал, кривые 5–8). Как показывают расчеты, ширины пика и провала зависят от параметра насыщения κ_s сильного поля и при его малых значениях будут определяться шириной нижнего уровня Γ_n . Значение Γ_n в приведенном на рис. 3 случае значительно меньше однородной ширины перехода ($\Gamma_n \ll \Gamma_{mn}$). Данное обстоятельство позволяет трактовать резонансы в спектре магнитного сканирования как сверхузкие резонансы.

Изменение соотношения значений ширин уровней в диапазоне от $\Gamma_n \ll \Gamma_m$ до $\Gamma_n = \Gamma_m$ при постоянной полуширине линии перехода Γ_{mn} приводит, как и в форме линии поглощения пробного поля (рис. 2а), к уменьшению амплитуд, а также к увеличению ширин пика и провала в спектре линии магнитного сканирования.

Отметим, что изменение значений параметра a_0 в диапазоне от 1 до 0.34 не влияет на характер зависимостей формы линии магнитного сканирования: при ортогональных поляризациях световых полей наблюдается пиковая форма резонанса, а при параллельных поляризациях — резонанс в виде провала.

Для выяснения физической причины возникновения сверхузких резонансов в спектрах магнитного сканирования, а также зависимости их формы от взаимной ориентации поляризаций световых полей нами были проведены исследования вклада в форму нелинейного резонанса поглощения таких физических процессов, как индуцирование магнитной когерентности полем сильной волны на нижних уровнях Λ -схемы (рис. 1), нелинейная поляризация на комбинационной частоте, индуцирование магнитной когерентности сильным полем на верхних уровнях в V-схеме (рис. 1) и ее перенос на уровни нижнего состояния. Как отмечалось выше, именно последний процесс обуславливает по мнению авторов работы [28] возникновение пика резонанса при ортогональных поляризациях полей. С этой целью при моделировании из системы стационарных уравнений (3)–(6) исключались слагаемые, ответственные за указанные процессы.

Результаты расчетов вклада переноса магнитной когерентности для случая метастабильного нижнего состояния ($\Gamma_n \ll \Gamma_{mn}$) показаны на рис. 4, 5. Из приведенных графиков видно, что перенос магнитной когерентности с верхних уровней на нижние проявляется вблизи нулевого расщепления уровней, когда все уровни перехода взаимодействуют с сильной волной. Однако вклад данного процесса (в виде добавки в амплитуду резонанса) проявляется и при ортого-

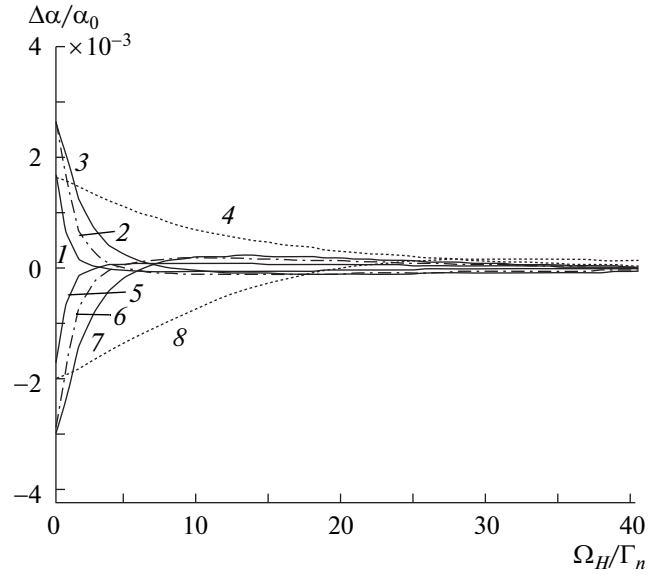


Рис. 4. Зависимости вклада переноса магнитной когерентности от величины расщепления уровней при разных значениях параметра κ_s : $a_0 = 1$, $\kappa_p = 10^{-3}$, $\kappa_s = 0.5$ (1, 5), 2 (2, 6), 5 (3, 7), 50 (4, 8); ортогональные (1–4) и параллельные (5–8) поляризации полей

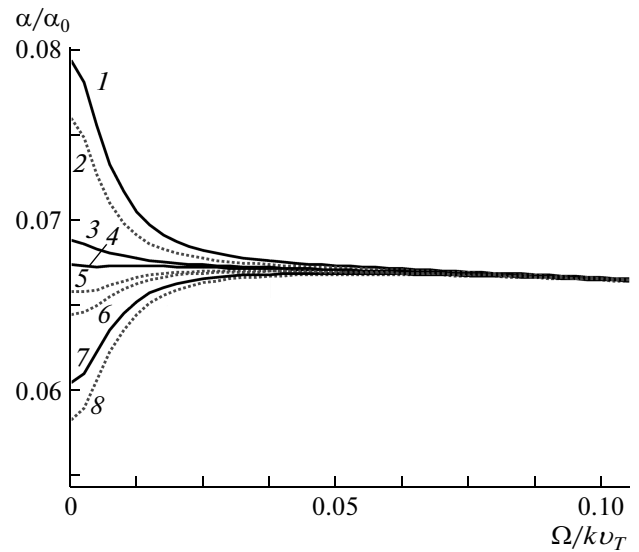


Рис. 5. Форма резонанса при ортогональных поляризациях полей и разных значениях параметра a_0 : $a_0 = 1$ (1, 2), 0.75 (3, 5), 0.7 (4, 6), 0.5 (7, 8); расщепление уровней $\Omega_H = 0$; параметры насыщения $\kappa_s = 2$, $\kappa_p = 10^{-3}$. Сплошные линии — полное решение, пунктирные линии — решение без учета переноса магнитной когерентности

нальных, и при параллельных поляризациях полей, и его доля в амплитуде как пика, так и провала резонанса магнитного сканирования почти одинакова (кривые рис. 4). Она максимальна при параметре насыщения сильного поля $\kappa_s \approx 2-5$ (кривые 2, 3 и 6, 7) и составляет величину $\leq 10\%$ от максимальной амплитуды резонанса при указанных параметрах перехода. С увеличением значения параметра насыщения сильного поля этот вклад уменьшается (кривые 4, 8).

Влияние на амплитуду резонанса магнитного сканирования индуцируемой оптическими полями поляризации на комбинационной частоте, как показывают расчеты, сильно зависит от параметра насыщения сильного поля. При значении параметра $\kappa_s \leq 50$ доля данного процесса в амплитуде провала составляет менее 5%, а его доля в амплитуде пика оказывается еще меньше. При этом отметим, что при одинаковых условиях эффект переноса магнитной когерентности наблюдается при малых значениях расщеплений уровней ($\Omega_H \leq 5\Gamma_n$), а эффект поляризации на комбинационной частоте проявляется в значительно большем диапазоне значений расщеплений.

В приближении слабого пробного поля и при пренебрежении эффектами, связанными с переносом магнитной когерентности и поляризацией на комбинационной частоте, из стационарной системы уравнений (3)–(6) можно получить следующее выражение для поляризации на частоте пробного поля, которое и определяет согласно (7) форму линии поглощения пробного поля:

$$(\Gamma_{mn} - i\Omega_{ki}^\mu)R_{ki}^\mu = -iG_{kl}^\mu(\rho_k^0 - \rho_l^0) - G_{kj}^\mu \frac{G_{jk}R_{ki} - G_{kj}R_{jk}}{\Gamma_{ij} + i\omega_{ij}} + \frac{G_{ki}^\mu G_{kj}^\mu R_{jk}^\mu}{\Gamma_{ij} + i\omega_{ij}}, \quad (8)$$

где $\rho_k^0, \rho_l^0, R_{ki}, R_{jk}$ — решение системы уравнений (3)–(6) при действии только сильного поля [29], Ω_{ki}^μ — отстройка частоты пробного поля с учетом доплеровского сдвига. Здесь значения индексов для Λ -схемы переходов: $k = 5; i = 1, j = 3$, либо $i = 3, j = 1$; в случае V-схемы переходов: $k = 2; i = 4, j = 6$, либо $i = 6, j = 4$. В правой части выражения (8) первое слагаемое определяет связанную с перераспределением населенности часть поляризации пробного поля, происхождение второго и третьего слагаемых связано с поляризацией на запрещенном переходе, наводимой полями сильной и пробной волны. Эти слагаемые имеют интерференционную природу. При этом второе слагаемое обусловлено действием только сильного поля линейной поляри-

зации, вызывающего когерентность между уровнями i и j нижнего состояния — магнитную когерентность этих уровней. Третье слагаемое более сложное и учитывает когерентность, наводимую как полем только пробной волны (подобно сильному полю), так и совместным действием полей пробной и сильной волн (интерференционное слагаемое согласно [29], включающее и НИЭФ). При слабом пробном поле вклад данного слагаемого значительно меньше первых двух.

Тогда в линейном приближении по пробному полю вклад каждого перехода в форму резонанса насыщенного поглощения из (7) имеет вид

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)_{ki} = -\Gamma_{mn} \left\langle \text{Re} \left((\rho_k^0 - \rho_l^0) |G_{ki}^\mu|^2 - iG_{kj}^\mu G_{ik}^\mu \times \frac{G_{jk}R_{ki} - G_{kj}R_{jk}}{\Gamma_{ij} + i\omega_{ij}} \right) ((\Gamma_{mn} - i\Omega_{ki}) |G^\mu|^2)^{-1} \right\rangle. \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части (9) определяет связанную с изменением населенности (некогерентную) часть коэффициента поглощения пробного поля, а второе слагаемое — когерентную добавку. При этом знак вклада когерентной добавки определяется знаком произведения матричных элементов оператора взаимодействия пробного поля $G_{kj}^\mu G_{ik}^\mu$, который зависит как от знаков $3j$ -символов переходов, так и от взаимной ориентации плоскостей поляризации сильной и пробной волн. В принятых обозначениях уровней перехода (рис. 1) матричные элементы оператора взаимодействия имеют вид

$$G_{ki}^\mu \equiv G_{mn}^\mu (MM') = \frac{dE_\mu^\sigma}{2\sqrt{3}\hbar} \times (-1)^{J_n - M'} \langle J_m M J_n - M' | 1\sigma \rangle,$$

где $J_m = J_n, M$ и M' — значения магнитных подуровней верхнего и нижнего состояний, обозначение $\langle \dots | \dots \rangle$ означает коэффициент векторного сложения моментов, d — приведенный матричный элемент дипольного момента перехода, $\sigma = \mp 1$ — индекс (знак) циркулярной поляризации, E_μ^σ — амплитуда напряженности циркулярной компоненты пробного поля. В случае перехода $J = 1 - J = 1$ матричные элементы $G_{mn}^\mu (MM')$ оказываются следующими: для $\sigma = +1$ компоненты поля

$$G_{mn}^\mu (0 - 1) = G_{mn}^\mu (10) = -\frac{g_+}{\sqrt{2}},$$

а для $\sigma = -1$ —

$$G_{mn}^\mu (-10) = G_{mn}^\mu (01) = \frac{g_-}{\sqrt{2}},$$

где

$$g_{\pm} = \frac{dE_{\mu}^{\pm}}{2\sqrt{3}\hbar}.$$

Тогда в Λ -схеме переходов произведение матричных элементов $G_{kj}^{\mu}G_{ik}^{\mu}$, используя свойства эрмитовости оператора, можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_{kj}^{\mu}G_{ik}^{\mu} &= G_{kj}^{\mu}(G_{ki}^{\mu})^* = G_{mn}^{\mu}(01)(G_{mn}^{\mu}(0-1))^* = \\ &= -\frac{g_{-}(g_{+})^*}{2} = \beta E_{\mu}^{-}(E_{\mu}^{+})^*. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что знаки добавки будут разными для случаев параллельно и ортогонально направленных векторов линейных поляризации сильной и пробной волн в силу определения циркулярных компонент через амплитуду поля линейной поляризации как

$$E_{\pm} = \mp \frac{E_x \pm iE_y}{\sqrt{2}}.$$

Подобным образом ведут себя произведения матричных элементов оператора взаимодействия и в V -подсистеме перехода $J = 1 - J = 1$. Таким образом, второе слагаемое в правой части (9) приводит к зависимости спектров резонанса насыщенного поглощения и резонанса магнитного сканирования от взаимной ориентации плоскостей поляризации сильной и пробной волн. Данное слагаемое обусловлено оптическими полями и определяет переходы между магнитными подуровнями нижнего состояния — магнитную когерентность нижних уровней. Из формулы (9) следует, что вклад данной когерентной добавки в форму линии имеет лоренцев вид с шириной, определяемой шириной нижнего уровня, что и обуславливает узость резонанса.

Отметим также, что данное слагаемое, как показали расчеты, будет определять знак резонанса магнитного сканирования и в случае однонаправленных волн. Отсюда и трактовка результатов экспериментов в случае однонаправленных волн как проявления эффектов ЭИП и ЭИА также требует корректировки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты исследования формы нелинейных резонансов насыщенного поглощения методом пробного поля и спектров магнитного сканирования на переходах между вырожденными состояниями атомов с моментом уровней $J = 1$ демонстрируют влияние не только релаксационных констант уровней и параметра ветвления излучения

a_0 , но и взаимной ориентации плоскостей поляризации сильной и пробной волн. И если значения релаксационных констант уровней определяют амплитуду и ширину нелинейного резонанса при разной взаимной ориентации плоскостей поляризации оптических полей, то значение параметра ветвления a_0 может менять знак и форму нелинейного резонанса.

Так, в случае ортогональных поляризаций полей вид нелинейного резонанса существенно зависит от параметра ветвления атомного перехода a_0 и может иметь как форму провала, так и форму пика на доплеровском контуре линии поглощения. При параллельных поляризациях полей влияние параметра a_0 мало, а нелинейный резонанс всегда проявляется в виде провала. Форма резонанса магнитного сканирования определяется взаимной ориентацией плоскостей поляризации оптических полей: при ортогональных поляризациях полей наблюдается пик, а при параллельных поляризациях полей — провал. Ширина и амплитуда магнитного резонанса определяются релаксационными характеристиками уровней перехода.

Основным физическим процессом, определяющим особенности поведения амплитуд резонансов насыщенного поглощения и магнитного сканирования в зависимости от взаимной ориентации поляризации световых волн, является магнитная когерентность, наводимая полями световых волн линейной поляризации на нижних уровнях атомного перехода, а не перенос магнитной когерентности с верхних уровней исследуемого перехода, как предполагалось в работе [13]. Максимальный вклад процесса переноса магнитной когерентности с верхних уровней на нижние не превышает 10 % от амплитуды нелинейного резонанса, а вклад нелинейной поляризации на комбинационной частоте составляет еще меньшую величину.

В работе [28] сообщается, что при качественной интерпретации опытов удалось описать появление резонанса ЭИА, обратного по знаку резонансу ЭИП, в рамках простой Λ -схемы переходов, а это прямое свидетельство того, что он не обусловлен переносом магнитной когерентности с верхних уровней, которая в Λ -схеме отсутствует.

Проверка возможности влияния специфики взаимодействия атомов с полем в пролетных условиях показала, что для переходов атомов с основного состояния как в пространственно-однородных, так и неоднородных условиях характер (поведение) спектров насыщенного поглощения и магнитного сканирования качественно одинаков. Исследования более сложных моделей атомного перехода

($J = 2 - J = 1$ и $J = 2 - J = 2$) в стационарном случае выявило качественное согласие с результатами расчетов перехода $J = 1 - J = 1$ как по спектрам нелинейного резонанса, так и по спектрам магнитного сканирования.

Работа выполнена при поддержке грантом НШ-2979.2012.2, программой ОФН РАН «Фундаментальная оптическая спектроскопия и ее приложения» и Международным проектом «Collima».

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Nuovo Cim. B* **36**, 5 (1976).
2. E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cim.* **17**, 333 (1976).
3. H. R. Gray, R. M. Whitley, and C. R. Stroud, *Opt. Lett.* **3**, 218 (1978).
4. W. E. Bell and A. L. Bloom, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 280 (1961).
5. Е. Б. Александров, *УФН* **107**, 595 (1972).
6. H. R. Schlossberg and A. Javan, *Phys. Rev.* **150**, 267 (1966).
7. S. G. Rautian, *Proc. Symp. on Modern Optics*, Polytechnic Press (1967), p. 353.
8. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан и др., *ЖЭТФ* **57**, 444 (1969).
9. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан и др., *ЖЭТФ* **57**, 850 (1969).
10. Е. Б. Александров, А. Б. Мамырин, Ю. С. Чидсон, *ЖЭТФ* **72**, 1568 (1977).
11. G. Orriols, *Nuovo Cim. B* **53**, 1 (1979).
12. А. В. Шишаев, И. А. Карташев, *Письма в ЖЭТФ* **58**, 501 (1993).
13. F. M. Akulshin, S. Barreiro, and A. Lesama, *Phys. Rev. A* **57**, 2996 (1998).
14. Ю. В. Богданова, *Опт. атмосф. и океана* **16**, 567 (2003).
15. В. И. Васильев, В. Л. Величанский, А. С. Зибров и др., *ЖЭТФ* **130**, 883 (2011).
16. А. И. Пархоменко, А. М. Шалагин, *ЖЭТФ* **128**, 1134 (2005); *КЭ* **37**, 453 (2007).
17. С. Г. Раутиан, А. В. Шишаев, *ЖЭТФ* **108**, 807 (1995).
18. С. Г. Раутиан, Э. Г. Сапрыкин, А. А. Черненко, *Изв. вузов. Физика* **52**, № 12/3, 266 (2009).
19. С. Г. Раутиан, Э. Г. Сапрыкин, А. А. Черненко, *Опт. и спектр.* **104**, 630 (2008).
20. Э. Г. Сапрыкин, А. А. Черненко, А. М. Шалагин, *Опт. и спектр.* **13**, 530 (2012).
21. Э. Г. Сапрыкин, А. А. Черненко, А. М. Шалагин, *Изв. вузов. Физика* **56**, № 2/2, 255 (2011).
22. А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 776 (1999).
23. С. Г. Раутиан, *Письма в ЖЭТФ* **60**, 462 (1994).
24. С. Г. Раутиан, *ЖЭТФ* **110**, 462 (1996).
25. С. Г. Раутиан, Э. Г. Сапрыкин, *Опт. и спектр.* **92**, 385 (2002).
26. Э. Г. Сапрыкин, С. Н. Селезнев, В. А. Сорокин, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 322 (2002).
27. S. K. Kim, H. S. Moon, K. Kim et al., *Phys. Rev. A* **68**, 063813 (2003).
28. Д. В. Бражников, А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин и др., *Письма в ЖЭТФ* **91**, 694 (2010).
29. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).