

# СПЕКТР ПОВЕРХНОСТНЫХ ПЛАЗМОНОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ СПОНТАННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ КВАНТОВОЙ ТОЧКИ

*Е. С. Андрианов*<sup>a,b,\*</sup>, *А. А. Пухов*<sup>a,b,\*\*</sup>, *А. В. Дорофеев*<sup>a,b</sup>,  
*А. П. Виноградов*<sup>a,b</sup>, *А. А. Лисянский*<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

<sup>c</sup> *Department of Physics, Queens College of the City University of New York  
11367, Flushing, New York*

Поступила в редакцию 10 декабря 2012 г.

Рассматриваются квантовые флуктуации ближних полей квантового излучателя (двухуровневой системы с инверсией населенностей, поддерживаемой некогерентной накачкой), находящегося в ближней зоне плазмонной (металлической) наночастицы. Ниже порога генерации такой системы (спазера), в приближении малого числа плазмонов, получен спектр поверхностных плазмонов, возбуждаемых спонтанными переходами квантового излучателя. Показано, что скорость релаксации есть сумма скоростей релаксаций квантового излучателя в его тепловой резервуар и в плазмонный резонатор. Получена зависимость среднего числа плазмонов от интенсивности накачки, указывающая на беспороговость процесса.

DOI: 10.7868/S0044451013080038

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время получила развитие новая область оптики — квантовая плазмоника [1–25], изучающая квантовые режимы электродинамики плазмонных структур. В качестве задач, исследуемых квантовой плазмоникой, можно, прежде всего, упомянуть SERS [26, 27], усиление ближних полей (Surface Plasmon Amplification by Stimulated Emission of Radiation — SPASER [28]), создание наноразмерных источников света [29–32], компенсацию потерь в плазмонных передающих линиях [2, 23, 33–35] и в метаматериалах [17, 36–41]. Последняя проблема весьма актуальна при создании концентраторов энергии [42] и суперлинзы с разрешением, превышающим дифракционный предел [37, 43, 44], и т. п.

Наиболее ярко квантовые свойства плазмонных структур проявляются в спазере [28] или дипольном

нанолазере [9], об экспериментальной реализации которых сообщалось в работах [32, 45, 46]. Схематически спазер представляет собой квантово-плазмонную систему, состоящую из инверсно возбужденных двухуровневых квантовых точек (КТ), окружающих плазмонные наночастицы (НЧ)<sup>1)</sup>. Принцип действия спазера аналогичен действию лазера — это усиление, обеспеченное инверсной населенностью, в сочетании с обратной связью, создаваемой индуцированным излучением квантовой системы. Условие для индуцированного излучения инверсной квантовой системы в поле ранее высвеченной этой же системой волны обеспечивается помещением квантовой системы в резонатор, локализирующий генерируемую моду. В спазере роль фотонов играют поверхностные плазмоны (ПП) НЧ. Их локализация на НЧ создает условия для реализации обратной связи. Иными словами, в спазере происходит генерация и усиление ближних полей НЧ. Усиление ПП происходит за

\*E-mail: andrianov.es@mipt.ru

\*\*E-mail: pukhov@mail.ru

<sup>1)</sup> Более реалистичное рассмотрение четырехуровневой КТ не приносит качественно новых свойств, см. [47–49].

счет безызлучательной передачи энергии от КТ. В основе процесса лежит диполь-дипольное [50] (или любое иное ближнепольное [51]) взаимодействие КТ и плазмонной НЧ. Этот механизм является основным, потому что вероятность безрадиационного возбуждения плазмона в  $(kr_{NP-TLS})^{-3}$  раз больше радиационного высвечивания фотона [5, 50] ( $r_{NP-TLS}$  — расстояние между центрами НЧ и КТ,  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны в вакууме). Таким образом, эффективность передачи энергии от КТ к НЧ достигается за счет малого расстояния между КТ и НЧ.

Пороговое значение накачки и динамика спазера могут быть описаны в полуклассическом приближении уравнениями Максвелла–Блоха [9, 22]. В этом приближении от уравнений для квантовых операторов, а именно, для операторов уничтожения плазмона НЧ  $\hat{a}$ , дипольного перехода КТ  $\hat{\sigma}$  и инверсной заселенности  $\hat{D}(t) = \hat{n}_e(t) - \hat{n}_g(t)$ , где  $\hat{n}_e = |e\rangle\langle e|$ ,  $\hat{n}_g = |g\rangle\langle g|$  — заселенности верхнего и нижнего состояний КТ, переходят к их средним значениям, одновременно расцепляя корреляторы. При этом игнорируется спонтанное излучение и квантовые шумы. Как следствие, теория дает линию генерации нулевой ширины.

В работе [52] с помощью подхода [53] было предложено вместо уравнений Максвелла–Блоха записать уравнения для операторов числа плазмонов  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ , заселенностей верхнего уровня  $\hat{n}_e$  и для операторов «обмена энергией»  $i(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a})$ , а затем совершить переход к  $C$ -числам. В таком подходе при выводе уравнений, как следствие коммутационных соотношений, появляются дополнительные слагаемые. При этом для получения замкнутой системы уравнений «расцепляется» коррелятор  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{n}_e \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \langle \hat{n}_e \rangle$ . Полученные уравнения дают беспороговое поведение спазера. В отличие от подхода в рамках уравнений Максвелла–Блоха число плазмонов ниже порога генерации не равно нулю. Это трактуется автором как учет спонтанного излучения. Однако данный подход не позволяет найти ни частоту генерации спазера, ни ширину линии его излучения.

Недавно в работе [54] было предложено использовать для описания спазера уравнения Гейзенберга–Ланжевена для операторов уничтожения плазмона НЧ  $\hat{a}$ , дипольного перехода КТ  $\hat{\sigma}$  и инверсной заселенности  $\hat{D}$ . Далее делался переход от операторных к  $C$ -числовым уравнениям, решение которых находилось численно. Данный подход оправдан в том случае, когда накачка в КТ достаточно велика, а амплитуда дипольного момента НЧ достаточно большая, так что квантовыми корреляциями мож-

но пренебречь. Как и следовало ожидать, для ширины линии получена формула Шавлова–Таунса в несколько модифицированном виде. Однако вблизи и ниже порога генерации спазера флуктуации величин порядка самих величин и приближение, сделанное в работе [54], несправедливо.

Отметим, что задача о подпороговой динамике в модели Джейнса–Каммингса представляет интерес при описании квантовых вычислений [55, 56].

В настоящей работе в приближении малого числа плазмонов получен спектр поверхностных плазмонов, возбуждаемых спонтанными переходами квантового излучателя. Показано, что скорость релаксации есть сумма скоростей релаксаций квантового излучателя в его тепловой резервуар и в плазмонный резонатор. Получена зависимость среднего числа плазмонов от интенсивности накачки, указывающая на беспороговость процесса.

## 2. УРАВНЕНИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА – ЛАНЖЕВЕНА ДИНАМИКИ СПАЗЕРА

Для описания квантовой динамики спазера можно использовать модельный гамильтониан вида [9, 16, 28, 38, 39, 57]

$$\hat{H} = \hat{H}_{SP} + \hat{H}_{TLS} + \hat{V}, \quad (1a)$$

где

$$\hat{H}_{SP} = \hbar\omega_{SP} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{H}_{TLS} = \hbar\omega_{TLS} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \quad (1b)$$

— гамильтонианы ПП и двухуровневой КТ. Оператор  $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}_{NP} \hat{\mathbf{E}}_{TLS}$ , определяющий взаимодействие между двухуровневой КТ и НЧ, может быть записан в виде

$$\hat{V} = \hbar\Omega_R \left( \hat{a}^\dagger + \hat{a} \right) \left( \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma} \right),$$

где

$$\Omega_R = [\boldsymbol{\mu}_{NP} \boldsymbol{\mu}_{TLS} - 3(\boldsymbol{\mu}_{TLS} \cdot \mathbf{e}_r)(\boldsymbol{\mu}_{NP} \cdot \mathbf{e}_r)] / \hbar r^3$$

— частота Раби,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор  $\mathbf{r}/r$ . Входящие в выражение для частоты Раби векторы

$$\boldsymbol{\mu}_{NP} = \sqrt{3\hbar r_{NP}^3 / (\partial \text{Re} \epsilon_{NP} / \partial \omega)} \mathbf{e}_{NP},$$

$$\boldsymbol{\mu}_{TLS} = \mu_{TLS} \mathbf{e}_{TLS}$$

нормируют операторы дипольного момента НЧ

$$\hat{\mathbf{d}}_{NP} = \boldsymbol{\mu}_{NP} \left( \hat{a} + \hat{a}^\dagger \right)$$

и дипольного момента КТ

$$\hat{\mathbf{d}}_{TLS} = \mu_{TLS} \mathbf{e}_{TLS} \left( \hat{\sigma}(t) + \hat{\sigma}^\dagger(t) \right).$$

Здесь  $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$  — оператор перехода между возбужденным  $|e\rangle$  и основным  $|g\rangle$  состояниями КТ,  $\mu_{TLS} = \langle e|er|g\rangle$  — величина дипольного перехода КТ, а  $\mathbf{e}_{NP}$  и  $\mathbf{e}_{TLS}$  — единичные векторы, определяющие направления дипольных моментов соответственно НЧ и КТ<sup>2)</sup> (более подробно о процедуре квантования см. работу [39]).

Полагая, что частота перехода КТ близка к частоте ПП:  $\omega_{SP} \approx \omega_{TLS}$ , будем искать решения в виде

$$\hat{a}(t) \equiv \hat{a}(t) \exp(-i\omega t), \quad \hat{\sigma}(t) \equiv \hat{\sigma}(t) \exp(-i\omega t),$$

где  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$  — медленно меняющиеся амплитуды. Отметим, что оператор инверсии населенностей  $\hat{D}(t)$  в силу своего определения является «медленным». Тогда, пренебрегая быстро осциллирующими членами порядка  $\exp(\pm 2i\omega t)$  (приближение вращающейся волны [58]), оператор взаимодействия  $\hat{V}$  можно записать в виде гамильтониана Джейнса–Каммингса [59]

$$\hat{V} = \hbar\Omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}). \quad (1c)$$

Используя стандартные коммутационные соотношения  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}$ ,  $[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}] = \hat{D}$ , для операторов  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$  и оператора инверсии населенности  $\hat{D}(t)$  и исходя из гамильтониана (1), получаем следующие уравнения движения Гейзенберга [9, 60]:

$$\dot{\hat{D}} = 2i\Omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}), \quad (2)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = i\delta\hat{\sigma} + i\Omega_R \hat{a} \hat{D}, \quad (3)$$

$$\dot{\hat{a}} = i\Delta\hat{a} - i\Omega_R \hat{\sigma}, \quad (4)$$

где  $\delta = \omega - \omega_{TLS}$ ,  $\Delta = \omega - \omega_{SP}$  — «расстройки» частот.

Отметим, что система (2)–(4) не описывает ни процесса накачки, ни диссипации энергии. В работах [9, 13, 22] эти процессы были учтены феноменологически, введением соответствующих членов, записанных в  $\tau$ -приближении. Это позволило вычислить частоту, порог и амплитуду генерации спазера [9, 13, 22].

Для последовательного учета диссипации необходимо учесть то, что спазер — открытая квантовая система. Следуя работам [11, 59, 61], введем в рассмотрение окружение спазера, с которым взаимодействуют НЧ и КТ. Не ограничивая общности, можно считать, что это — резервуары, представляющие собой

<sup>2)</sup> Мы предполагаем, что пространственные моды НЧ и КТ, задающие эти направления, выделены геометрией задачи.

континуум мод бозонного поля, взаимодействуя с которыми НЧ и КТ релаксируют. В зависимости от доминирующего механизма релаксации [62] такими бозонами могут быть фононы, поляритоны, поверхностные плазмоны и т. д. [50]. Гамильтонианы резервуаров, с которыми взаимодействуют НЧ и КТ, можно записать в виде

$$\hat{H}_{NP-R} = \hbar \sum_j \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad (5)$$

$$\hat{H}_{TLS-R} = \hbar \sum_j \omega_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j, \quad (6)$$

где  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^\dagger$ ,  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения бозонов теплового резервуара соответственно для НЧ и КТ, а гамильтонианы взаимодействия НЧ и КТ с этими резервуарами суть:

$$\hat{V}_R = \hbar \sum_j \gamma_{j,1} \left( \hat{b}_j^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}_j \right) + \hbar \sum_j \gamma_{j,2} \left( \hat{c}_j^\dagger \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{c}_j \right). \quad (7)$$

Гамильтониан  $\hat{V}_R$  также записан в «приближении вращающейся волны», поскольку взаимодействие с резервуарами носит резонансный характер [59, 63]. Гамильтониан полной системы «спазер + резервуары» можно записать в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_{SP} + \hat{H}_{TLS} + \hat{V} + \hat{H}_{NP-R} + \hat{H}_{TLS-R} + \hat{V}_R. \quad (8)$$

Используя этот гамильтониан, можно записать уравнения Гейзенберга для операторов резервуара; в предположении, что время корреляции переменных резервуара много меньше характерного времени изменения системы (марковское приближение), получаются следующие уравнения спазера [59, 63]:

$$\dot{\hat{a}} = (i\Delta - 1/\tau_a)\hat{a} - i\Omega_R \hat{\sigma} + \hat{F}_a(t), \quad (9)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = (i\delta - 1/\tau_\sigma)\hat{\sigma} + i\Omega_R \hat{a} \hat{D} + \hat{F}_\sigma(t), \quad (10)$$

$$\dot{\hat{D}} = 2i\Omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}) - (D_0 + 1)/2\tau_\sigma + \hat{F}_D(t), \quad (11)$$

где

$$\tau_a^{-1} = \pi g_1(\omega_{SP}) [\gamma_{j,1}(\omega_{SP})]^2, \quad (12)$$

$$\hat{F}_a(t) = -i \sum_j \gamma_{j,1} \hat{b}_j(0) e^{-i(\omega_j - \omega)t}, \quad (13)$$

$$\tau_\sigma^{-1} = \pi g_2(\omega_{TLS}) [\gamma_{j,2}(\omega_a)]^2, \quad (14)$$

$$\hat{F}_\sigma(t) = i \hat{D}(t) \sum_j \gamma_{j,2} \hat{c}_j(0) e^{-i(\omega_j - \omega)t}, \quad (15)$$

$$\hat{F}_D(t) = 2i \sum_j \gamma_{j,2} \left( \hat{c}_j^\dagger(0) e^{i(\omega_j - \omega)t} \sigma(t) - \sigma^\dagger(t) \hat{c}_j(0) e^{-i(\omega_j - \omega)t} \right) \quad (16)$$

и  $g_{1,2}(\omega)$  — плотность состояний бозонных мод резервуаров, с которыми взаимодействуют соответственно НЧ и КТ. Двухвременные корреляторы операторов  $\hat{F}_a$ ,  $\hat{F}_\sigma(t)$ ,  $\hat{F}_D(t)$  в марковском приближении представляют собой дельта-функции, например [59, 63],

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a(t') \rangle &= \frac{2}{\tau_a} \bar{n} \delta(t - t'), \\ \langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle &= \frac{2}{\tau_a} (\bar{n} + 1) \delta(t - t'), \\ \langle \hat{F}_a(t) \hat{F}_a(t') \rangle &= \langle \hat{F}_a^\dagger(t) \hat{F}_a^\dagger(t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а числами заполнения бозонных мод резервуаров  $\bar{n} = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}$  на оптических частотах можно пренебречь, так как даже при комнатной температуре  $\bar{n}_i$  много меньше единицы. Накачка КТ внешними источниками может быть феноменологически учтена добавлением в формулу (11) релаксационного слагаемого  $(\hat{1} - \hat{D})/\tau_p$ , где  $\tau_p$  — скорость накачки [9]. Вводя обозначения  $\hat{D}_0 = (\tau_p - \tau_\sigma/2)/(\tau_p + \tau_\sigma/2)\hat{1}$ ,  $\tau_D^{-1} = 2\tau_\sigma^{-1} + \tau_p^{-1}$ , окончательно получаем

$$\dot{\hat{a}} = \left( i\Delta - \frac{1}{\tau_a} \right) \hat{a} - i\omega_R \hat{\sigma} + \hat{F}_a(t), \quad (18)$$

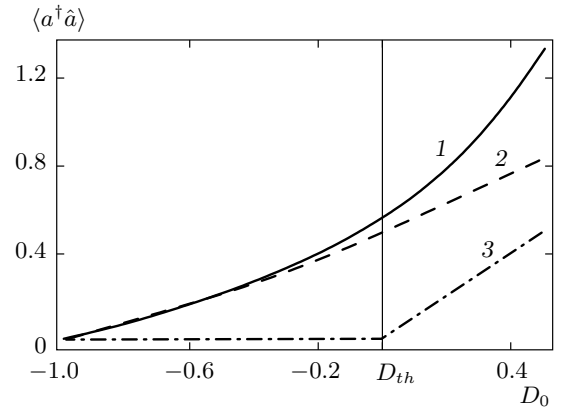
$$\dot{\hat{\sigma}} = \left( i\delta - \frac{1}{\tau_\sigma} \right) \hat{\sigma} + i\omega_R \hat{a} \hat{D} + \hat{F}_\sigma(t), \quad (19)$$

$$\dot{\hat{D}} = 2i\omega_R (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}) - \frac{\hat{D} - \hat{D}_0}{\tau_D} + \hat{F}_D(t). \quad (20)$$

Уравнения (18)–(20) являются уравнениями Гейзенберга–Ланжевена для спазера [11, 54].

### 3. ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ

Система уравнений (18)–(20) является операторной. Для того чтобы получить представление о динамике процесса, необходимо перейти к наблюдаемым величинам — средним значениям этих операторов. Однако эта система является нелинейной, в уравнении (19) присутствует произведение операторов  $\hat{a} \hat{D}$ , которое само является оператором, и для получения замкнутой системы необходимо записать уравнение Гейзенберга для этого оператора, в котором будет содержаться произведение еще большего числа операторов. Таким образом, получается бесконечная це-



**Рис. 1.** Зависимость среднего числа плазмонов  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$  от накачки  $D_0$ : кривая 1 — учет квантовых флуктуаций, приведенный выше, кривая 2 — результат, полученный в работе [52] на основе расщепления коррелятора  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{n}_e \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \langle n_e \rangle$ , кривая 3 — расчет из уравнений Максвелла–Блоха. Вертикальная линия соответствует пороговому значению накачки, получаемому из системы уравнений Максвелла–Блоха,  $D_{th} = (\tau_a \tau_\sigma \Omega_R^2)^{-1}$ . Данные зависимости вычислялись при следующих значениях констант:  $\tau_a = 4 \cdot 10^{-14}$  с,  $\tau_\sigma = 10^{-11}$  с,  $\tau_D = 10^{-13}$  с,  $\Omega_R^{-1} = 10^{-13}$  с $^{-1}$ ,  $D_{th} = 0.0025$

почка уравнений, описывающая динамику средних значений операторов физических величин [59].

Нас интересует работа спазера вблизи и ниже порога генерации. Это означает, что в рассматриваемом нами случае среднее число плазмонов должно быть малым, поэтому ниже мы будем рассматривать в подпространстве состояний плазмонов лишь два состояния —  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , соответствующих отсутствию возбужденных плазмонов и состоянию с одним возбужденным плазмоном, т. е. мы будем полагать, что  $\hat{a}^2|0\rangle = 0$  и  $\hat{a}^{+2}|1\rangle = 0$ . Ненулевыми средними в этом приближении будут обладать только операторы  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  (умноженные на любые комбинации атомных операторов). Поэтому далее мы пренебрежем слагаемыми, содержащими вторые и более высокие степени операторов рождения и уничтожения. Например, это относится к операторам  $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{D} \hat{a}^2 \rangle$  и  $\langle \hat{a}^\dagger (1 + \hat{D}) \hat{a}^2 \rangle$ . Действительно, в данном приближении

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{D} \hat{a}^2 \rangle &= \text{Tr}(\hat{\sigma}^\dagger \hat{D} \hat{a}^2 \rho) = \\ &= \text{Tr} \left( \hat{\sigma}^\dagger \hat{D} \hat{a}^2 \sum_{\substack{i,i'=0,1 \\ j,j'=e,g}} \rho_{i,i'} |i, j\rangle \langle i', j'| \right) = 0. \end{aligned}$$

В результате такого подхода из бесконечной цепочки уравнений вычлняются две замкнутые подсистемы. Ниже мы также учли то, что средние значения шумовых операторов равны нулю:

$$\langle \hat{F}_a \rangle = \langle \hat{F}_\sigma \rangle = \langle \hat{F}_D \rangle = 0.$$

Первая группа уравнений описывает динамику средних значений эрмитовых операторов числа плазмонов  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ , инверсии населенностей КТ  $\hat{D}$ , обмена энергией  $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}$  и  $\hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{a}$ :

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = -2 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle / \tau_a + i \Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \rangle, \quad (21)$$

$$\langle \dot{\hat{D}} \rangle = -1/\tau_D \left( \langle \hat{D} \rangle - D_0 \right) - 2i \Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \rangle, \quad (22)$$

$$i \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = -(1/\tau_a + 1/\tau_\sigma) \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + \Omega_R \langle \hat{D} \rangle + 2\Omega_R \langle \hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{a} \rangle + \Omega_R, \quad (23)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \dot{\hat{D}} \hat{a} \rangle = -(2/\tau_a + 1/\tau_D) \langle \hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{a} \rangle + D_0 \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle / \tau_D - i \Omega_R \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \rangle. \quad (24)$$

Стационарное решение данной системы для  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ ,  $\langle \hat{D} \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{a} \rangle$  в пределе  $\tau_a \ll \Omega_R^{-1}$ ,  $\tau_D$ ,  $\tau_\sigma$  имеет вид

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = (\Omega_R \tau_a)^2 (1 - \Omega_R^2 \tau_a \tau_\sigma) (1 + D_0) / 2, \quad (25)$$

$$\langle \hat{D} \rangle = -1 + (1 + D_0) (1 - \Omega_R^2 \tau_a \tau_\sigma),$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{D} \hat{a} \rangle = -(\Omega_R \tau_a)^2 (1 - \Omega_R^2 \tau_a \tau_\sigma) (1 + D_0) / 2. \quad (26)$$

Множитель  $(1 + D_0)$  указывает на то, что при любой конечной заселенности верхнего уровня ( $D_0 > -1$ ) число плазмонов отлично от нуля, а инверсия отличается от значения  $D_0$ , задаваемого некогерентной накачкой. Заметим, что в данном рассмотрении были учтены квантовые корреляции между атомом и полем, а именно, были сохранены коммутационные соотношения операторов и, как следствие, нулевые флуктуации энергии дипольных моментов НЧ и

КТ. В полуклассической модели [9, 22–25, 52] в стационарном состоянии амплитуды дипольных моментов НЧ и КТ, равно как и их энергий, равны нулю (рис. 1).

Заметим, что для характерных времен затухания в металлической НЧ и полупроводниковой КТ  $\tau_a \sim 10^{-14}$  с,  $\tau_\sigma \sim 10^{-11}$  с,  $\tau_D \sim 10^{-13}$  с,  $\Omega_R^{-1} \sim 10^{-13}$  с [64–67], в полуклассическом приближении число индуцируемо возбуждаемых плазмонов  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = (D_0 - D_{th}) \tau_a / 4 \tau_D$  [9, 22] при накачках, достигаемых в эксперименте [32, 45], оказывается малым. Однако применять развитую теорию для  $D_0 > D_{th}$  некорректно, так как она выходит за рамки своего приближения, предсказывая  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \geq 1$ .

Вторая подсистема описывает динамику средних неэрмитовых операторов: дипольных моментов НЧ  $\hat{a}$  и КТ  $\hat{\sigma}$ , а также  $\hat{a} \hat{D}$  и  $\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}$ :

$$\langle \dot{\hat{a}} \rangle = \left( i \Delta - \frac{1}{\tau_a} \right) \langle \hat{a} \rangle - i \Omega_R \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad (27)$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}} \rangle = \left( i \delta - \frac{1}{\tau_\sigma} \right) \langle \hat{\sigma} \rangle + i \Omega_R \langle \hat{a} \hat{D} \rangle, \quad (28)$$

$$\langle \dot{\hat{a}} \hat{D} \rangle = (i \Delta - (1/\tau_a + 1/\tau_D)) \langle \hat{a} \hat{D} \rangle + \langle \hat{a} \rangle D_0 / \tau_D - i \Omega_R \langle \hat{\sigma} \rangle + 2i \Omega_R \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle, \quad (29)$$

$$\langle \dot{\hat{a}}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle = (i \delta - (2/\tau_a + 1/\tau_\sigma)) \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle + i \Omega_R \langle \hat{a} \rangle / 2 + i \Omega_R \langle \hat{a} \hat{D} \rangle / 2, \quad (30)$$

или в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = M \mathbf{x}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{x} = \{ \langle \hat{a} \rangle, \langle \hat{\sigma} \rangle, \langle \hat{a} \hat{D} \rangle, \langle \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle \}^T$  и

$$M = \begin{pmatrix} -1/\tau_a & i \Omega_R & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau_\sigma & i \Omega_R & 0 \\ D_0/\tau_D & i \Omega_R & -(1/\tau_a + 1/\tau_D) & 2i \Omega_R \\ i \Omega_R/2 & 0 & i \Omega_R/2 & -(2/\tau_a + 1/\tau_\sigma) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Отметим, что стационарное решение данной системы равно нулю, что является следствием пренебрежения нелинейными слагаемыми при обрыве цепочки уравнений Гейзенберга. Как следствие, данное приближение не описывает бифуркацию Хопфа спа-

зера и фазового перехода от некогерентного возбуждения плазмонов к когерентному, т. е. порога генерации. Тем не менее, данная система несет большую информацию о динамике и спектре спазера.

Перейдем к анализу решений системы (31). Найдем собственные числа матрицы  $M$ . Они определяются из характеристического уравнения, которое мы найдем в предположении  $\tau_a \ll \Omega_R^{-1}, \tau_D, \tau_\sigma$ , что соответствует приведенным выше характерным временам затухания [64–67]:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3/\tau_a + 5\lambda^2/\tau_a^2 + 2\lambda/\tau_a^3 + 2\Omega_R^2/\tau_a^2 + 2/(\tau_a^3\tau_\sigma) = 0. \quad (33)$$

Корни этого уравнения при этом же предположении выглядят следующим образом:

$$\lambda_1 \approx -2/\tau_a, \quad \lambda_{2,3} \approx -1/\tau_a \quad (34)$$

с точностью до членов более малого порядка, и

$$\lambda_4 \approx -\Omega_R^2\tau_a - \tau_\sigma^{-1}, \quad (35)$$

(на самом деле корень  $\lambda_{2,3}$  — кратный лишь в данном предельном случае). Скорость затухания будет определяться характеристическим числом с наименьшим модулем, т. е.  $\Omega_R^2\tau_a + \tau_\sigma^{-1}$ .

Полученный результат имеет ясный физический смысл. Если бы КТ не взаимодействовала с НЧ, то скорость ее затухания определялась бы исключительно свойствами теплового резервуара и была бы равна  $\tau_\sigma^{-1}$ . Если она взаимодействует только с ПП, а затухает только мода резонатора, то в данном случае скорость затухания (в пределе  $\tau_a \ll \Omega_R^{-1}$ ) была бы равна  $\Omega_R^2\tau_a$  (см. [59]). В нашем случае КТ взаимодействует как с резервуаром, так и с НЧ, которая в данном случае играет роль низкодобротного резонатора, и скорость ее затухания определяется этими двумя взаимодействиями. Как показывает приведенный выше анализ, в предельном случае  $\tau_a \ll \Omega_R^{-1}$  скорость релаксации есть сумма скоростей релаксаций КТ в тепловой резервуар и в резонатор с потерями.

#### 4. КВАНТОВАЯ ТЕОРЕМА РЕГРЕССИИ, СПЕКТР СПАЗЕРА

Система (31) является линейной, что позволяет определить спектр спазера, воспользовавшись квантовой теоремой регрессии [68, 69]. Сформулируем эту теорему в виде, удобном для дальнейшего изложения. Рассмотрим систему, описываемую операторами

$$\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n)^T,$$

испытывающую воздействие марковских шумов ( $\langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{F}}(\tau'')^T \rangle = 2D\delta(\tau'' - \tau')$ ,  $D$  —

матрица корреляторов). Если динамика операторов описывается линейными уравнениями

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = M\hat{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{F}}(t), \quad (36)$$

где матрица  $M$  и вектор  $\boldsymbol{\xi}$ , вид которых определяется свойствами системы, не зависят от времени, то средние значения двухвременных корреляторов описываются линейной системой уравнений

$$\frac{\partial \langle \hat{\mathbf{X}}(t+\tau) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle}{\partial \tau} = M \langle \hat{\mathbf{X}}(t) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle + \boldsymbol{\xi} \langle \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle, \quad (37)$$

с той же самой матрицей  $M$  и вектором  $\boldsymbol{\xi}$  [68, 69].

Отсылая за деталями к работам [68–70], остановимся лишь на моментах, существенных для дальнейшего. Положим  $\boldsymbol{\xi} = 0$ , чего всегда можно добиться линейной заменой. Интегрирование системы (36) дает

$$\hat{\mathbf{X}}(t+\tau) = \exp(M\tau)\hat{\mathbf{X}}(t) + \exp(M(t+\tau)) \times \int_t^{t+\tau} d\tau' \exp(-M\tau') \hat{\mathbf{F}}(\tau'). \quad (38)$$

Умножая (38) справа на  $\hat{\mathbf{X}}^T(t)$  и проводя усреднение по квантовым состояниям, получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{X}}(t+\tau) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle &= \exp(M\tau) \langle \hat{\mathbf{X}}(t) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle + \\ &+ \exp(M(t+\tau)) \int_t^{t+\tau} d\tau' \exp(-M\tau') \times \\ &\times \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Второе слагаемое в правой части (39) равно нулю. Действительно, подставляя в него решение (38), имеем

$$\begin{aligned} &\exp(M(t+\tau)) \int_t^{t+\tau} d\tau' \exp(-M\tau') \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle = \\ &= \exp(M(t+\tau)) \int_t^{t+\tau} d\tau' \exp(-M\tau') \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{X}}^T(0) \rangle + \\ &+ \exp(M(t+\tau)) \int_t^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \exp(-M\tau') \times \\ &\times \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{F}}^T(\tau'') \rangle \exp(-M^T\tau'') \exp(M^T t). \end{aligned} \quad (40)$$

Поскольку в начальный момент времени резервуар и система некоррелированы,

$$\langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{X}}^T(0) \rangle = \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \rangle \langle \hat{\mathbf{X}}^T(0) \rangle = 0,$$

и первое слагаемое в правой части (40) обращается в нуль. Подставляя коррелятор шума

$$\langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{F}}^T(\tau'') \rangle = 2D \delta(\tau'' - \tau')$$

во второе слагаемое (40), получаем

$$\int_t^{t+\tau} d\tau' \int_0^t d\tau'' \delta(\tau'' - \tau') \exp(M(\tau - \tau')) \times \\ \times 2D \exp(M^T(t - \tau'')) = 0. \quad (41)$$

Действительно, область интегрирования в формуле (41)  $[t, t + \tau] \otimes [0, t]$  пересекается с носителем дельта-функции  $\delta(\tau'' - \tau')$  по множеству меры нуль в точке  $(t, t)$ . Таким образом, выражение (40) равно нулю.

Этот результат имеет ясный физический смысл. Поскольку шумы являются марковскими, то время корреляции между  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{F}}$  много меньше всех характерных времен задачи. Следовательно, коррелятор  $\langle \hat{\mathbf{F}}(\tau') \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle$  в выражении (39) обращается в нуль (см. также работы [68–70]).

Таким образом, выражение (40) принимает вид

$$\langle \hat{\mathbf{X}}(t + \tau) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle = \exp(M\tau) \langle \hat{\mathbf{X}}(t) \hat{\mathbf{X}}^T(t) \rangle. \quad (42)$$

Дифференцируя его по  $\tau$ , получаем формулу (37). Еще раз подчеркнем, что основными условиями выполнения квантовой теоремы регрессии являются линейность исходной системы операторных уравнений (36) и марковость шумов.

На первый взгляд, кажется, что при переходе от формулы (36) к (37) теряется информация о шумовых операторах резервуара. Однако это не так. Во-первых, согласно флуктуационно-диссипативной теореме [59, 61, 63, 68–70], корреляторы марковских шумов определяют константы затухания, которые входят в явном виде в матрицу  $M$  (это было показано в разд. 2, см. выражение (17)). Во-вторых, информация о температуре резервуара входит в операторные уравнения (27)–(30) через числа заполнения  $\bar{n}$  мод резервуара (подробнее см. работу [59]). Они были опущены, поскольку в оптическом диапазоне даже при комнатной температуре  $\bar{n} \ll 1$ .

Вернемся к рассмотрению спазера, работающего вблизи и ниже порога. Так как его динамика описывается линейной системой (31), то для расчета

его спектра излучения можно использовать квантовую теорему регрессии<sup>3)</sup>. Согласно теореме Винера–Хинчина, спектр электрического поля  $S(\omega)$  есть фурье-преобразование двухвременной корреляционной функции

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \langle \hat{E}^{(-)}(\tau) \hat{E}^{(+)}(0) \rangle \times \\ \times \exp(-i\omega\tau), \quad (43)$$

где  $\hat{E}^{(-)}$  и  $\hat{E}^{(+)}$  — отрицательно- и положительно-частотные части оператора электрического поля [59, 70]. Выбор такого упорядочения операторов соответствует спектру излучаемого диполями НЧ и КТ света [59, 72].

Для того чтобы вычислить коррелятор  $\langle \hat{E}^{(-)}(\tau) \hat{E}^{(+)}(0) \rangle$ , будем полагать, что дипольные моменты НЧ и двухуровневой КТ параллельны оси  $x$ , а точка наблюдения находится на оси  $z$ . Тогда в дальней зоне поле, излученное НЧ и КТ, определяется соотношениями [59]

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^2 |\boldsymbol{\mu}|}{c^2 |\mathbf{r}|} \hat{x} \langle \hat{d}(t - |\mathbf{r}|/c) \rangle, \\ \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^2 |\boldsymbol{\mu}|}{c^2 |\mathbf{r}|} \hat{x} \langle \hat{d}^\dagger(t - |\mathbf{r}|/c) \rangle. \quad (44)$$

Учитывая, что для НЧ  $|\boldsymbol{\mu}| \hat{d} = |\boldsymbol{\mu}_{NP}| \hat{a}$ , а для двухуровневой КТ  $|\boldsymbol{\mu}| \hat{d} = |\boldsymbol{\mu}_{TLS}| \hat{\sigma}$ , получаем спектр излучения спазера в виде

$$S(\omega) \approx \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \exp(-i\omega\tau) \langle (\boldsymbol{\mu}_{NP} \hat{a}^\dagger(\tau) + \\ + \boldsymbol{\mu}_{TLS} \hat{\sigma}^\dagger(\tau)) (\boldsymbol{\mu}_{NP} \hat{a}(0) + \boldsymbol{\mu}_{TLS} \hat{\sigma}(0)) \rangle. \quad (45)$$

Таким образом, для вычисления спектра системы необходимо знать следующие корреляторы:

$$\langle \hat{a}^\dagger(t + \tau) \hat{a}(t) \rangle, \quad \langle \hat{a}^\dagger(t + \tau) \hat{\sigma}(t) \rangle, \\ \langle \hat{\sigma}^\dagger(t + \tau) \hat{a}(t) \rangle, \quad \langle \hat{\sigma}^\dagger(t + \tau) \hat{\sigma}(t) \rangle.$$

Используя квантовую теорему регрессии, их можно найти, решая систему (37), в которой

$$\hat{X}_1 = \hat{a}, \quad \hat{X}_2 = \hat{\sigma}, \quad \hat{X}_3 = \hat{a} \hat{D}, \quad \hat{X}_4 = \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a},$$

а  $M$  определено в (32).

<sup>3)</sup> Данный подход успешно использовался для вычисления спектра резонансной флюоресценции [59, 68], спектра трехуровневой системы, находящейся вблизи металлической плоскости [71] и т. д.

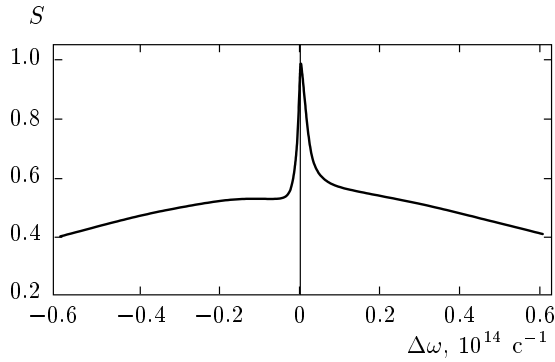


Рис. 2. Спектр спазера ниже порога генерации. Параметры те же, что и на рис. 1

На рис. 2 представлен спектр спазера, полученный по результатам численного решения системы уравнений (37). Он представляет собой широкую линию НЧ, на фоне которой есть узкий пик со значительно меньшей шириной.

Этот результат имеет ясный физический смысл. Решение системы (37) представляет собой сумму экспонент от произведения собственных чисел  $\lambda$  матрицы  $M$  на время. Фурье-образ такой функции есть сумма лоренцевых линий, центры которых определяются мнимыми частями собственных чисел  $\text{Im } \lambda$ , а полуширины — действительными  $\text{Re } \lambda$ . Собственные значения  $\lambda$  определяются выражениями (34) и (35), следовательно, спектр

$$S(\omega) \approx ((\omega - \omega_{SP})^2 + 1/\tau_a^2)^{-1} + \left( (\omega - \omega_{SP})^2 + (\Omega_R^2 \tau_a^{-1} + \tau_\sigma^{-1})^2 \right)^{-1} \quad (46)$$

представляет собой сумму двух лоренцевских линий: широкой линией НЧ, ширина которой определяется джоулевыми потерями в металле порядка  $\tau_a^{-1}$ , и узкой линией КТ, ширина которой, составляющая примерно  $\Omega_R^2 \tau_a^{-1} + \tau_\sigma^{-1}$ , определяется взаимодействием между НЧ и КТ.

Таким образом, ширина линии спазера, «работающего» вблизи и ниже порога, не описывается формулами типа Шавлова–Таунса, которые обычно применяются для вычисления ширины линии спектра квантовых генераторов [53, 54, 58, 61] при большом числе квантов. Это отличие связано с тем, что в режиме малого числа квантов помимо фазовых флуктуаций поля излучения существенную роль играют также и амплитудные. Выше было показано, что их корректный учет может быть проведен при помощи процедуры обрезания цепочки урав-

нений (18)–(20) и применения квантовой теоремы регрессии (37).

## 5. ВЫВОДЫ

В работе проведен анализ работы спазера в подпороговом режиме. Дан корректный расчет ширины линии работающего вблизи и ниже порога спазера, основанный на квантовой теореме регрессии. Данный подход применим при  $n \leq 1$ . Показано, что учет квантовых флуктуаций и корреляций существен при описании работы спазера ниже порога, что приводит к беспороговому поведению спазера за счет спонтанного излучения ПП возбужденной КТ. Уравнение, описывающее динамику двухвременной автокорреляционной функции,  $\langle (a^\dagger(\tau) + \sigma^\dagger(\tau))(a(0) + \sigma(0)) \rangle$ , получается из системы для дипольных моментов (27)–(30), которые в стационарном состоянии равны нулю. Однако, и это очень важно, начальное условие для нее,  $\langle (a^\dagger(0) + \sigma^\dagger(0))(a(0) + \sigma(0)) \rangle$ , определяется системой уравнений для энергии НЧ и КТ (21)–(24), которая и дает ненулевое значение энергий в стационарном состоянии вследствие спонтанного излучения.

Показано (выражение (38)), что форма линии спазера не описывается формулой Шавлова–Таунса и представляет собой широкую линию НЧ, на фоне которой имеется узкий пик, связанный с линией КТ. Ширина пика зависит как от ширины линии КТ (т. е. от затухания в КТ), так и от величины взаимодействия между НЧ и КТ.

Данное рассмотрение чрезвычайно важно в свете ведущейся в настоящее время интенсивной дискуссии [20, 40, 47–49, 73–75] о применении подпороговых спазеров для компенсации потерь в метаматериалах.

Авторы выражают благодарность Ю. Е. Лозовику, И. Е. Проценко, А. В. Шипулину и Н. М. Щелкачеву за полезное обсуждение данной работы. Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 12-02-01093\_а, 13-02-00407), гранта PSC-CUNY, а также фонда некоммерческих программ «Династия».

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Plasmonic Nanoguides and Circuits*, ed. by S. I. Bozhevolnyi, Singapore, Pan Stanford Publishing (2009).
2. D. E. Chang, A. S. Sorensen, P. R. Hemmer et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 053002 (2006).



3. S. V. Garonenko, *Introduction to Nanophotonics*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
4. D. Martin-Cano, L. Martin-Moreno, F. J. Garcia-Vidal et al., *Nano Lett.* **10**, 3129 (2010).
5. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, Москва (2010).
6. E. Plum, V. A. Fedotov, P. Kuo et al., *Opt. Express* **17**, 8548 (2009).
7. M. Premaratne and G. P. Agrawal, *Light Propagation in Gain Medium*, Cambridge University Press, New York (2011).
8. I. E. Protsenko, A. V. Uskov, K. E. Krotova et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **107**, 012010 (2008).
9. I. E. Protsenko, A. V. Uskov, O. A. Zaimidoroga et al., *Phys. Rev. A* **71**, 063812 (2005).
10. A. Ridolfo, O. Di Stefano, N. Fina et al., *Phys. Rev. Lett.* **105**, 263601 (2010).
11. A. S. Rosenthal and T. Ghannam, *Phys. Rev. A* **79**, 043824 (2009).
12. M. I. Stockman, *New J. Phys.* **10**, 025031 (2008).
13. M. I. Stockman, *J. Opt.* **10**, 024004 (2010).
14. *Nanoscale Photonics and Optoelectronics*, ed. by Z. M. Wang, A. Neogi, Springer, Berlin (2010).
15. N. I. Zheludev, S. L. Prosvirnin, N. Papasimakis et al., *Nat. Photon.* **2**, 351 (2008).
16. Л. Новотный, Б. Хехт, *Основы нанооптики*, Физматлит, Москва (2009).
17. С. А. Майер, *Плазмоника: Теория и приложения. Регулярная и хаотическая динамика*, Москва-Ижевск (2011).
18. А. К. Сарычев, В. М. Шалаев, *Электродинамика метаматериалов*, Научный мир, Москва (2011).
19. *Nanophotonics with Surface Plasmons*, ed. by V. M. Shalaev, S. Kawata, Elsevier, Amsterdam (2007).
20. E. S. Andrianov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko et al., *Opt. Lett.* **36**, 4302 (2011).
21. E. S. Andrianov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko et al., *Opt. Express* **19**, 24849 (2011).
22. E. S. Andrianov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko et al., *Phys. Rev. B* **85**, 1 (2012).
23. A. A. Lisiansky, I. A. Nechepurenko, A. V. Dorofeenko et al., *Phys. Rev. B* **84**, 153409 (2011).
24. Е. С. Андрианов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеев и др., *РЭ* **56**, 1501 (2011).
25. Е. С. Андрианов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеев и др., *РЭ* **57**, 114 (2012).
26. *Surface-Enhanced Raman Scattering*, ed. by K. Kneipp, M. Moskovits, H. Kneipp, Springer, Dordrecht (2006).
27. *Surface Enhanced Raman Spectroscopy: Analytical, Biophysical and Life Science Applications*, ed. by S. Schlucker, Wiley, Weinheim (2011).
28. D. J. Bergman and M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027402 (2003).
29. R. Berndt, J. K. Gimzewski, and P. Johansson, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3796 (1991).
30. E. J. Blackie, E. C. Le Ru, P. G. Etchegoin, *J. Amer. Chem. Soc.* **131**, 14466 (2009).
31. E. J. Blackie, E. C. Le Ru, M. Meyer et al., *J. Phys. Chem.* **111**, 13794 (2007).
32. Y.-J. Lu, J. Kim, H.-Y. Chen et al., *Science* **337**, 450 (2012).
33. D. Y. Fedyanin and A. V. Arsenin, *Opt. Express* **19**, 12524 (2011).
34. R. A. Flynn, C. S. Kim, I. Vurgaftman et al., *Opt. Express* **19**, 8954 (2011).
35. M. T. Hill, M. Marell, E. S. P. Leong et al., *Opt. Express* **17**, 11107 (2009).
36. S. A. Ramakrishna and J. B. Pendry, *Phys. Rev. B* **67**, 201101 (2003).
37. J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
38. A. K. Sarychev and G. Tartakovsky, *Phys. Rev. B* **75**, 1 (2007).
39. А. П. Виноградов, Е. С. Андрианов, А. А. Пухов и др., *УФН* **182**, 1122 (2012).
40. E. S. Andrianov, D. G. Baranov, A. A. Pukhov et al., *Opt. Exp.* **21**, 13467 (2013).
41. A. K. Popov and V. M. Shalaev, *Opt. Lett.* **31**, 2169 (2006).
42. J. Yang, M. Huang, C. Yang et al., *Opt. Express* **17**, 19656 (2009).
43. P. A. Belov, C. R. Simovski, and P. Ikonen, *Phys. Rev. B* **71**, 193105 (2005).
44. Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong et al., *Science* **315**, 1686 (2007).

45. M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave et al., *Nature* **460**, 1110 (2009).
46. S. Xiao, V. P. Drachev, A. V. Kildishev et al., *Nature* **466**, 735 (2010).
47. A. Fang, T. Koschny, and C. M. Soukoulis, *J. Opt.* **12**, 024013 (2010).
48. A. Fang, T. Koschny, M. Wegener et al., *Phys. Rev. B* **79**, 241104(R) (2009).
49. S. Wuestner, A. Pusch, K. L. Tsakmakidis et al., *Phys. Rev. Lett.* **105**, 127401 (2010).
50. В. С. Зуев, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Препринт № 3 (2006).
51. I. R. Gabitov, B. Kennedy, and A. I. Maimistov, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **16**, 401 (2010).
52. И. Е. Проценко, *УФН* **182**, 1116 (2012).
53. A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, California (1986).
54. А. С. Чиркин, А. В. Шипулин, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 129 (2011).
55. S. André, V. Brosco, A. Shnirman et al., *Phys. Rev. A* **79**, 053848 (2009).
56. S. André, P.-Q. Jin, V. Brosco et al., *Phys. Rev. A* **82**, 053802 (2010).
57. А. Н. Лагарьков, А. К. Сарычев, В. Н. Кисель и др., *УФН* **179**, 1018 (2009).
58. Р. Пантел, Г. Путхов, *Основы квантовой электроники*, Мир, Москва (1972).
59. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Наука, Москва (2003).
60. L. Kuiru, L. Xiangting, M. I. Stockman et al., *Phys. Rev. B* **71**, (2005).
61. Г. Хакен, *Лазерная светодинамика*, Мир, Москва (1988).
62. А. В. Федоров, И. Д. Рухленко, А. В. Баранов и др., *Оптические свойства полупроводниковых квантовых точек*, Наука, Санкт-Петербург (2011).
63. H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
64. M. Bayer and A. Forchel, *Phys. Rev. B* **65**, 041308 (2002).
65. J. M. Harbold, H. Du, T. D. Krauss et al., *Phys. Rev. B* **72**, 195312 (2005).
66. T. S. Sosnowski, T. B. Norris, H. Jiang et al., *Phys. Rev. B* **57**, R9423 (1998).
67. F. Stietz, J. Bosbach, T. Wenzel et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5644 (2000).
68. Y. Yamamoto and A. Imamoglu, *Mesoscopic Quantum Optics*, John Wiley & Sons, inc., New York (1999).
69. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986).
70. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, Weinheim (2004).
71. C. Sanchez-Muñoz, A. Gonzalez-Tudela, and C. Tejedor, *Phys. Rev. B* **85**, 125301 (2012).
72. J. D. Cresser, *Phys. Rep.* **94**, 47 (1983).
73. J. B. Pendry and S. A. Maier, *Phys. Rev. Lett.* **107**, (2011).
74. M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 156802 (2011).
75. M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **107**, (2011).