

О ПОРОГОВОЙ АНИЗОТРОПИИ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

В. Л. Поляченко^а, Е. В. Поляченко^{а}, И. Г. Шухман^{б**}*

^а *Институт астрономии Российской академии наук
119017, Москва, Россия*

^б *Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Иркутск, Россия*

Поступила в редакцию 15 марта 2011 г.

В анизотропных бесстолкновительных звездных системах с преобладанием радиальных движений над трансверсальными, как правило, возникает неустойчивость радиальных орбит. На примере простейшего анизотропного обобщения политропных моделей сферических скоплений мы показываем, что инкременты неустойчивости при приближении к изотропному пределу становятся экспоненциально малыми. Учитывая конечность времени жизни реальных астрономических объектов, следует считать, что эти системы становятся устойчивыми при некотором конечном значении радиальной анизотропии.

1. ВВЕДЕНИЕ

В отличие от плазмы, гравитирующая среда далеко не так богата неустойчивостями. Действительно, изложению теории устойчивости плазмы посвящены многотомные монографии (например, [1–3]), в то время как для перечисления основных неустойчивостей гравитирующих систем более чем достаточно пальцев одной руки. При этом одна из них, джинсовская, особенно выделяется среди них благодаря разнообразию проявлений и исполняемых ею функций. Именно эта, безусловно главная в гравитирующих системах неустойчивость, не имеет аналога в плазме. Это связано с фундаментальным различием между электростатическим и гравитационным взаимодействиями: если одноименные электрические заряды отталкиваются, то аналогичные гравитационные «заряды», коими являются массы, притягиваются. Формально это проявляется в различных знаках правой части уравнения Пуассона, $\Delta\varphi = -4\pi\rho_e$ (φ — электрический потенциал, ρ_e — плотность зарядов) в случае электростатики и $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ (Φ — гравитационный потенциал, ρ — плотность массы, G — гравитационная постоянная) в гравитации. Соответственно, при возмущениях достаточно холодной однородной плазмы в ней возникают электро-

статические (ленгмюровские) колебания, а гравитирующая среда распадается на части из-за джинсовской неустойчивости. Минимальный размер этих частей равен так называемой критической длине волны Джинса λ_{cr} : неустойчивыми оказываются все масштабы, большие λ_{cr} . Благодаря этой неустойчивости, напомним, образуются звезды, их скопления и практически вся наблюдаемая сложная иерархическая структура Вселенной. Подробности можно найти, например, в книге [4], значительная часть которой посвящена подробному рассмотрению различных аспектов джинсовской неустойчивости. Для систем конечных размеров ее причиной является слишком малая дисперсия скоростей частиц, заставляющая такие системы делиться на меньшие части.

Данная выше интерпретация джинсовской неустойчивости как происходящей в недостаточно «горячих» системах и приводящей к их распаду на более или менее мелкие части, основана на подходе самого Джинса, рассматривавшего неустойчивость в газовой среде. Ближайшим аналогом газовой среды в звездных системах являются изотропные скопления, в которых дисперсия скоростей звезд одинакова во всех направлениях. В этом случае из условия равновесия может вытекать, что такие системы в принципе не могут делиться на более мелкие части, так как размер последних был бы меньше критической джинсовской длины волны. Именно так и происхо-

*E-mail: epolyach@gmail.com

**E-mail: shukhman@iszf.irk.ru

дит в реальных изотропных звездных скоплениях, которые во всех сколько-нибудь разумных случаях устойчивы (подробнее см., например, [5]).

Однако звездные системы, в отличие от газовых, являются в большинстве случаев бесстолкновительными и потому могут быть анизотропными: дисперсии скоростей по разным направлениям могут отличаться друг от друга, в том числе и сильно. В этой ситуации джинсовская неустойчивость может развиваться, например, по одному из направлений, прежде всего по тому, в котором система является наиболее холодной.

Интересной и важной для звездных систем разновидностью джинсовской неустойчивости такого именно рода является так называемая неустойчивость радиальных орбит, открытая авторами [6]. В некоторых случаях, наиболее интересных с точки зрения астрофизических приложений, ее можно определить как джинсовскую неустойчивость в системе сильно вытянутых по радиусу орбит звезд. Последние при этом выступают как целое и играют роль отдельных частиц в «обычной» джинсовской неустойчивости. Эта неустойчивость может быть ответственной, например, за наблюдаемую несферичность звездных скоплений, которая могла развиться при их формировании в процессе коллапса (когда, очевидно, образуются системы с превалированием радиально вытянутых орбит).

При переходе от чисто радиальных орбит к округлым орбитам неустойчивость, разумеется, не может исчезнуть сразу же. Единственное, что мы можем гарантировать — это заведомую устойчивость всех изотропных равновесий сферических скоплений. Причиной рассматриваемой неустойчивости является как раз анизотропия скоростного распределения звезд с преобладанием радиальной компоненты.

Первое исследование устойчивости конкретной серии моделей сферических звездных скоплений [7], было выполнено авторами [8]. Активная работа, предпринятая в последующие годы, проводилась как с помощью решения линейной задачи на собственные значения матричным методом [9–14], так и различными версиями методов моделирования N тел (N -body) [15–20].

Вообще говоря, есть две принципиально отличающиеся друг от друга возможности перехода от устойчивых систем к неустойчивым. Первая: неустойчивость стабилизируется только при полном устранении вызывающей их причины, т. е. при изотропизации фазовой плотности. И вторая: для этого достаточно лишь уменьшения анизотропии до неко-

торого уровня, при котором система может оставаться, вообще говоря, даже сильноанизотропной.

Цель настоящей работы состоит в выборе между указанными альтернативными возможностями. Исследование проводится на примере простейшей серии анизотропных моделей сферических скоплений звезд с функциями распределения

$$F(E, L) = C(s, q) L^{-s} (-E)^q, \quad \Phi_0(0) < E < 0, \quad (1)$$

где $C(s, q) = \text{const}$, v — скорость звезды,

$$L = r v_{\perp} = r \sqrt{v_{\theta}^2 + v_{\varphi}^2}$$

и

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \Phi_0(r) = \frac{1}{2} (v_r^2 + v_{\perp}^2) + \Phi_0(r)$$

— соответственно угловой момент и энергия звезды, s и q — параметры модели. Предполагается, что аддитивная постоянная в невозмущенном гравитационном потенциале $\Phi_0(r) \equiv -\Psi(r)$ выбрана так, что $\Phi_0(R) = -\Psi(R) = 0$, где R — радиус системы. Интеграл

$$\rho_0(r) = 2\pi \int dv_r v_{\perp} dv_{\perp} F,$$

определяющий плотность, имеет смысл только для $q > -1$, $s > 2$. Явное выражение для плотности есть

$$\rho_0(r) = A(s, q) r^{-s} \Psi^{q+(3-s)/2}, \quad (2)$$

где коэффициент $A(s, q)$ связан с $C(s, q)$ соотношением

$$A(s, q) = C(s, q) (2\pi)^{3/2} 2^{-s/2} \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(-s/2+1)}{\Gamma(q+(5-s)/2)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Обычно рассматриваем безразмерные величины, полагая

$$4\pi G = 1, \quad A = 1, \quad \Psi_0(0) = 1, \quad (3)$$

что дает явное выражение для коэффициента $C(s, q)$ в (1):

$$C(s, q) = \frac{2^{s/2}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\Gamma(q+(5-s)/2)}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-s/2)}.$$

Функции распределения (1) представляют простейшее обобщение политропных моделей, которые соответствуют $s = 0$:

$$F_{iso}(E) = C(0, q) (-E)^q. \quad (4)$$

Политропными эти модели называются по той причине, что, вычисляя с помощью выражения (4) плотность ρ_0 и аналог гидродинамического давления P ,

мы убеждаемся в том, что давление и плотность связаны стандартным политропным соотношением: $P \propto \rho_0^\nu$, где $\nu = (2q + 5)/(2q + 3)$. Напомним, что теория устойчивости звездных систем была начата Антоновым [21] с его знаменитого (и до сих пор наиболее часто цитируемого) доказательства устойчивости именно всех политропных моделей (4) при $q > 0$, т. е. убывающих с энергией.

Более разнообразные результаты можно ожидать для обобщенных политропных моделей (1). Для предельного случая $s = 2$ мы получаем из (1) систему с чисто радиальными движениями звезд. Это следует из легко проверяемой формулы для отношения кинетических энергий радиального T_r и поперечных T_\perp движений звезд в моделях (1),

$$\xi \equiv \frac{2T_r}{T_\perp} = \frac{2}{2-s}. \quad (5)$$

Как и должно быть, для изотропного случая ($s = 0$) получается $\xi = 1$, а для системы с чисто радиальными орбитами ($s = 2$) имеем $\xi = \infty$. Таким образом, при изменении параметра s от 0 до 2 получаем все представляющие интерес скопления, от изотропных до систем с чисто радиальными орбитами¹⁾. При этом нам заранее известно, что изотропные распределения устойчивы (по крайней мере, при $q > 0$), в то время как радиальные — неустойчивы. Поэтому можно было бы предположить, что существует какое-то критическое значение параметра s , s_{cr} , разделяющее устойчивые (при $s < s_{cr}$) и неустойчивые (при $s > s_{cr}$) системы.

Расчеты, результаты которых были приведены в [9], показали, что для рассматриваемых обобщенных политроп инкремент неустойчивости становится малым при $s \approx 0.6$, почти независимо от q . Поэтому естественно было предположить, что это значение параметра s , соответствующее $\xi \approx 1.4$, является тем самым критическим значением, которое отделяет устойчивые модели от неустойчивых. Этот результат был фактически подтвержден авторами работы [17], которые совершенно другим методом (путем традиционного численного моделирования N тел) исследовали устойчивость тех же моделей (1) и пришли к тем же выводам.

На этом фоне неожиданными оказались результаты авторов работы [23], посвященные тем же моделям обобщенных политроп. Используя приближенное уравнение для неустойчивых мод с малыми ин-

крементами нарастания, они показали, что неустойчивыми являются радиально анизотропные системы, сколь угодно близкие к изотропным.

Однако из-за некорректности, допущенной при выводе упрощенного интегродифференциального уравнения, эти авторы получили рост инкремента неустойчивости по мере приближения модели к изотропному пределу. На примере двух численно рассчитанных ими моделей, а именно, $q = 1$, $s = 2/3$ (модель В) и $q = 1$, $s = 1/3$ (модель С) они, в частности, продемонстрировали наличие неустойчивости и убывание инкрементов для квадрупольной моды $l = 2$ с уменьшением параметра s для трех мод (соответственно, с одним, двумя и тремя узлами по радиусу радиальной части собственной функции $\chi_n(r)$ возмущенного потенциала $\delta\Phi(r, \theta) \propto \chi_n(r) P_2(\cos\theta)$ (здесь индекс « n » соответствует числу узлов). Однако инкремент основной моды, $n = 0$, которая является самой неустойчивой, оказался в их расчетах не только не малым по сравнению с характерной динамической частотой звезды²⁾, $\Omega_D = \sqrt{GM/2R^3}$, но и растущим по мере приближения к изотропному случаю. Такое поведение, конечно, совершенно неестественно: поскольку любое изотропное распределение должно быть устойчивым, следует ожидать, что в действительности инкременты неустойчивости всех мод, включая, разумеется, и самую неустойчивую безузловую моду, должны уменьшаться при стремлении к изотропии (обращаясь в нуль в изотропном пределе). Авторы работы [23] исключили аномально растущую моду по формальной причине, поскольку она якобы не удовлетворяет условию малости инкрементов нарастания. Как будет показано ниже, при корректном выводе уравнения удастся получить ожидаемое поведение инкрементов нарастания для всех мод.

С другой стороны, сделанный в монографии [9] вывод об устойчивости всех моделей с $s < s_{cr}$ также нуждается в проверке. Дело в том, что в использованном там матричном методе, являющемся обобщением матричного метода [24] для дисков, в случае функций распределений, имеющих степенную особенность (при $L = 0$) (а к их числу как раз и относятся наши обобщенные политропы при $s > 0$), возникают трудности с адекватным подбором систем функций, по которым ведется разложение возмущенных потенциала и плотности. Обычно используемые для

¹⁾ При $s > 0$ сферические системы являются трансверсально анизотропными и не представляют особого интереса, поскольку, как правило, являются устойчивыми [11, 22].

²⁾ Поскольку именно таким образом определенная характеристическая частота была принята авторами работы [23], мы для сравнения с их цифрами тоже пользуемся этим определением.

этой цели системы типа (9) и (10) (см. разд. 2) не очень удобны в этом случае ввиду слишком «хорошего» поведения этих функций при $r = 0$. По этой причине для достижения удовлетворительной точности счета требуется включить в разложение много членов ряда N . Если же мы ограничиваемся сравнительно небольшим числом членов разложения (скажем, $N = 5$), то мы фактически исследуем не истинные распределения (1) с особенностью, а близкие к ним сглаженные распределения. Доверие к результатам вычислений с помощью модели N тел для интересующих нас распределений с особенностью также не слишком велико, по той же, по сути дела, причине.

Резюмируя сказанное, мы заключаем, что исследование устойчивости обобщенных политроп (1) при малых значениях инкрементов неустойчивости, особенно вблизи изотропного предела ($s = 0$), должно быть проведено заново. С этой целью мы применили несколько иной подход к задаче нахождения собственных частот, а именно, подход, основанный на использовании (исправленного) интегрального уравнения. Последнее выводится ниже в разд. 3 с помощью полного интегрального уравнения, верного для любых, а не только малых значений собственных частот. Это полное уравнение было выведено нами ранее в статьях о гравитационной конусной неустойчивости в сферических системах [25, 26], являющейся аналогом конусной неустойчивости в плазменных ловушках [27]. Однако для полноты в разд. 2 мы предварительно вкратце напоминаем суть двух альтернативных подходов (т. е. матричного подхода и подхода, использующего интегральное уравнение) и поясняем, в чем состоит преимущество последнего перед более традиционным первым подходом применительно к интересующей нас задаче. Результаты решения этого (упрощенного применительно к случаю малых частот) интегрального уравнения для обобщенных политроп приведены в разд. 4. Главный результат заключается в том, что хотя неустойчивость формально имеет место при любой степени приближения к изотропному пределу, она становится там экспоненциально малой (т. е., можно сказать, фактически отсутствует). Заключительные замечания содержатся в последнем разд. 5.

2. ДВА ПОДХОДА К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ МОД В СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кратко напомним суть двух альтернативных подходов к задаче определения собственных частот.

2.1. Матричный подход

Матричное уравнение для любых сферических систем звезд было выведено в работе [8]. В ней ранее предложенное [24] аналогичное матричное уравнение для дисков было распространено на сферические скопления. Уравнение имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} [M_{mn}^{(l)}(\omega) + \delta_{mn}] a_n = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Здесь a_n — коэффициенты разложения радиальной части возмущенного потенциала

$$\delta\Phi = \chi(r) P_l(\cos\theta) e^{-i\omega t}$$

и радиальной части возмущенной плотности

$$\delta\rho = \Pi(r) P_l(\cos\theta) e^{-i\omega t}$$

по функциям, которые являются членами какой-либо биортонормальной системы $\{\chi_k^{(l)}(r)\}, \{\rho_k^{(l)}(r)\}$:

$$\chi(r) P_l(\cos\theta) = P_l(\cos\theta) \sum_k a_k \chi_k^{(l)}(r), \quad (7)$$

$$\Pi(r) P_l(\cos\theta) = P_l(\cos\theta) \sum_k a_k \rho_k^{(l)}(r), \quad (8)$$

где $P_l(z)$ — полиномы Лежандра. Заметим, что возможность выбора возмущенного потенциала в виде, не зависящем от азимутальной переменной φ обусловлена тем, что собственная частота возмущений в сферически-симметричных распределениях вида $F = F(E, L)$ не зависит от азимутального числа m . Поэтому вместо угловой зависимости общего вида,

$$\delta\Phi = \chi(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t},$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферическая функция, мы можем ограничиться рассмотрением более простых аксиально-симметричных возмущений

$$\delta\Phi = \chi(r) P_l(\theta) e^{-i\omega t}.$$

Биортонормальность означает, что

$$\int_0^R dr r^2 \rho_k^{(l)}(r) \chi_n^{(l)}(r) = -\delta_{kn}.$$

Часто используемый (для сферических систем конечного радиуса R) биортонормальный набор, впервые предложенный в работе [8], выражается через так называемые сферические функции Бесселя:

$$\chi_n^{(l)}(r) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_n} \frac{1}{\sqrt{r} |J_{l+1/2}(\alpha_n)|} J_{l+1/2}\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right), \quad (9)$$

$$\rho_n^{(l)}(r) = -\frac{\sqrt{2}}{R^2} \frac{\alpha_n}{\sqrt{r} |J_{l+1/2}(\alpha_n)|} J_{l+1/2}\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right), \quad (10)$$

а величины α_n должны определяться из уравнения $J_{l-1/2}(\alpha_n) = 0$.

Громоздкие выражения для матричных элементов $M_{mn}^{(l)}(\omega)$ мы здесь не воспроизводим; различные представления этих матриц можно найти в работе [8] или в монографии [9]. Для практического решения задачи на компьютере нужно перейти от бесконечномерного матричного уравнения (6) к некоторой конечной системе уравнений, т. е. выполнить процедуру обрезания, выбирая из полного (бесконечного) детерминанта системы (6) левый верхний угол размером $N \times N$. При таком способе обрезания из полного уравнения исключаются те члены, которые не существенны для интересующих нас наиболее крупномасштабных мод (см. выражение (9) для $\chi_k^{(l)}(r)$, из которого следует, что большим k соответствуют быстро осциллирующие функции).

Одним из недостатков данного подхода является необходимость процедуры обрезания. Это означает, что для достаточно хорошего воспроизведения собственной функции радиальной части возмущенного потенциала с помощью довольно ограниченного числа базисных функций, этот набор базисных функций должен быть очень хорошо подобран (адаптирован) к рассматриваемой модели. Практически эта процедура может быть реализована только перебором различных вариантов биортонормированного базиса и сравнением получаемых результатов. Это чрезвычайно трудоемкая процедура. Вторым существенным неудобством матричного подхода является то обстоятельство, что искомая собственная частота ω входит в уравнение

$$\text{Det}||M_{mn}(\omega) + \delta_{mn}|| = 0$$

сложным нелинейным образом. Поэтому поиск корней этого уравнения представляет довольно сложную задачу.

Указанных недостатков можно избежать при ином подходе, который применительно к задачам об определении спектра мод в дисковых системах, был впервые предложен и реализован в работах [28, 29].

2.2. Интегральное уравнение

Альтернативный подход состоит в сведении задачи к интегральному уравнению (а, точнее, к системе интегральных уравнений). Для сферических систем это уравнение было приведено в работе [25]. Мы здесь не будем воспроизводить его вывод заново (он дан в Приложении статьи [26]), напомним лишь, что вывод проводится в технике переменных действие–угол (см., например, [30]) и поясним смысл

входящих сюда обозначений. Итак, уравнение имеет вид

$$\phi_{l_1, l_2}(E, L) = \frac{4\pi G}{2l+1} \sum_{l'_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l'_2=-l}^l D_{l'}^{l'_2} \times \\ \times \iint \frac{dE' L' dL'}{\Omega_1(E', L')} \phi_{l'_1, l'_2}(E', L') \Pi_{l_1, l_2; l'_1, l'_2}(E, L; E', L') \times \\ \times \frac{\Omega_{l'_1, l'_2}(E', L')(\partial F / \partial E') + l'_2(\partial F / \partial L')}{\omega - \Omega_{l'_1, l'_2}(E', L')}. \quad (11)$$

Здесь $\Omega_{l_1 l_2} \equiv l_1 \Omega_1 + l_2 \Omega_2$, интегрирование идет по криволинейному треугольнику на фазовой плоскости (E', L') : $\Phi_0(0) < E' < 0$, $0 \leq L' \leq L_{circ}(E')$, где $L_{circ}(E)$ – угловой момент звезды с энергией E на круговой орбите. Здесь индексы l_1 и l_2 соответствуют разложению пространственной зависимости возмущенного потенциала по гармоникам угловых переменных w_1 и w_2 , сопряженных соответственно переменным действия I_i ($i = 1, 2, 3$):

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - \frac{L^2}{r^2}} dr, \\ I_2 = L, \quad I_3 = L_z,$$

т. е.

$$\delta\Phi(I_1, I_2, I_3, w_1, w_2) = \sum_{l_1 l_2} (\delta\Phi)_{l_1 l_2}(I_1, I_2, I_3) \times \\ \times \exp[i(l_1 w_1 + l_2 w_2)].$$

Радиальная угловая переменная w_1 связана с r соотношением

$$w_1 = \Omega_1 \int_{r_{min}}^r \frac{dr'}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r') - L^2/r'^2}},$$

а явное выражение для угловой переменной w_2 можно найти в цитированных работах. В случае выбора возмущенного потенциала в виде, не зависящем от азимутальной переменной φ , величина $\delta\Phi$ не зависит от угловой переменной w_3 .

Орбитальные частоты $\Omega_{1,2}(E, L)$ есть

$$\frac{1}{\Omega_1} = \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}}, \\ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{L}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2E - 2\Phi_0(r) - L^2/r^2}} \equiv \frac{\Delta\varphi}{\pi},$$

где $\Delta\varphi(E, L)$ – угол поворота звезды (в плоскости орбиты) при прохождении ею от r_{min} до r_{max} . Для

несингулярных в центре потенциалов, $|\Phi_0(0)| < \infty$, соответствующих моделям обобщенных политроп, которыми мы здесь интересуемся, этот угол в случае сильно вытянутых по радиусу орбит (т. е. для орбит с малыми L) равен $\pi/2$, а отношение частот для таких орбит есть $\Omega_2/\Omega_1 = 1/2$. Такие орбиты, представляющие собой медленно прецессирующие симметричные относительно центра системы эллипсы, называют 2:1-орбитами.

Ядро интегрального уравнения определено следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{l_1, l_2; l'_1, l'_2}(E, L; E', L') &= \oint dw_1 \times \\ &\times \oint dw'_1 \mathcal{F}_l(r(E, L; w_1), r'(E', L'; w'_1)) \times \\ &\times \cos \Theta_{l_1 l_2}(E, L; w_1) \cos \Theta_{l'_1 l'_2}(E', L'; w'_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_{l_1 l_2}(E, L; w_1) &= \frac{\Omega_{l_1 l_2}}{\Omega_1} w_1 - l_2 \delta\varphi(E, L; w_1), \\ \delta\varphi(E, L, w_1) &= L \int_{r_{min}(E, L)}^{r(E, L, w_1)} \frac{dx}{x \sqrt{[2E - 2\Phi_0(x)] x^2 - L^2}} \end{aligned}$$

— угол поворота частицы при прохождении ею по орбите от r_{min} до текущего r (так что $\delta\varphi(E, 0, \pi) = \Delta\varphi(E, 0) = \pi/2$), а функция $\mathcal{F}_l(r, r') = r_{<}^l / r_{>}^{l+1}$, $r_{<} \equiv \min(r, r')$, $r_{>} \equiv \max(r, r')$. Искомая собственная функция $\phi_{l_1 l_2}(E, L)$, для которой выписано интегральное уравнение, связана с радиальной частью возмущенного потенциала $\chi(r)$ соотношением

$$\begin{aligned} \phi_{l_1 l_2}(E, L) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \Theta_{l_1 l_2}(E, L; w_1) \times \\ &\times \chi(r(E, L, w_1)) dw_1, \end{aligned}$$

а коэффициенты D_l^k , входящие в уравнение (11), отличны от нуля только при четном $|l - k|$ и равны

$$D_l^k = \frac{1}{2^{2l}} \frac{(l+k)!(l-k)!}{\left[\left(\frac{1}{2}(l-k)\right)!\left(\frac{1}{2}(l+k)\right)!\right]^2}.$$

Несложно понять, что интегральное уравнение (11) может быть легко преобразовано к виду стандартной линейной задачи на собственные значения, где собственная частота входит линейным образом. Действительно, обозначая

$$f_{l_1 l_2} = \phi_{l_1 l_2}(E, L) \frac{\Omega_{l_1 l_2}(E, L) \partial F / \partial E + l_2 \partial F / \partial L}{\omega - \Omega_{l_1 l_2}(E, L)},$$

получаем интегральное уравнение для функции $f_{l_1 l_2}(E, L)$:

$$\begin{aligned} [\omega - \Omega_{l_1 l_2}(E, L)] f_{l_1 l_2}(E, L) &= \\ &= \left[\Omega_{l_1 l_2}(E, L) \frac{\partial F}{\partial E} + l_2 \frac{\partial F}{\partial L} \right] \phi_{l_1 l_2}(E, L), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{l_1 l_2}(E, L) &= \frac{4\pi G}{2l+1} \sum_{l'_1 l'_2} D_l^{l'_1 l'_2} \iint \frac{dE' L' dL'}{\Omega_1(E', L')} \times \\ &\times f_{l'_1 l'_2}(E', L') \Pi_{l_1 l_2; l'_1 l'_2}(E, L; E', L'). \end{aligned}$$

Эта задача на собственные значения может быть без особых проблем сведена к классической алгебраической задаче на собственные значения $A_{ij} X_j = \omega X_i$ (см. детали в работах [28, 29]). Преимущество данного подхода в том, что он не требует подбора подходящего биортонормированного базиса и поиска комплексных корней ω путем решения сложного нелинейного уравнения. Недостаток метода — довольно громоздкий расчет ядра Π , зависящего от четырех переменных $(L, E; L', E')$ и четырех индексов $(l_1, l_2; l'_1, l'_2)$. Однако в предельном случае интересующих нас здесь медленных мод возможны значительные упрощения. Это будет сделано в следующем разделе.

3. УПРОЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ МОД И АНАЛИЗ ЕГО СПЕКТРА

3.1. Вывод уравнения

Займемся упрощением этого уравнения для случая малых частот $\omega = i\gamma$ и четных значений l . Для этих целей удобнее оперировать с оригинальной формой уравнения в виде (11). В пределе $\gamma \rightarrow 0$ самый главный вклад в правую часть уравнения (11) дают слагаемые с $l'_1 = -l'_2/2$, поскольку величина $\Omega_{l'_1 l'_2}(E', L')$ пропорциональна скорости прецессии $\Omega_{pr}(E', L')$,

$$\Omega_{l'_1 l'_2}(E', L') = l'_2 \left(\Omega_2 - \frac{1}{2} \Omega_1 \right) = l'_2 \Omega_{pr}(E', L'), \quad (12)$$

которая при малых L тоже становится очень малой,

$$\Omega_{pr}(E, L) \approx \varpi(E) L. \quad (13)$$

Здесь функция $\varpi(E) \equiv \left[\partial \Omega_{pr}(E, L) / \partial L \right]_{L=0}$, и для потенциалов, таких что гравитационная сила в центре исчезает, $\Phi'_0(0) = 0$, выражается в виде (см., например, формулу (20) статьи [26])

$$\varpi(E) = \frac{\nu(E)}{\pi} \left[\int_0^{r_{max}(E)} \frac{dr}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r)}} - \frac{1}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(0)}} \right) - \frac{1}{r_{max}(E)\sqrt{2E - 2\Phi_0(0)}} \right], \quad (14)$$

где $\nu(E) \equiv \Omega_1(E, 0)$.

Заметим, что для того, чтобы скорость прецессии при малых L можно было представить в виде, пропорциональном первой степени L , т. е. в виде (13), производная невозмущенного потенциала, $\Phi'_0(r)$, должна обращаться в нуль в центре. Так, из работы [31] следует, что если потенциал ведет себя как $\Phi_0(r) = Kr^p + \text{const}$, причем p лежит в диапазоне $1 < p < 2$, то скорость прецессии пропорциональна первой степени L , $\Omega_{pr} \propto L$. При $0 < p < 1$ зависимость становится уже иной: $\Omega_{pr} \propto L^p$. В пограничном случае, $p = 1$, скорость прецессии $\Omega_{pr} \propto L \ln(1/L)$. Случай $p < 0$, когда сам потенциал уже становится сингулярным в центре, для моделей обобщенных политроп (1) невозможен. В следующем разделе показано, что потенциал для таких моделей ведет себя вблизи центра как $\Phi_0(r) = -1 + Kr^{2-s}$. Это означает, что при $s < 1$ скорость прецессии пропорциональна L . Ограничимся далее только этим диапазоном значений s .

Важно, что для моделей обобщенных политроп прецессия является прямой, $\varpi > 0$. Это означает, что направление угловой скорости прецессии эллиптической 2:1-орбиты совпадает с направлением угловой скорости движения частицы по орбите. Именно поэтому здесь следует ожидать неустойчивости радиальных орбит. Напомним, что для эллиптических 1:1-орбит (в ньютоновском поле массивного центрального тела) прецессия является ретроградной и неустойчивость радиальных орбит не развивается. Зато при определенных условиях для таких орбит возможна гравитационная конусная неустойчивость [25, 26, 32].

Далее, поскольку основной вклад в интеграл по L' дает узкая область малых моментов, $\varpi L' \sim \gamma$, там, где это несущественно, положим $L' = 0$. Полагая также в левой части уравнения (11) $l_1 = -l_2/2$, $L = 0$ и обозначая $\phi_{-l_2/2, l_2}(L, 0) = \Phi(E)$, запишем

$$\Phi(E) = -\frac{8\pi G}{2l+1} \sum_{l_2=2}^l D_l^{l_2} l_2'^2 \iint \frac{dE' L' dL'}{\nu(E')} \times \Phi(E') \Pi(E; E') \frac{\Omega_{pr}(E', L') \partial F / \partial L'}{\gamma^2 + l_2'^2 \Omega_{pr}^2(E', L')},$$

или, учитывая, что невозмущенная функция распределения (1) имеет степенную сингулярность при $L = 0$, т. е. $F(E, L) = g(E) L^{-s}$,

$$\Phi(E) = \frac{8\pi G}{2l+1} \sum_{k=2}^l D_l^k k^2 \times \iint \frac{dE'}{\nu(E')} \Phi(E') g(E') \varpi(E') \Pi(E; E') \times \int_0^{\infty} \frac{s L^{-s+1} dL}{\gamma^2 + k^2 \varpi^2(E') L^2}. \quad (15)$$

Интеграл по L , стоящий в правой части выражения (15), расходится при $\gamma = 0$. Это означает, что при малых γ он должен быть очень большим. Из структуры подынтегрального выражения ясно, что главный вклад в него дает узкая область по L вблизи нуля порядка $L \sim \gamma/\varpi$. Заменой $L = [\gamma/k|\varpi|]x$ интеграл приводится к виду

$$\int_0^{\infty} \frac{L^{-s+1} dL}{\gamma^2 + k^2 \varpi^2 L^2} = \gamma^{-s} (k|\varpi|)^{s-2} I(s),$$

где

$$I(s) \equiv \int_0^{\infty} \frac{x^{-s+1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sin(\pi s/2)}. \quad (16)$$

В результате вместо (11) получаем более простое одномерное интегральное уравнение

$$\lambda \Phi(E) = \int_{\Phi_0(0)}^0 \mathcal{K}(E, E') \Phi(E') dE' \quad (17)$$

с ядром

$$\mathcal{K}(E, E') = \frac{(4\pi)^2 G \text{sign } \varpi}{2l+1} \frac{s}{\sin(\pi s/2)} \sum_{k=2}^l D_l^k k^s \times \int_0^{r_{max}(E)} dr \int_0^{r_{max}(E')} dr' g(E') |\varpi|^{s-1}(E') \nu(E) \times [(2E' - 2\Phi_0(r')) (2E - 2\Phi_0(r))]^{-1/2} \mathcal{F}_l(r, r').$$

Собственное значение λ связано с инкрементом соотношением

$$\lambda = \gamma^s. \quad (18)$$

Из выражения для ядра становится понятно значение знака частоты прецессии ϖ как фактора, определяющего наличие или отсутствие неустойчивости

радиальных орбит. Поскольку при $\varpi > 0$ интегральный оператор в правой части уравнения (17) является положительно определенным, все его собственные значения положительны, и именно в этом случае можно ожидать наличия неустойчивости. Далее считаем $\varpi > 0$ и знаки модуля и «sign» опускаем.

Симметризуем ядро. Полагая

$$\Psi(E) = \Phi(E) \sqrt{g(E) \varpi^{s-1}(E) \nu^{-1}(E)},$$

получим интегральное уравнение

$$\lambda(s) \Psi(E) = \int_{-1}^0 dE' \mathcal{R}_s(E, E') \Psi(E') \quad (19)$$

с симметричным ядром

$$R_s(E, E') = \alpha(s) [g_s(E) g_s(E') \varpi^{s-1}(E) \times \varpi^{s-1}(E') \nu(E) \nu(E')]^{1/2} Q(E, E'), \quad (20)$$

где

$$Q(E, E') = \int_0^{r_{max}(E)} dr \int_0^{r_{max}(E')} dr' \mathcal{F}_l(r, r') \times [(2E' - 2\Phi_0(r')) (2E - 2\Phi_0(r))]^{-1/2}, \quad (21)$$

$$\alpha(s) = \frac{(4\pi)^2 G}{2l+1} \frac{s}{\sin(\pi s/2)} \sum_{k=2}^l D_l^k k^s. \quad (22)$$

Можно показать, что полученное в работе [23] одномерное интегродифференциальное уравнение (2.25) в пространстве радиальной переменной r полностью эквивалентно нашему одномерному интегральному уравнению (17) или (19) в пространстве переменной энергии E .

3.2. Качественный анализ спектра

Спектр уравнения (19) обязан иметь точку сгущения. Действительно, поскольку ядро $R_s(E, E')$ симметрично и является ядром оператора типа Гильберта–Шмидта в бесконечномерном пространстве, т.е. удовлетворяет условию $\iint dE dE' |R_s(E, E')|^2 < \infty$, спектр собственных значений задаваемого им оператора λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) веществен и обязан иметь точку сгущения, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ [33]. Это согласуется с утверждением авторов работы [23] относительно спектра полученного ими интегродифференциального уравнения (2.25).

Однако если мы внимательно посмотрим на вид ядра (20) интегрального уравнения, то мы обнаружим явное несоответствие здравому смыслу. А именно, в случае чисто изотропных распределений, т.е. при $s = 0$, ядро не обращается в нуль, а остается конечным. Посмотрим, к каким следствиям это приводит.

Запишем в явном виде предельную форму интегрального уравнения (19) с ядром, в котором положим $s = 0$. Пусть $\Lambda \equiv \lambda(0)$, тогда

$$\Lambda \Psi(E) = \int_{-1}^0 dE' \mathcal{R}_0(E, E') \Psi(E'), \quad (23)$$

$$\mathcal{R}_0(E, E') = \alpha(0) \sqrt{\frac{g_0(E) g_0(E') \nu(E) \nu(E')}{\varpi(E) \varpi(E')}} \times Q(E, E'), \quad (24)$$

где

$$\alpha(0) = \frac{32\pi G}{2l+1} \sum_{k=2}^l D_l^k.$$

В частности, для $l = 2$ имеем $D_2^2 = 3/8$ и, учитывая, что в наших единицах $4\pi G = 1$, получаем $\alpha(0) = 3/5$.

Ядро $\mathcal{R}_0(E, E')$ уравнения положительно, причем интеграл $\int_{-1}^0 \mathcal{R}_0(E, E') dE'$ есть величина порядка единицы. Поэтому спектр собственных значений Λ_n положителен и имеет точку сгущения $\Lambda = +0$. При этом важно, что Λ_0 и, возможно, еще несколько первых значений Λ_n тоже являются числами порядка единицы. Здесь индекс « n » у собственных значений Λ соответствует числу нулей собственной функции $\Psi(E)$ (а также числу нулей радиальной части потенциала $\chi(r)$). Важно отметить, что набор безразмерных чисел Λ_n универсален в том смысле, что зависит только от «базовой» изотропной модели

$$F(E) = g_0(E) \equiv C(0, q)(-E)^q,$$

от которой «ответвляется» данная анизотропная серия, когда параметр s становится отличным от нуля. Заметим, что в рассматриваемой задаче нет внутреннего малого параметра, связанного с наличием тяжелого почти однородного гало (такая задача была рассмотрена недавно [34]). Поэтому здесь нет оснований ожидать медленности прецессии всех орбит, а не только орбит, близких к радиальным, и, соответственно, нет оснований ожидать связанной с

Таблица. Величины первых семи собственных значений Λ_n (т.е. λ_n при $s = 0$) квадрупольной гармоники $l = 2$ и двух следующих сферических гармоник ($l = 4$ и $l = 6$) для серии с $q = 1.0$

$l \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6
2	3.7851	1.0301	0.4762	0.2637	0.1621	0.1068	0.0741
4	1.3838	0.4194	0.2215	0.1370	0.0921	0.0654	0.0484
6	0.7029	0.2209	0.1232	0.0803	0.0566	0.0419	0.0322

этим малым параметром малости собственных частот. Единственный малый параметр в задаче возникает, когда мы переходим к рассмотрению системы, близкой к изотропной (малые s). В этом случае малость собственных частот (инкрементов) должна быть связана с малостью параметра s . Однако именно этот эффект в рассматриваемом уравнении оказался «отключенным». Формально это следует из того, что правая часть интегрального уравнения (19) не исчезает при $s = 0$. Поэтому нет никаких оснований ожидать, что его первые собственные значения Λ_n будут малы или хотя бы меньше единицы. (Разумеется, собственные значения, соответствующие большим значениям n , т.е. многоузловым модам, будут малы, за счет взаимной компенсации вкладов в разных областях подинтегрального выражения в правой части уравнения (19), но для первых мод такой компенсации не происходит.) Действительно, наш численный расчет серии, рассмотренной в работе [23], т.е. $q = 1, s \geq 0$, дал набор для первых семи собственных значений квадрупольной гармоники $l = 2$ и двух более высоких гармоник $l = 4$ и $l = 6$, приведенный в таблице.

Как видно из таблицы, первые два собственных значения для $l = 2$ и одно собственное значение для $l = 4$ больше единицы (выделены жирным шрифтом). Это означает, что сколь угодно малая анизотропия (т.е. сколь угодно малое s), приводит к тому, что инкременты первых двух мод (для $l = 2$) оказываются экспоненциально велики:

$$\gamma_n = \Lambda_n^{1/s} \propto \exp\left(\frac{1}{s} \ln \Lambda_n\right), \quad n = 0, 1, \quad (25)$$

хотя инкременты остальных мод, действительно, экспоненциально малы:

$$\gamma_n(s) = \Lambda_n^{1/s} \propto \exp\left(-\frac{1}{s} \ln \frac{1}{\Lambda_n}\right), \quad n \geq 2. \quad (26)$$

Заметим, однако, что, поскольку для изотропной системы все неустойчивые моды должны становиться устойчивыми, в некоторой достаточно малой

окрестности $s = 0$ все они должны правильно описываться «медленным» уравнением. Поэтому ошибочно отброшенная авторами работы [23] безузлая (наиболее неустойчивая) мода также не является посторонней.

3.3. Исправленная форма уравнения для медленных мод

Результат (25) явно противоречит также исходному интегральному уравнению. Действительно, из самого вида интеграла по L в правой части уравнения (15), которому ядро обязано своим происхождением, очевидно, что при $s = 0$ он должен обращаться в нуль ($\partial F / \partial L = 0$ при $s = 0$). Несложно понять, что формальная причина того, что ядро при $s = 0$ оказывается конечным, а не обращается в нуль вместе с s , в том, что мы распространили интегрирование в интеграле (16) до бесконечности. Но тогда очевидно, что при $s = 0$ этот интеграл превращается в $\int_0^{L_{max}} L dL / (\gamma^2 + k^2 \varpi^2 L^2)$ и расходится на верхнем пределе, если верхний предел равен бесконечности. С физической точки зрения эта процедура означает, что мы фактически приписали свойства радиальных орбит всем орбитам. Такое представление оправдано при конечном s , однако для очень малых s ставить в качестве верхнего предела по L бесконечность некорректно. Вспомним, что на самом деле верхний предел конечен, он совпадает с $L_{circ}(E)$. Разумеется, подинтегральное выражение в старом виде, где мы ограничились линейным представлением для скорости прецессии и сделали другие упрощения, которые верны только для почти радиальных орбит, уже неприменимо, однако для качественного рассмотрения области очень малых s нам этого достаточно. Итак, подставим в качестве верхнего предела в интеграле по L величину $L_{circ}(E)$. Заменой $L = [\gamma/k\varpi]x$ интеграл приводится к виду

$$\int_0^{L_{circ}} \frac{L^{-s+1} dL}{\gamma^2 + k^2 \varpi^2 L^2} = \gamma^{-s} (k\varpi)^{s-2} \int_0^{k\varpi L_{circ}/\gamma} \frac{x^{-s+1} dx}{1+x^2}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \varpi L_{circ} &= \Omega_2(E, L_{circ}(E)) - \frac{1}{2} \Omega_1(E, L_{circ}(E)) = \\ &= \Omega - \frac{1}{2} \varkappa, \end{aligned}$$

где Ω и \varkappa — соответственно круговая и эпициклическая частоты, мы можем в качестве верхнего предела с точностью до численного множителя поставить характерную динамическую частоту $\Omega \sim \Omega_D$:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_{circ}} \frac{L^{-s+1} dL}{\gamma^2 + k^2 \varpi^2 L^2} &\approx \gamma^{-s} (k\varpi)^{s-2} \int_0^{\Omega/\gamma} \frac{x^{-s+1} dx}{1+x^2} \equiv \\ &\equiv \gamma^{-s} (k\varpi)^{s-2} \bar{I}\left(s, \frac{\gamma}{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Важно помнить, что параметр γ/Ω считается малым: $\gamma/\Omega \ll 1$. Полагая $z = (1+x^2)^{-1}$, получим

$$\bar{I}(s, \Omega/\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma^2/\Omega^2}^1 dz \frac{z^{s/2-1}}{(1-z)^{s/2}},$$

и при малых s этот интеграл есть

$$\bar{I}\left(s, \frac{\gamma}{\Omega}\right) = \frac{1}{s} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega}\right)^s\right] = \frac{1}{s} \left[1 - \exp\left(-s \ln \frac{\Omega}{\gamma}\right)\right].$$

Видно, что теперь при $s \rightarrow 0$ этот интеграл не обращается в бесконечность как $1/s$, а остается конечным, хотя и логарифмически большим, $\bar{I}(s=0, \gamma/\Omega) = \ln(\Omega/\gamma)$, так что при умножении на s мы будем иметь ядро, обращающееся в нуль при $s=0$. Написать явное аналитическое выражение для интеграла $\bar{I}(s, \gamma/\Omega)$ при произвольных, а не очень малых значениях s , невозможно. Кроме того, учитывая грубость нашего рассмотрения, где мы аппроксимируем линейный закон для скорости прецессии (13) вплоть до круговых орбит, в выражении (21) для $Q(E, E')$, входящем в ядро, считаем орбиты радиальными, а частоту прецессии на круговых орбитах заменяем на некоторую среднюю по сфере частоту Ω , брать этот интеграл точнее нет смысла. Проще написать для него модельное выражение с нужными свойствами. Запишем

$$\begin{aligned} \bar{I}(s, \Omega/\gamma) &= \frac{\pi}{2 \sin(\pi s/2)} \left[1 - \left(\frac{\gamma}{\Omega}\right)^s\right] = \\ &= \frac{\pi}{2 \sin(\pi s/2)} \left[1 - \exp\left(-s \ln \frac{\Omega}{\gamma}\right)\right]. \end{aligned} \quad (27)$$

При такой записи видно, что при очень малых s , $s \ll [\ln(\Omega/\gamma)]^{-1} \ll 1$, интеграл конечен, $\bar{I}(s, \gamma/\Omega) \approx \ln(\Omega/\gamma)$, а при $s \gg [\ln(\Omega/\gamma)]^{-1}$ он совпадает со старым выражением (16) для $I(s)$.

Теперь мы готовы написать исправленный вид интегрального уравнения. Этому уравнению можно придать прежний вид (19), т.е. $\lambda \Psi(E) = \int dE' \mathcal{R}(E, E') \Psi(E')$, сохранив прежнее ядро (20)–(22), однако теперь собственное значение λ будет связано с инкрементом новым соотношением. Вместо старого соотношения (18), $\lambda = \gamma^s$, имеем

$$\lambda = \frac{\gamma^s}{1 - (\gamma/\Omega)^s}, \quad \gamma = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda/\Omega^s}\right)^{1/s}. \quad (28)$$

Легко понять, что при такой связи инкремента γ с собственным значением λ оказывается, что вблизи $s=0$ инкременты всех мод экспоненциально малы. В этом принципиальное отличие от спектра неисправленного уравнения. Действительно, спектр собственных значений $\lambda_n(s)$ остается прежним, однако теперь в пределе $s \rightarrow 0$ имеем

$$\gamma_n(s) \propto \left(\frac{\Lambda_n}{1 + \Lambda_n}\right)^{1/s} = \exp\left[-\frac{1}{s} \ln\left(1 + \frac{1}{\Lambda_n}\right)\right]. \quad (29)$$

Очевидно, что независимо от того, больше или меньше величина собственного значения Λ_n по сравнению с единицей, мы имеем экспоненциальное убывание инкрементов всех мод при $s \rightarrow 0$. (Предэкспоненту в (29) можно тоже выписать, но для этого надо знать поправку $\mathcal{O}(s)$ к собственным значениям $\Lambda = \lambda(0)$.)

В заключение этого раздела приведем соотношение, связывающее радиальную структуру собственной функции возмущения потенциала $\chi_n(r)$ с собственной функцией $\Psi_n(E)$ интегрального уравнения (19). Не останавливаясь на подробностях, приведем результат:

$$\begin{aligned} \chi_n(r) &= \int_{-1}^0 \sqrt{g(E) \varpi^{s-1}(E) \nu(E)} \Psi_n(E) dE \times \\ &\times \int_0^{r_{max}(E)} \frac{dr' \mathcal{F}_l(r, r')}{\sqrt{2E - 2\Phi_0(r')}}. \end{aligned} \quad (30)$$

В следующем разделе приведены результаты расчетов инкрементов нескольких серий моделей обобщенных политроп.

4. НЕУСТОЙЧИВЫЕ МОДЫ МОДЕЛЕЙ ОБОВЩЕННЫХ ПОЛИТРОП

4.1. Вычислительные аспекты

Для нахождения неустойчивых мод интегрального уравнения (19) необходимо вычислить входящие в него функции $R_s(E, E')$, $\varpi(E)$ и потенциала $\Phi_0(r)$. Уравнение Пуассона для безразмерного невозмущенного потенциала $\psi(r)$ в единицах (3) запишем в виде

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + r^{-s} \psi^{q+(3-s)/2} = 0, \quad (31)$$

причем одно из граничных условий есть $\psi(0) = 1$. Для определения второго граничного условия заметим, что уравнение (31) имеет решение в виде ряда по степеням переменной $z = r^{2-s} \equiv r^p$ и положим, $\psi(r) = \psi(z^{1/p}) \equiv \bar{\psi}(z)$. Тогда из (31) получим

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dz^2} + \frac{3-s}{2-s} \frac{1}{z} \frac{d\bar{\psi}}{dz} + \frac{1}{(2-s)^2} \frac{1}{z} \bar{\psi}^{q+(3-s)/2} = 0. \quad (32)$$

Несложно проверить, что при $z \ll 1$ решение имеет следующий асимптотический вид:

$$\bar{\psi}(z) = 1 + D_1 z + D_2 z^2 + \mathcal{O}(z^3),$$

где

$$(2-s)(3-s) D_1 = -1,$$

$$(4-2s)(5-2s) D_2 = -[q + (3-s)/2] D_1$$

(ср. с формулами Приложения А в статье [35], посвященной исследованию устойчивости моделей обобщенных политроп относительно радиальных возмущений). Таким образом, мы можем вместо уравнения (31) решать уравнение (32) для функции $\bar{\psi}(z)$ методом Рунге–Кутты, стартуя с точки $z = 0$, в которой задаются два граничных условия, $\bar{\psi}(z=0) = 1$, $(d\bar{\psi}/dz)_{z=0} = D_1$. Правая граница области интегрирования, $z = z_R$, определяется из условия $\bar{\psi}(z_R) = 0$. При этом радиус шара $R = z_R^{1/(2-s)}$.

Следующий этап — вычисление радиальной орбитальной частоты $\nu(E) \equiv \Omega_1(E, L=0)$ и скорости прецессии, а точнее, функции $\varpi(E)$. Последняя вычисляется согласно (14). Поскольку нас здесь особенно интересует случай малых s , когда потенциал вблизи центра близок к квадратичному, приведем аналитическое выражение для $\varpi(E)$ для звезд с энергией $\varepsilon \equiv E + 1 \ll 1$, орбиты которых целиком лежат вблизи центра шара, $r_{max}(\varepsilon) \ll R$, и $s \ll 1$:

$$\varpi(\varepsilon) = \frac{1}{40} \left(q + \frac{3}{2} \right) \left[1 + \frac{1}{160} \varepsilon \left(1 - \frac{262}{7} q \right) \right] + \frac{s}{12 \varepsilon}.$$

Оно полезно в качестве теста правильности численного счета. В случае произвольных $s < 1$ (не слишком близких к нулю и единице) тестовые аналитические выражения для $\nu(\varepsilon)$ и $\varpi(\varepsilon)$ для «запертых» вблизи центра звезд, $\varepsilon \ll 1$, имеют вид

$$\begin{aligned} \nu(\varepsilon) &= \sqrt{2\pi} \frac{\Gamma(1/p + 1/2)}{\Gamma(1 + 1/p)} K^{1/p} \varepsilon^{1/2-1/p}, \\ \varpi(\varepsilon) &= -\frac{\Gamma(1/2+1/p) \Gamma(1-1/p)}{\Gamma(1+1/p) \Gamma(1/2-1/p)} K^{2/p} \varepsilon^{-2/p} > 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $K^{-1} = p(1+p)$, $p = 2-s$.

Наконец, необходимо рассчитать ядро $R_s(E, E')$. Наибольшие численные проблемы доставляет вычисление (симметричной относительно перестановки аргументов) функции $Q(E, E')$ (21), входящей в выражение для ядра интегрального уравнения (20). Приведем пару опорных тестовых аналитических асимптотических формул, справедливых в области $\varepsilon \sim \varepsilon' \ll 1$.

На «диагонали» $\varepsilon = \varepsilon' \ll 1$ при $s = 0$ и $l = 2$ имеем

$$Q(\varepsilon, \varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} + G_C \right) = 1.734 \varepsilon^{-1/2},$$

где $G_C = 0.915695594 \dots$ — постоянная Каталана.

Для $\varepsilon' \ll \varepsilon \ll 1$ и произвольных s имеем для $l = 2$

$$Q(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{5\sqrt{\pi}}{12p} \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p + 1/2)} \times K^{-1/p} \varepsilon^{-1/2} (\varepsilon')^{1/p-1/2}. \quad (34)$$

В частности, при $s = 0$ (т. е. $p = 2$) функция $Q(\varepsilon, \varepsilon')$ не зависит от ε' :

$$Q(\varepsilon, \varepsilon') = \left(5\sqrt{6} \pi / 24 \right) \varepsilon^{-1/2} = 1.603 \varepsilon^{-1/2}.$$

4.2. Спектры неустойчивых мод

Интегральное уравнение (19) решалось численно для мод с угловой структурой, соответствующей $l = 2, 4, 6$. Прежде всего нас интересовали модели обобщенных политроп, отвечающие малым значениям параметра $s \ll 1$, с целью выяснения степени малости инкрементов нарастания слабоанизотропных систем. Для сопоставления наших результатов с результатами работы [23] необходимо иметь возможность вычислять инкременты при $s = 2/3$ и $s = 1/3$ (их модели В и С). В настоящей работе мы ограничились только диапазоном $0 \leq s \leq 0.8$, хотя принципиальных трудностей расширить его до $s = 1$ нет.

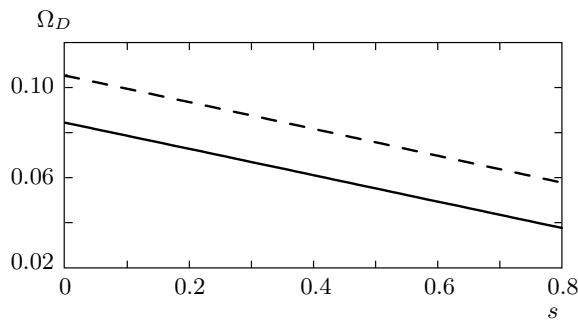


Рис. 1. Зависимость характерной частоты Ω_D от параметра s для $q = 1$ (сплошная линия) и $q = 0.7$ (штриховая линия)

На рис. 1 показано поведение характерной частоты $\Omega_D(s) = \sqrt{GM/2R^3}$ для двух значений параметра q . Видно, что зависимость частоты во всем диапазоне изменения параметра s слабая и имеет порядок $\Omega_D \sim 0.1$.

На рис. 2 показана зависимость от параметра s инкрементов нарастания первых четырех наиболее неустойчивых мод в единицах характерной частоты Ω_D для $q = 1$. Штриховые линии показывают поведение инкрементов нарастания, рассчитанных с помощью уравнений (18) и (19), что эквивалентно уравнению, использованному в работе [23]. Сравнение со значениями инкрементов нарастания из цитированной работы (модели В и С) показывает удовлетворительное совпадение результатов для $s = 1/3$ и $s = 2/3$. Цифрами обозначены номера мод (0 — безузловая мода, 1 — мода с одним узлом, и т. д.). Инкременты нарастания первых двух мод оказываются быстро растущими при приближении модели к изотропному пределу, остальные же — быстро убывающими до нуля.

Сплошными линиями показано поведение инкрементов, полученное с помощью исправленного уравнения (28). Видно, что инкременты нарастания всех мод демонстрируют разумное поведение, быстро убывая до нуля при $s \rightarrow 0$.

Область $s \approx 0$ хорошо видна на рис. 2б. Благодаря экспоненциальному закону убывания инкрементов нарастания, при $s < 0.01$ их значения становятся ничтожно малыми.

На рис. 3а показаны первые собственные функции $\Psi_n(E)$ ($n = 0, 1, 2, 3$) интегрального уравнения (19) для модели с $s = 1/3$ и $q = 1$ и соответствующие им собственные функции $\chi_n(r)$ радиальной части потенциала, рассчитанные по формуле (30). Видно, что они имеют одинаковое число узлов, совпада-

ющее с n . Вид радиальных собственных функций $\chi(r)$ качественно согласуется с их видом, представленным на рис. 1 статьи [23], в которой они являются решениями интегродифференциального уравнения (2.25) этой статьи.

Интересно сравнить результаты расчетов неустойчивости при помощи нашего интегрального уравнения для медленных мод с независимыми расчетами моделей обобщенных политропов другими методами. На рис. 4 представлена зависимость инкрементов нарастания первых семи мод от параметра s для $q = 0.7$. Крестами показаны точки из монографии [9], полученные матричным методом. Видно, что результаты неважно согласуются друг с другом, так что непосредственную «сшивку» кривой, полученной матричным способом, и новой кривой для основной моды ($n = 0$) провести невозможно.

Следует отметить, что область применимости интегрального уравнения по s для медленных мод ограничена малыми значениями инкрементов (по сравнению с характерной динамической частотой Ω_D , которая в наших единицах, напомним, тоже мала). Для мод с достаточно большими n это ограничение никак не сказывается, поскольку их инкремент мал фактически при всех s , однако для первых мод, и особенно для самой неустойчивой (основной) моды это ограничение существенно. Действительно, поскольку с ростом анизотропии (с ростом параметра s) инкременты растут, причем чем меньше номер n моды, тем больше ее инкремент, оказывается, что область применимости уравнения для основной моды ($n = 0$) ограничена довольно малыми значениями s (скажем, примерно $s \lesssim 0.15$). Возможно, именно поэтому непосредственно «сшить» полученную в [9] кривую $\gamma(s)$, «оборванную» при $s \approx 0.6$, $\gamma = 0.004$ (из-за невозможности при меньших s добиться надежных результатов матричным методом), и кривую $\gamma_0(s)$ для основной моды, полученную в настоящей работе с помощью интегрального уравнения (19), не удастся. На рис. 4 эта область по s , в которой нет уверенных значений для инкремента, показана штрихами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере обобщенно-политропных моделей (1) мы исследовали остававшийся до сих пор неясным вопрос о том, каким образом происходит переход от неустойчивых сферически-симметричных систем к устойчивым. Либо этот переход имеет место при некотором конечном значении анизотропии (соот-

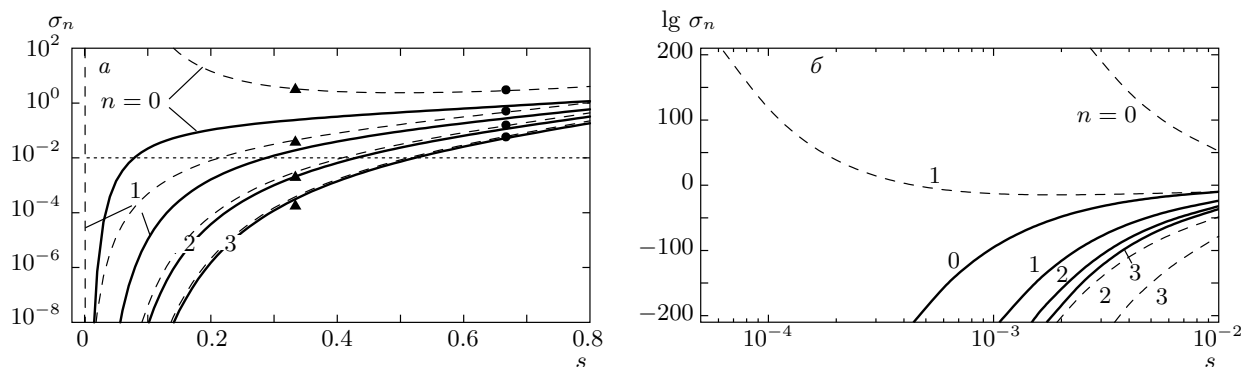


Рис. 2. Зависимость масштабированных инкрементов нарастания $\sigma_n \equiv \gamma_n/\Omega_D$ четырех самых неустойчивых мод от параметра s для модели $q = 1$ в обычных (а) и логарифмических (б) координатах: штриховые линии — решения уравнения (18), сплошные — исправленные решения (28); на рис. а показаны также значения σ_n , полученные в [23] для модели В ($s = 2/3$, ●) и модели С ($s = 1/3$, ▲). Значение характерной частоты прецессии принято равным $\Omega = 0.08$

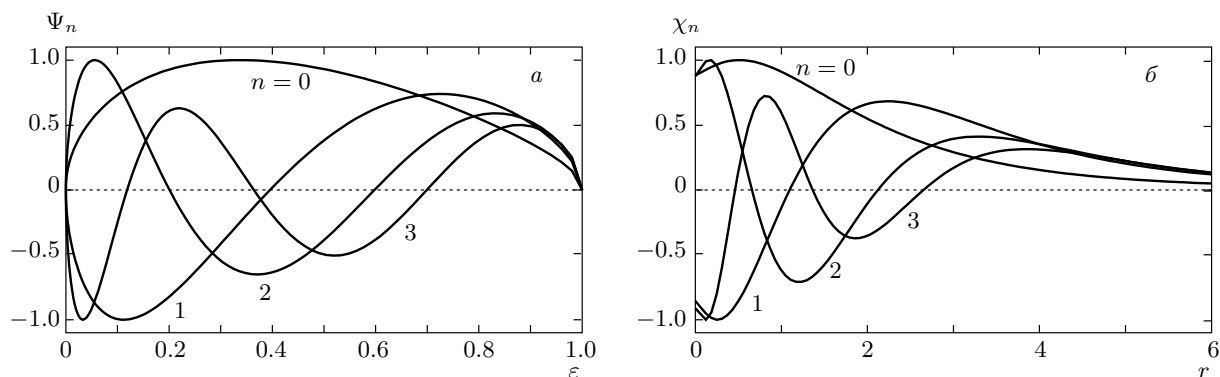


Рис. 3. Вид первых четырех собственных функций квадрупольной гармоники $l = 2$: а — решения $\Psi_n(E)$ интегрального уравнения; б — радиальная часть $\chi_n(r)$ потенциала. Нормировка функций произвольна (19)

ветствующем параметру модели $s = s_{cr} > 0$), либо неустойчивость, пусть слабая, сохраняется вплоть до изотропного предела ($s = 0$), где она обязана исчезнуть в согласии с уже давно установленными общими результатами теории устойчивости сферических звездных скоплений. Первая возможность была высказана в монографии [9] на основании результатов исследования устойчивости моделей (1) матричным методом. Оказалось, что по мере уменьшения параметра s от значения $s = 2$, соответствующего сильнонеустойчивой системе с чисто радиальными орбитами, инкремент неустойчивости монотонно уменьшается и при значении $s \approx 0.6$ становится очень малым. Сделанный в цитированной монографии естественный, казалось бы, вывод о том, что при этом (или близком) значении s как раз и происходит переход от неустойчивых моделей (при

$s > 0.6$) к устойчивым (при $s < 0.6$), был, однако, поставлен под сомнение в работе [23].

Авторы работы [23] показали, что неустойчивыми, конечно с очень малыми инкрементами, являются даже системы, сколь угодно близкие к изотропным. Насколько они малы, из этой работы было неясно. Более того, допущенная авторами нестрогость при выводе интегрального уравнения для медленных мод не позволяет использовать его в самой интересной для обсуждаемого вопроса области вблизи $s = 0$. В этом и заключается причина некорректного поведения основной (безузловой) наиболее неустойчивой моды и «соседней», одноузловой, моды: инкременты неустойчивости этих мод неограниченно росли при приближении к $s = 0$. Разумное поведение основной моды, как и соседних мод, было восстановлено в настоящей работе после кор-

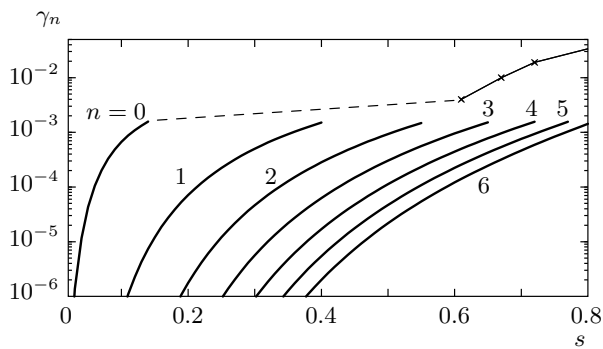


Рис. 4. Зависимость инкрементов нарастания γ_n (28) первых семи самых неустойчивых мод от параметра s для модели $q = 0.7$. Крестами отмечены значения инкрементов нарастания, приведенные в [9]. Значение характерной частоты Ω принято равным 0.02

рекции медленного интегрального уравнения. Оказалось, что инкременты неустойчивости всех мод, хоть и не исчезают вплоть до изотропного предела, становятся вблизи от него малыми экспоненциально, $\gamma \propto \exp(-a/s)$. Фактически это означает устойчивость, если учесть конечное время жизни реальных астрономических объектов и к тому же принять во внимание, что наиболее вероятными являются все-таки несингулярные распределения. Поэтому в большинстве случаев устойчивые распределения должны переходить в неустойчивые при каких-то конечных значениях анизотропии (зависящих, вообще говоря, от конкретной модели).

В заключение для подтверждения того, что существование именно конечной граничной анизотропии является наиболее распространенным типом перехода от неустойчивости к устойчивости, мы рассмотрим пример совсем другой неустойчивости гравитирующих систем, а именно шланговой неустойчивости, известной также и в плазме [1]. В приложении к гравитирующим системам, она впервые была отмечена в работе [36], а подробно исследована нами (см., например, работу [37]), где было указано на главное практическое приложение этой неустойчивости. Она может быть ответственна за наблюдаемый факт отсутствия слишком сильно сплюснутых эллиптических галактик (предельная сплюснутость, как известно, соответствует по общепринятой классификации типу E7, т. е. отношению осей, равному 0.3). Причиной неустойчивости и в данном случае является анизотропия в распределении звезд по скоростям, а именно, преобладание дисперсии скоростей вдоль большой оси системы над дисперсией ско-

ростей вдоль малой оси. Из-за этого случайно возникающие в системе изгибы плоскости симметрии галактического эллипсоида увеличиваются со временем.

Тем не менее наличие в природе устойчивых и при этом довольно сплюснутых систем (что, разумеется, означает, что они являются анизотропными) свидетельствует о том, что для стабилизации этой неустойчивости, как и неустойчивости радиальных орбит, причина неустойчивости (анизотропия) не обязана быть устранена полностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 11-02-01118-а, 11-02-01248-а, 09-02-00082-а, 10-05-00094-а), а также гранта «Протяженные объекты во Вселенной» Отделения физических наук РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1970), т. 1.
2. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1971), т. 2.
3. А. Б. Михайловский, *Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках*, Атомиздат, Москва (1978).
4. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва (1975).
5. В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, Москва (1976).
6. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 1-2-72, Иркутск (1972).
7. Г. М. Идлис, *Астрон. ж.* **33**, 53 (1956).
8. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. ж.* **58**, 933 (1981).
9. А. М. Fridman and V. L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Springer, New York (1984).
10. В. Л. Поляченко, *Астрон. циркул.* № 1405, 142 (1985).
11. V. L. Polyachenko, in IAU Symp. 127, *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, ed. by P. T. de Zeeuw, Reidel, Dordrecht (1987), p. 301.
12. M. D. Weinberg, *Astrophys. J.* **368**, 66 (1991).
13. P. Saha, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **248**, 494 (1991).

14. G. Bertin, F. Pegoraro, F. Rubini, and E. Vesperini, *Astron. J.* **434**, 94 (1994).
15. В. Л. Поляченко, *Письма в Астрон. ж.* **7**, 4 (1981).
16. D. Merritt and L. A. Aguilar, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **217**, 787 (1985).
17. J. Barnes, J. Goodman, and P. Hut, *Astrophys. J.* **300**, 112 (1986).
18. D. Merritt, in [11], p. 315.
19. H. Dejonghe and D. Merritt, *Astrophys. J.* **328**, 93 (1988).
20. A. Meza and N. Zamorano, *Astrophys. J.* **490**, 136 (1997).
21. В. А. Антонов, *Вестн. ЛГУ № 19*, 96 (1962).
22. А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум, *ЖЭТФ* **59**, 1608 (1970).
23. P. L. Palmer and J. Papaloizou, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **224**, 1043 (1987).
24. A. J. Kalnajs, *Astrophys. J.* **212**, 637 (1977).
25. В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко, И. Г. Шухман, *ЖЭТФ* **131**, 443 (2007).
26. E. V. Polyachenko, V. L. Polyachenko, and I. G. Shukhman, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **379**, 573 (2007).
27. M. N. Rosenbluth and R. F. Post, *Phys. Fluids* **8**, 547 (1965).
28. E. V. Polyachenko, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **348**, 345 (2004).
29. E. V. Polyachenko, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **357**, 559 (2005).
30. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 1, Наука, Москва (1988).
31. J. Touma and S. Tremaine, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **292**, 905 (1997).
32. В. Л. Поляченко, *ЖЭТФ* **101**, 1409 (1992).
33. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1984), с. 283.
34. В. Л. Поляченко, Е. В. Поляченко, И. Г. Шухман, *Письма в Астрон. ж.* **36**, 94 (2010).
35. M. Hénon, *Astron. Astrophys.* **24**, 229 (1973).
36. R. M. Kulsrud, J. W.-K. Mark, and A. Caruso, *Astrophys. Space Sci.* **14**, 52 (1971).
37. В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман, *Астрон. ж.* **56**, 724 (1979).