

КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛАХ

В. И. Альшиц, В. Н. Любимов*

*Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова Российской академии наук
119333, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 марта 2011 г.

Рассмотрено обусловленное поглощением расщепление акустической оси в вязкоупругом кристалле произвольной анизотропии. Показано, что при «включении» поглощения линейное векторное поле поляризаций в окрестности исходной точки вырождения, имеющее ориентационную сингулярность с индексом Пуанкаре $n = \pm 1/2$, превращается в плоское распределение эллипсов с двумя сингулярными точками ($n = \pm 1/4$), отвечающими новым осям. Исследована локальная геометрия поверхности медленностей упругих волн в окрестности новых точек вырождения и соединяющей их линии самопересечения. Изучена вызванная поглощением трансформация классической картины конической рефракции. На ребре клина самопересечения в узком интервале направлений распространения эллиптичность волн резко изменяется от круговой на концах клина до линейной в его середине. В какую бы точку этого ребра ни была направлена волновая нормаль, при обходе вектора смещения по соответствующему эллипсу поляризации вектор лучевой скорости s волны пробегает по одному и тому же конусу, описывающему рефракцию в кристалле без поглощения. При этом движение конца вектора s происходит по универсальному эллипсу, плоскость которого ортогональна направлению акустической оси при нулевом поглощении. Секториальная скорость такого движения лишь постоянным множителем отличается от угловой скорости вектора смещения на эллипсе поляризации, запаздывая относительно нее по фазе на $\pi/2$. При локализации волновой нормали на ребре клина в его центральной области движение вектора s по универсальному эллипсу становится резко неравномерным, а рефракция превращается из конической в клиновую.

1. ВВЕДЕНИЕ

Внутренняя коническая рефракция упругих волн в кристаллах, как и аналогичный эффект в кристаллооптике, является хорошим примером нетривиальной роли анизотропии, которая может порождать в кристаллах новые явления, принципиально невозможные в изотропной среде.

Поток энергии \mathbf{P} волны в кристалле, как правило, не параллелен ее волновому вектору $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$. Для каждого \mathbf{m} направление вектора Пойнтинга \mathbf{P} определяется ориентацией нормали \mathbf{n} к поверхности медленности (рефракции) кристалла $v^{-1}(\mathbf{m})$, где v — фазовая скорость волны. При этом, в отличие от изотропных сред, где, благодаря вырожденности поперечных собственных объемных волн, в любом направлении могут распространяться как линейно, так и циркулярно поляризованные волны, в кристаллах такое возможно только вдоль акустических осей, ко-

торые обычно изолированы. В частности, при выборе направления \mathbf{m} вдоль акустической оси в условиях, когда контакт между полостями поверхности медленности является коническим, каждому направлению поляризации волны отвечает своя нормаль к поверхности медленности в точке контакта. Поэтому для эллиптической или циркулярной поляризации вектор Пойнтинга \mathbf{P} должен описывать определенный конус, отвечающий полному набору нормалей в рассматриваемой точке контакта полостей поверхности медленности. Это явление и называется внутренней конической рефракцией.

Впервые коническая рефракция в акустике была теоретически предсказана и экспериментально обнаружена в работе [1]. Авторы этой работы, выбрав для опытов кубический кристалл Ni, направили ультразвуковой пучок вдоль оси симметрии третьего порядка, которой всегда сопутствует коническая акустическая ось, и обнаружили, что при варьировании направления поперечной поляризации в плоскости

*E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

вырождения поток энергии волны очерчивает круговой конус. Позднее были описаны теоретически [2–4] и найдены экспериментально [5] более общие случаи конусов рефракции эллиптического сечения для менее симметричных направлений акустических осей. Наиболее полная теория этого эффекта для случая произвольной анизотропии приведена в монографиях [6, 7].

В настоящей работе мы представим обобщение этой теории на случай учета поглощения волны в кристалле, которое в той или иной степени всегда имеет место. Поглощение в акустике анизотропных сред приводит не просто к ослаблению волн при их распространении, но и к целому ряду качественно новых свойств и явлений. В частности, согласно работам [8–12], всякая коническая акустическая ось, не совпадающая по направлению с осью симметрии третьего порядка, при «включении» поглощения должна расщепляться на две сингулярных оси (акустическая ось вдоль оси третьего порядка возникает благодаря симметрии и не расщепляется). Ниже мы теоретически опишем само это расщепление и сопутствующие ему изменения локальной геометрии поверхности медленности и топологии полей поляризации в окрестности сингулярных осей. На этой основе будет дано обобщение теории [6, 7] применительно к распределению эллиптических поляризаций и лучевых скоростей упругих волн для направлений распространения \mathbf{m} вблизи расщепленных осей. Как показывает наш опыт решения аналогичной задачи [13] для оптики кристаллов, учет поглощения ведет к весьма нетривиальным изменениям фундаментальных черт явления.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим вязкоупругую среду произвольной анизотропии, характеризуемую тензором упругих модулей $\hat{c} = \{c_{ijkl}\}$, тензором вязкости $\hat{\eta} = \{\eta_{ijkl}\}$ и плотностью ρ . Поле упругих смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в такой среде описывается известным уравнением движения [14]

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{l,kj} - \eta_{ijkl} \dot{u}_{l,kj}, \quad (1)$$

где точки над функцией означают производные по времени t , а для производных по пространственным координатам принято обозначение $\partial/\partial x_k \dots \equiv \dots_{,k}$. Подставим в уравнение (1) поле смещений объемной

упругой волны с частотой $\omega = kv$, амплитудой C и нормированным вектором поляризации \mathbf{A} :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = C \mathbf{A} \exp[ik(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - vt)]. \quad (2)$$

В результате получаем обобщенное уравнение Кристоффеля

$$(\hat{Q}' - i\hat{Q}'') \mathbf{A} = \rho v^2 \mathbf{A}, \quad (3)$$

где \hat{Q}' и \hat{Q}'' — вещественные симметричные матрицы,

$$Q'_{jk} = m_i c_{ijkl} m_l, \quad Q''_{jk} = \omega m_i \eta_{ijkl} m_l. \quad (4)$$

Заметим, что мнимая добавка $-i\hat{Q}''$ к обычному акустическому тензору \hat{Q}' , в отличие от последнего, является дисперсионной, т. е. зависит от частоты.

Уравнение (3) для невырожденных направлений \mathbf{m} задает три собственных вектора \mathbf{A}_α и три собственных значения ρv_α^2 обобщенного акустического тензора $\hat{Q}' - i\hat{Q}''$. Естественно, что векторы поляризации \mathbf{A}_α и фазовые скорости v_α в этом случае являются комплексными:

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}'_\alpha + i\mathbf{A}''_\alpha, \quad v_\alpha = v'_\alpha - iv''_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Ниже частота ω будет считаться вещественной. Поэтому из (5) следует, что величина k_α имеет мнимую добавку, определяющую ослабление волны при ее распространении:

$$k_\alpha \equiv k'_\alpha + ik''_\alpha = \frac{\omega}{v'_\alpha - iv''_\alpha} \approx \frac{\omega}{v'_\alpha} \left(1 + i \frac{v''_\alpha}{v'_\alpha} \right). \quad (6)$$

Комплексные фазовые скорости собственных волн находятся из уравнения (3):

$$\rho v_\alpha^2 = \frac{\mathbf{A}_\alpha \cdot (\hat{Q}' - i\hat{Q}'') \mathbf{A}_\alpha}{\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha}. \quad (7)$$

Векторы поляризации \mathbf{A}_α , будучи собственными векторами симметричной матрицы, для невырожденных направлений \mathbf{m} взаимно ортогональны:

$$\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (8)$$

Что касается нормировки этих векторов, то мы вынуждены отказаться от привычного условия $\mathbf{A}_\alpha^2 = 1$, имея в виду, что поляризация волны, распространяющейся в окрестности сингулярной акустической оси, может приближаться к круговой, когда $|\mathbf{A}_\alpha^2| \rightarrow 0$. Ниже нормировка будет выбираться так, чтобы

$$|\mathbf{A}_\alpha|^2 = \mathbf{A}'_\alpha{}^2 + \mathbf{A}''_\alpha{}^2 = 1. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что вдали от акустических осей мнимые добавки к v'_α и \mathbf{A}'_α остаются малыми в меру малости поглощения. В этом случае теория возмущений дает

$$v''_\alpha = \frac{\mathbf{A}'_\alpha \cdot \hat{Q}'' \mathbf{A}'_\alpha}{2\rho v'_\alpha}, \quad \rho v'^2_\alpha = \mathbf{A}'_\alpha \cdot \hat{Q}' \mathbf{A}'_\alpha, \quad (10)$$

$$\mathbf{A}''_\alpha = \frac{\mathbf{A}'_\alpha \cdot \hat{Q}'' \mathbf{A}'_\beta}{\rho(v'^2_\beta - v'^2_\alpha)} \mathbf{A}'_\beta + \frac{\mathbf{A}'_\alpha \cdot \hat{Q}'' \mathbf{A}'_\gamma}{\rho(v'^2_\gamma - v'^2_\alpha)} \mathbf{A}'_\gamma. \quad (11)$$

Вместе с тем, как видно из (11), в вырожденной ветви по мере приближения к акустической оси, когда собственная скорость v'_α приближается к v'_β или v'_γ , величина $|\mathbf{A}''_\alpha|$ увеличивается, теряя свою малость, а вместе с ней возрастает и эллиптичность волны. Отсюда ясно, что вблизи от акустической оси простая теория возмущений непригодна и формулы (10), (11) должны быть заменены другими.

3. ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ОКРЕСТНОСТИ НАПРАВЛЕНИЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Для невырожденной ветви формулы (10), (11) применимы даже вдоль направлений, где реализуется вырождение двух других ветвей. Ниже мы будем выбирать для характеристик невырожденной ветви номер $\alpha = 3$. При этом, в соответствии с выражением (11), вектор \mathbf{A}''_3 для любых направлений должен быть малой добавкой к \mathbf{A}'_3 :

$$|\mathbf{A}''_3| \ll |\mathbf{A}'_3|. \quad (12)$$

С учетом условия ортогональности (8), неравенство (12) позволяет в первом приближении вычислять комплексные векторы поляризации $\mathbf{A}_{1,2}$, пренебрегая их компонентами вдоль \mathbf{A}'_3 . Это остается справедливым даже вблизи акустических осей, где мнимые добавки к векторам $\mathbf{A}_{1,2}$ отнюдь не малы.

Пусть \mathbf{m}_0 есть направление акустической оси в рассматриваемом кристалле с «выключенным» поглощением. В таком кристалле вдоль \mathbf{m}_0 реализуется вырождение фазовых скоростей, $v_1 = v_2 \equiv v_0$, и наряду с невырожденной волной со скоростью v_3 и поляризацией \mathbf{A}_{03} разрешено распространение бесконечного числа волн со скоростью v_0 и любой линейной поляризацией в плоскости вырождения D ортогональной вектору \mathbf{A}_{03} (рис. 1). Выберем в этой плоскости произвольную ортогональную пару единичных векторов \mathbf{A}_{01} и \mathbf{A}_{02} , образующую с \mathbf{A}_{03} правую тройку. В этом базисе мы и будем строить наш формализм.

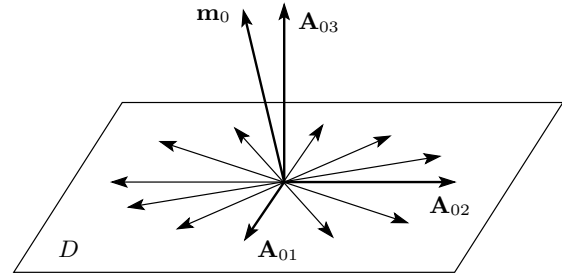


Рис. 1. Плоскость разрешенных поляризаций волн для вырожденного направления \mathbf{m}_0 распространения в кристалле без поглощения. Ортогональный базис $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}, \mathbf{A}_{03}\}$

Теперь вернемся к поглощающему кристаллу и рассмотрим исходное уравнение (3) для направления $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}$, близкого к \mathbf{m}_0 :

$$(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m})(\hat{c} - i\omega\hat{\eta})(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m})\mathbf{A}_\alpha = \rho(v_{0\alpha} + \delta v_\alpha)^2 \mathbf{A}_\alpha. \quad (13)$$

В линейном приближении это уравнение преобразуется к виду

$$(\hat{Q}_0 + \delta\hat{Q}) \mathbf{A}_\alpha = \rho(v_{0\alpha}^2 + 2v_{0\alpha}\delta v_\alpha) \mathbf{A}_\alpha, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\hat{Q} &= \mathbf{m}_0 \hat{c} \delta\mathbf{m} + \delta\mathbf{m} \hat{c} \mathbf{m}_0 - iQ''_0, \\ \hat{Q}_0 &= \hat{Q}'(\mathbf{m}_0), \quad Q''_0 = \hat{Q}''(\mathbf{m}_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Разложим векторы поляризации \mathbf{A}_α в (14) по компонентам базиса $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}, \mathbf{A}_{03}\}$:

$$\mathbf{A}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{A}_{0\beta}, \quad (16)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и по повторяющимся индексам β предполагается суммирование. Подставляя разложение (16) при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ в уравнение (14), получим

$$\begin{aligned} \delta\hat{Q} \mathbf{A}_1 &= 2\rho v_0 \delta v_1 \mathbf{A}_1 + \rho(v_0^2 - v_{03}^2) a_{13} \mathbf{A}_{03}, \\ \delta\hat{Q} \mathbf{A}_2 &= 2\rho v_0 \delta v_2 \mathbf{A}_2 + \rho(v_0^2 - v_{03}^2) a_{23} \mathbf{A}_{03}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из этих уравнений видно, что коэффициенты a_{13} и a_{23} действительно малы по сравнению с остальными коэффициентами $a_{\alpha\beta}$ разложения (16). Поэтому в линейном приближении векторы \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 можно заменить их проекциями на плоскость вырождения D :

$$\mathbf{A}_1 \approx a_{11} \mathbf{A}_{01} + a_{12} \mathbf{A}_{02}, \quad \mathbf{A}_2 \approx a_{21} \mathbf{A}_{01} + a_{22} \mathbf{A}_{02}. \quad (18)$$

Умножая уравнения (17) скалярно на \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 (18), нетрудно получить две системы, определяющие коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ в разложениях (18):

$$\begin{aligned} (\delta Q_{11} - 2\rho v_0 \delta v_1) a_{11} + \delta Q_{12} a_{12} &= 0, \\ \delta Q_{12} a_{11} + (\delta Q_{22} - 2\rho v_0 \delta v_1) a_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\delta Q_{11} - 2\rho v_0 \delta v_2) a_{21} + \delta Q_{12} a_{22} &= 0, \\ \delta Q_{12} a_{21} + (\delta Q_{22} - 2\rho v_0 \delta v_2) a_{22} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\delta Q_{ij} = \mathbf{A}_{0i} \cdot \delta \hat{Q} \mathbf{A}_{0j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (21)$$

Условия существования нетривиальных решений однородных систем (19) и (20) дают одно и то же квадратное уравнение

$$(\delta Q_{11} - 2\rho v_0 \delta v) (\delta Q_{22} - 2\rho v_0 \delta v) - \delta Q_{12}^2 = 0, \quad (22)$$

корни которого определяют неизвестные добавки $\delta v_{1,2}$ к вырожденной скорости v_0 :

$$\delta v_{1,2} = \mathbf{s}_0 \cdot \delta \mathbf{m} - i s'' \mp R. \quad (23)$$

Здесь введены обозначения

$$R = \sqrt{(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{m} - i p'')^2 + (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{m} - i q'')^2}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{p} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2\rho v_0} (\mathbf{A}_{01} \hat{c} \mathbf{A}_{01} \pm \mathbf{A}_{02} \hat{c} \mathbf{A}_{02}) \mathbf{m}_0, \quad (25)$$

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\rho v_0} (\mathbf{A}_{01} \hat{c} \mathbf{A}_{02} + \mathbf{A}_{02} \hat{c} \mathbf{A}_{01}) \mathbf{m}_0,$$

$$\left. \begin{aligned} s'' \\ p'' \end{aligned} \right\} = \frac{Q''_{11} \pm Q''_{22}}{4\rho v_0}, \quad q'' = \frac{Q''_{12}}{2\rho v_0}, \quad (26)$$

$$Q''_{ij} = \mathbf{A}_{0i} \cdot \hat{Q}''_0 \mathbf{A}_{0j}. \quad (27)$$

Векторы \mathbf{s}_0 , \mathbf{p} и \mathbf{q} обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = v_0, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{m}_0 = 0. \quad (28)$$

С учетом (23), системы (19) и (20) легко решаются, что позволяет найти и направления векторов поляризации $\mathbf{A}_{1,2}$ вырожденных ветвей в рассматриваемой области:

$$\mathbf{A}_{1,2} \parallel -(\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{m} - i q'') \mathbf{A}_{01} + (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{m} - i p'' \pm R) \mathbf{A}_{02}. \quad (29)$$

Нетрудно проверить, что векторы (29) взаимно ортогональны в соответствии с (8): $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0$.

4. РАСЩЕПЛЕНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ОСИ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ

При выключенном поглощении уравнение (23) превращается в известное [8] выражение, описывающее локальную геометрию полостей поверхности фазовых скоростей

$$v_{1,2}(\mathbf{m}) = v_0 + \delta v_{1,2}(\mathbf{m}_0 + \delta \mathbf{m})$$

вблизи от точки вырождения $v_1(\mathbf{m}_0) = v_2(\mathbf{m}_0) = v_0$:

$$\delta v_{1,2} = \mathbf{s}_0 \cdot \delta \mathbf{m} \mp \sqrt{(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{m})^2 + (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{m})^2}. \quad (30)$$

Если векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} отличны от нуля и не параллельны друг другу ($\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq 0$), то выражение (30) описывает окрестность конического контакта полостей $v_{1,2}(\mathbf{m})$ поверхности фазовых скоростей, а значит, и полостей $1/v_{1,2}(\mathbf{m})$ поверхности медленности. Это и соответствует коническому вырождению общего типа.

Как уже говорилось, включение поглощения вызывает появление малой мнимой добавки к фазовой скорости: $v = v' - i v''$. Таким образом, наряду с поверхностью медленности, появляется поверхность поглощения $v''(\mathbf{m})$. При этом с вещественной компонентой фазовой скорости v' тоже происходят важные изменения. Как мы увидим, они приводят к топологическим изменениям поверхности медленности $1/v'(\mathbf{m})$. Все это описывается уравнением (23).

Условие вырождения $\delta v_1 = \delta v_2$ в (23) сводится к требованию равенства нулю комплексного подкоренного выражения в (24), т. е. к системе уравнений

$$(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{m})^2 + (\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{m})^2 - p''^2 - q''^2 = 0, \quad (31)$$

$$p''(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{m}) + q''(\mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{m}) = 0. \quad (32)$$

Эта система имеет два решения для $\delta \mathbf{m}$, отвечающие точкам пересечения эллипса (рис. 2)

$$\left(\frac{\delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}}{r} \right)^2 + \left(\frac{\delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{q}}{r} \right)^2 = 1, \quad r = \sqrt{p''^2 + q''^2} \quad (33)$$

с линией $\delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = 0$, проходящей через конец вектора \mathbf{m}_0 перпендикулярно вектору

$$\mathbf{M} = p'' \mathbf{p} + q'' \mathbf{q} = r(\mathbf{p} \sin \alpha + \mathbf{q} \cos \alpha). \quad (34)$$

Здесь введен угол α , определенный выражениями

$$\sin \alpha = p''/r, \quad \cos \alpha = q''/r. \quad (34')$$

Таким образом, включение поглощения приводит к расщеплению конической оси \mathbf{m}_0 на две оси, проходящие вдоль волновых нормалей $\mathbf{m}_{\pm} = \mathbf{m}_0 + \delta \mathbf{m}_{\pm}$, где

$$\delta \mathbf{m}_{\pm} = \pm \frac{\mathbf{m}_0 \times (p'' \mathbf{p} + q'' \mathbf{q})}{\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}]}. \quad (35)$$

Как видно из (35), проекции векторов $\delta \mathbf{m}_{\pm}$ на \mathbf{p} и \mathbf{q} равны (рис. 2б)

$$\delta \mathbf{m}_{\pm} \cdot \mathbf{p} = \mp q'', \quad \delta \mathbf{m}_{\pm} \cdot \mathbf{q} = \pm p''. \quad (36)$$

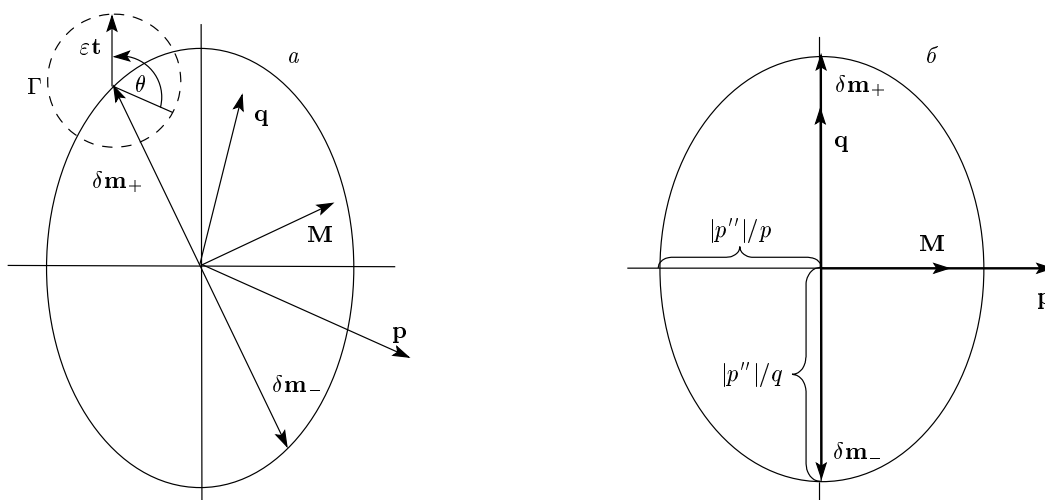


Рис. 2. Схематическое изображение эллипса (34) в общем случае (а) и для конической акустической оси \mathbf{m}_0 , принадлежащей плоскости симметрии кристалла (б)

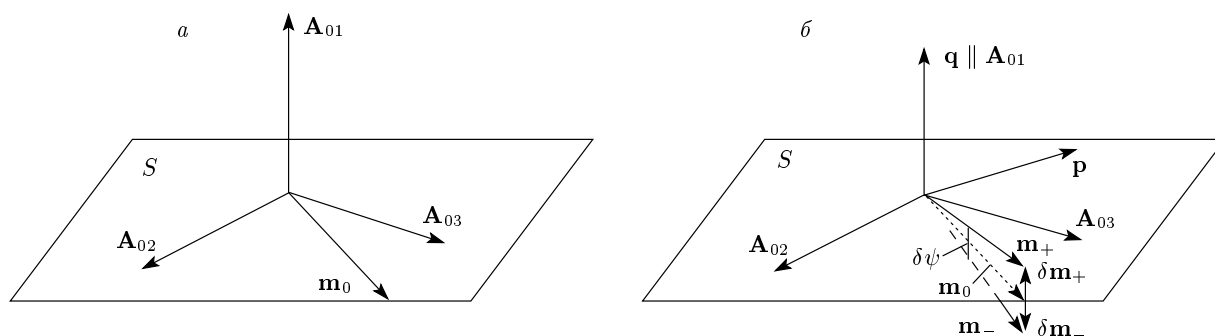


Рис. 3. Акустическая ось \mathbf{m}_0 в плоскости симметрии S кристалла (а) и ее расщепление из-за поглощения (б)

Рассмотрим в качестве примера расщепление конической оси \mathbf{m}_0 , лежащей в плоскости симметрии S кристалла. В этом случае, очевидно, вектор поляризации \mathbf{A}_{03} невырожденной ветви тоже принадлежит плоскости S . Тогда векторы \mathbf{A}_{01} и \mathbf{A}_{02} естественно выбрать так, чтобы вектор \mathbf{A}_{01} был направлен вдоль нормали к плоскости S , а вектор \mathbf{A}_{02} был в плоскости S вместе с векторами \mathbf{m}_0 и \mathbf{A}_{03} (рис. 3а). Легко проверить, что в этом случае из-за симметрии тензоров c_{ijkl} и η_{ijkl} рассматриваемого кристалла, принадлежащего сингонии не ниже моноклинной, должно быть

$$q'' = 0, \quad \mathbf{q} \parallel \mathbf{A}_{01}, \quad \mathbf{p} \parallel [\mathbf{A}_{01} \times \mathbf{m}_0]. \quad (37)$$

С учетом соотношений (36), (37) расщепление в данном случае определяется векторами

$$\delta \mathbf{m}_{\pm} = \pm \frac{|p''|}{q} \mathbf{A}_{01}. \quad (38)$$

Следует отметить, что при найденной взаимной ортогональности векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} эллипс (33) выглядит особенно просто (см. рис. 2б). Таким образом, в рассматриваемом частном случае расщепление осей происходит в плоскости, ортогональной плоскости симметрии, а угол расщепления (рис. 3б)

$$\delta \psi \approx 2|\delta \mathbf{m}_{\pm}| = 2|p''|/q \quad (39)$$

пропорционален поглощению.

5. ЛОКАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ МЕДЛЕННОСТИ ВБЛИЗИ СИНГУЛЯРНЫХ ОСЕЙ

Заметим, что на всей прямой линии $\delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = 0$ подкоренное выражение в (24) чисто вещественно, отрицательно внутри эллипса (33) между точками

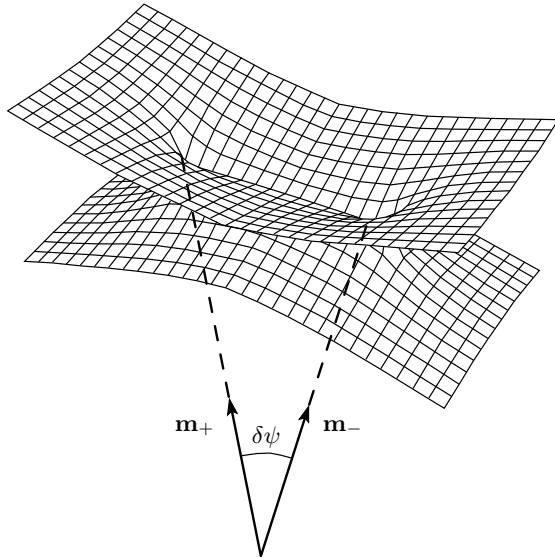


Рис. 4. Самопересечение поверхности медленности $1/v'_{1,2}(\mathbf{m})$ и расщепленные акустические оси

вырождения (35) (см. рис. 2) и положительно за пределами эллипса. Это значит, что на части линии, лежащей внутри эллипса, величина R в (23) является чисто мнимой. Поэтому на линии, соединяющей точки вырождения, вещественные компоненты фазовой скорости $v'_1(\mathbf{m})$ и $v'_2(\mathbf{m})$ должны совпадать. Это задает линии самопересечения как поверхности фазовых скоростей $v'_{1,2}(\mathbf{m})$, так и поверхности медленности $1/v'_{1,2}(\mathbf{m})$. По совершенно аналогичным основаниям можно заключить, что соответствующие полости $v''_{1,2}(\mathbf{m})$ поверхности поглощения должны пересекаться на продолжении линии $\delta\mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = 0$ за пределами эллипса. На рис. 4 схематически показана поверхность медленности $1/v'_{1,2}(\mathbf{m})$ с линией самопересечения и расщепленными акустическими осями, проходящими через ее концы.

Рассмотрим теперь более детально особенности геометрии этой поверхности в близкой окрестности сингулярных осей. В соответствии с формулами (23), (24), в общем случае при расщеплении конической акустической оси \mathbf{m}_0 на две, $\mathbf{m}_{\pm} = \mathbf{m}_0 \pm \delta\mathbf{m}_{\pm}$, фазовые скорости вдоль новых осей оказываются различными:

$$v_0 \rightarrow v'_{0\pm} = v_0 \pm \mathbf{s}_0 \cdot \delta\mathbf{m}_{\pm}.$$

Впрочем, в случае, когда исходное направление \mathbf{m}_0 находится в плоскости симметрии, вектор \mathbf{s}_0 , очевидно, тоже должен принадлежать этой плоскости, а потому $\mathbf{s}_0 \cdot \delta\mathbf{m}_{\pm} = 0$, и различие исчезает.

Вернемся к общему случаю произвольной анизотропии и рассмотрим малую окрестность одной из сингулярных осей, скажем оси $\mathbf{m}_+ = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}_+$. Найдем скорости изонормальных волн на контуре Γ (см. рис. 2): $\mathbf{m} = \mathbf{m}_+ + \delta\mathbf{m}_{\varepsilon}(\theta)$, который имеет малый радиус $\varepsilon = |\delta\mathbf{m}_{\varepsilon}| \ll |\delta\mathbf{m}_+|$ и расположен в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{m}_0 . Положим

$$\delta\mathbf{m}_{\varepsilon}(\theta) = \varepsilon \mathbf{t}(\theta), \quad (40)$$

где ориентация единичного вектора \mathbf{t} задается азимутом θ , отсчитываемым от вектора \mathbf{p} :

$$\mathbf{t}(\theta) = (\mathbf{p} \cos \theta + [\mathbf{m}_0 \times \mathbf{p}] \sin \theta) / p. \quad (41)$$

Таким образом, вектор $\varepsilon \mathbf{t}$ пробегает по всему контуру Γ при изменении азимута θ от 0 до 2π (см. рис. 2).

С учетом (40), (41), уравнения (23), (24) в главном порядке по ε для приращений вещественных фазовых скоростей на контуре Γ дают

$$\delta v'_{1,2}(\varepsilon, \theta) = v'_{1,2} - v'_{0+} = \mp \sqrt{\varepsilon} \operatorname{Re} f(\theta), \quad (42)$$

где

$$f(\theta) = \sqrt{2\mathbf{t} \cdot (\mathbf{N} - i\mathbf{M})}, \quad \mathbf{N} = -q''\mathbf{p} + p''\mathbf{q}. \quad (43)$$

Как видно из (42), зависимость $\delta v'_{1,2}(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет бесконечную производную по ε в каждом сечении $\theta \neq \theta_0$, где угол θ_0 отвечает переходу вектора $\delta\mathbf{m}_{\varepsilon}$ через линию самопересечения, где $\operatorname{Re} f(\theta_0) = 0$. Такого рода сингулярность зависимости $\delta v'_{1,2}(\varepsilon)$ на краю ребра клина самопересечения соответствует заостренному «носику» поверхностей $v'_{1,2}(\mathbf{m})$ и $1/v'_{1,2}(\mathbf{m})$ и плоскому «вееру» нормалей к этим поверхностям на рассматриваемом контуре $\mathbf{m} = \mathbf{m}_+ + \delta\mathbf{m}_{\varepsilon}(\theta)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (рис. 5).

6. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ У СИНГУЛЯРНЫХ ОСЕЙ

На том же контуре Γ (40) векторы поляризации (29) с точностью до постоянного множителя можно выразить в форме

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_{01} + i \left(1 \mp \frac{\sqrt{\varepsilon} f(\theta)}{q'' + ip''} \right) \mathbf{A}_{02}. \quad (44)$$

Здесь функцию $f(\theta)$ (43) для дальнейшего анализа целесообразно конкретизировать:

$$f(\theta) = A \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cos \theta + g \sin \theta - ip^2 \cos \theta}, \quad (45)$$

где

$$A = \sqrt{2(p'' - iq'')/p}, \quad g = \mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}]. \quad (46)$$

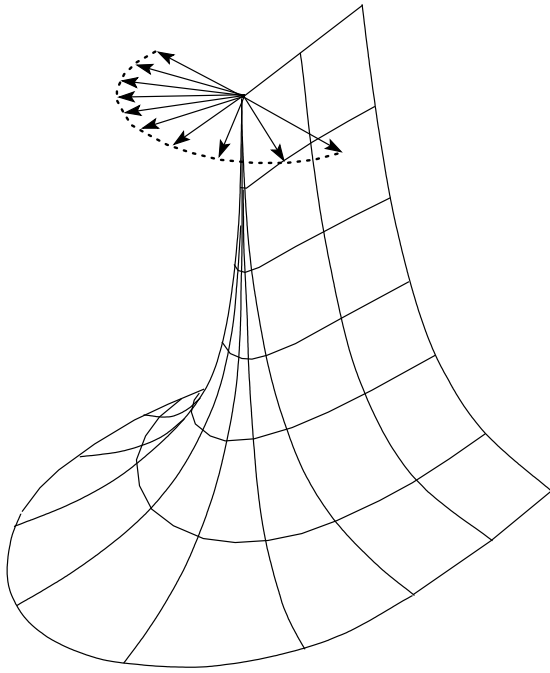


Рис. 5. Фрагмент внутренней вырожденной полости $1/v'_2(\mathbf{m})$ поверхности медленностей вблизи сингулярной точки на краю клина самопересечения и плоский веер нормалей к поверхности в этой точке

Нетрудно убедиться, что при полном обходе по контуру Γ , т. е. при изменении θ от 0 до 2π , функция $f(\theta)$ (45) изменяет знак. Заметим, что фаза Ψ комплексной функции

$$f(\theta)/A = R(\theta) \exp [i\Psi(\theta)] \quad (47)$$

должна быть вдвое меньше, чем фаза квадрата этой функции

$$R^2 \exp(2i\Psi) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cos \theta + g \sin \theta - ip^2 \cos \theta. \quad (48)$$

С другой стороны, из (48) следует, что

$$\Psi(\theta) = -\frac{1}{2} \left(\text{Arctg} \frac{p^2}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + g \text{tg} \theta} \right), \quad (49)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{gp^2 \cos^2 2\Psi}{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cos \theta + g \sin \theta)^2}. \quad (50)$$

Отсюда получаем $\Psi(2\pi) - \Psi(0) = \pi \text{sign} g$. Таким образом,

$$f(2\pi) = -f(0), \quad (51)$$

и после полного обхода по малому контуру Γ вокруг сингулярной оси \mathbf{m}_+ реализуется тождественное преобразование поля поляризаций (44) в себя в следующей форме:

$$\mathbf{A}_1(2\pi) = \mathbf{A}_2(0), \quad \mathbf{A}_2(2\pi) = \mathbf{A}_1(0). \quad (52)$$

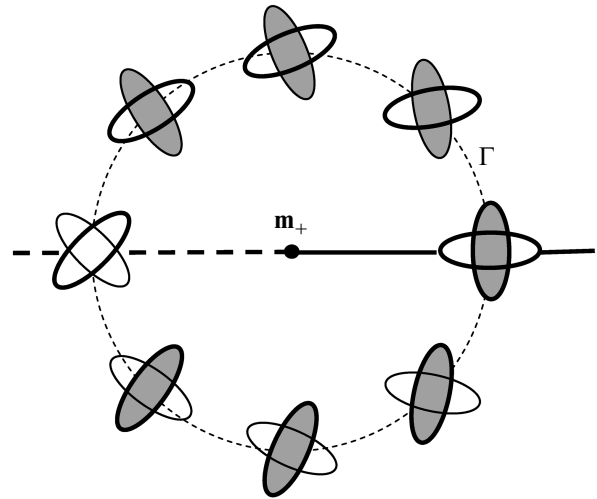


Рис. 6. Поляризационная особенность у сингулярной акустической оси для $g > 0$: при полном обороте волновой нормали вокруг этой оси эллипсы поляризации поворачиваются на угол $\pi/2$. Различие в скоростях изонормальных волн символически представлено различием в толщинах контура каждого эллипса. Цвет эллипса (серый или белый) символизирует различие в степени поглощения. Линия равных скоростей показана сплошной прямой, линия равных поглощений — штриховой

Иными словами, каждый из двух ортогональных эллипсов поляризации при полном обходе вокруг сингулярной оси поворачивается на угол $\pi/2$, превращаясь в поляризацию другой изонормальной волны (рис. 6). Важно, что при этом одновременно комплексные скорости $v_{1,2} = v'_{1,2} - iv''_{1,2}$ тех же ветвей тоже обмениваются полостями на волновых поверхностях, как это показано на рис. 7.

Обнаруженная сингулярность поля поляризаций в окрестности направления \mathbf{m}_+ (рис. 6) может быть охарактеризована индексом Пуанкаре n , определяемым как величина совокупного поворота поляризации (в единицах 2π) при полном обходе вокруг точки вырождения по контуру Γ . Величина найденного выше поворота эллипсов поляризации равна $\pi/2$, а направление вращения, в соответствии с (50), полностью определяется знаком параметра g (46). Поэтому получаем

$$n = \frac{1}{4} \text{sign} (\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}]) \quad (53)$$

(см. также [10]). Можно показать, что та же формула справедлива и для другой точки вырождения, отвечающей сингулярной оси вдоль \mathbf{m}_- .

Таким образом, физическая тождественность

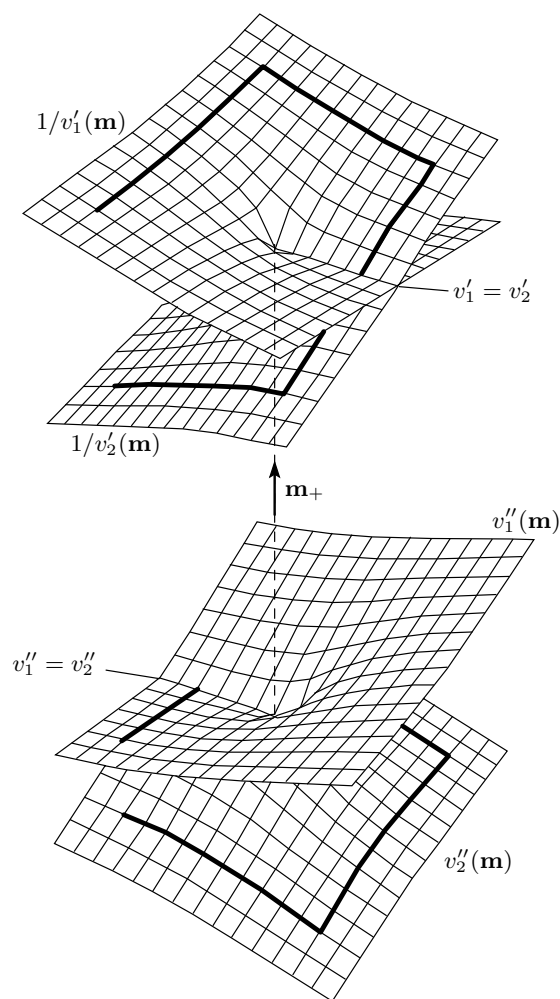


Рис. 7. Конфигурация поверхностей $1/v'_{1,2}(\mathbf{m})$ и $v''_{1,2}(\mathbf{m})$ в окрестности сингулярной оси \mathbf{m}_+ . Жирными линиями показан непрерывный переход между внешними и внутренними полостями поверхностей медленности и поглощения при полном обходе вокруг оси \mathbf{m}_+

двух картин при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ осуществляется не совпадением волновых характеристик внутри каждой из ветвей, как это имеет место при нулевом поглощении, а идентичностью их совокупности. Это становится топологически возможным, благодаря такой новой черте волновых поверхностей поглощающих кристаллов, как их самопересечение. При отсутствии поглощения, когда вырожденные полости поверхности медленности имеют единственную точку контакта, на любом контуре вокруг этой точки одна из двух изонормальных волн всегда быстрее другой. Поэтому отвечающие им линейные отрезки поляризации как бы имеют разную тол-

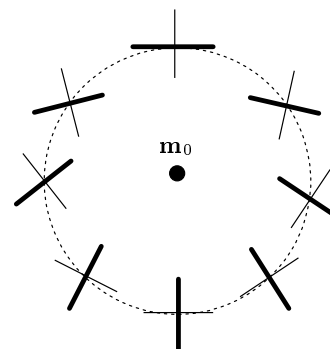


Рис. 8. Сингулярное поведение поляризационных полей в окрестности акустической оси непоглощающего кристалла (индекс Пуанкаре $n = 1/2$). Ненаправленные отрезки представляют поляризационные конфигурации совокупного волнового поля двух ветвей

щину. Следовательно, для совмещения «креста», образованного совокупностью таких векторов, с самим собой требуется его поворот на минимальный угол π , а не $\pi/2$, как в только что разобранным случае (см. рис. 6). Поворот на $\pi/2$ совместит линейные кресты лишь без учета их толщины, а смена их толщин топологически невозможна (рис. 8).

Именно поэтому, согласно работе [8], при отсутствии поглощения конической акустической оси вдоль \mathbf{m}_0 отвечает сингулярность в поле поляризаций с индексом Пуанкаре $n = (1/2) \text{sign } g$. Это минимально возможный индекс в вещественном поле поляризаций. Ее распад на две сингулярности (53) при включении поглощения удовлетворяет закону сохранения индекса. С другой стороны, тот же совокупный индекс $\pm 1/2$ получается при обходе сразу пары расщепленных точек (рис. 9).

7. КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ В ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛАХ

7.1. Коническая рефракция без учета поглощения

Как уже говорилось, при отсутствии поглощения вдоль акустической оси \mathbf{m}_0 наряду с невырожденной волной с вектором поляризации \mathbf{A}_{03} может распространяться бесконечное число волн, поляризованных в плоскости вырождения D ортогональной вектору \mathbf{A}_{03} (см. рис. 1). Таким образом, в базе $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}\}$, принадлежащем этой плоскости, при любом угле β в интервале $0 \leq \beta \leq 2\pi$ вектор

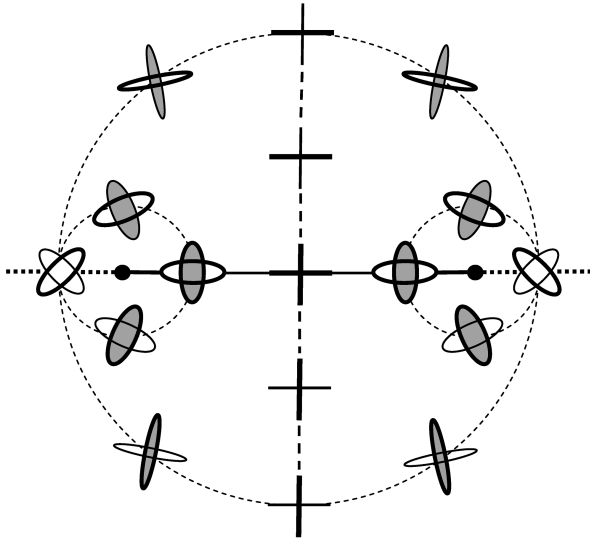


Рис. 9. Поле эллиптических поляризаций вырожденных ветвей в окрестности пары сингулярных акустических осей поглощающего кристалла. На малых контурах вокруг расщепленных точек вырождения индексы Пуанкаре $n = 1/4$. Совокупный индекс $n = 1/2$ на внешнем контуре совпадает с индексом невозмущенного линейного поля поляризаций вокруг исходной акустической оси непоглощающего кристалла. Кресты на вертикальной штриховой линии отвечают линейной поляризации

$$\mathbf{A}(\beta) = \mathbf{A}_{01} \cos \beta + \mathbf{A}_{02} \sin \beta \quad (54)$$

задает поляризацию собственной волны, распространяющейся вдоль направления \mathbf{m}_0 с фазовой скоростью v_0 . Конечно, в том же направлении может распространяться и волна с циркулярной поляризацией $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{01} + i\mathbf{A}_{02}$.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну с волновой нормалью \mathbf{m}_0 вдоль акустической оси, поляризацией \mathbf{A} и скоростью v_0 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = C\mathbf{A} \exp(i\Phi_0), \quad \Phi_0 = k(\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{r} - v_0 t). \quad (55)$$

Вектор Пойнтинга такой волны равен [6]

$$\mathbf{P} = (\text{Re } \dot{\mathbf{u}}) \hat{c} (\text{Re } \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{m}_0 / v_0. \quad (56)$$

Для линейной и циркулярной поляризаций имеем соответственно

$$\text{Re } \mathbf{u}_{lin} = C\mathbf{A}(\beta) \cos \Phi_0, \quad (57)$$

$$\text{Re } \mathbf{u}_{cir} = C [\mathbf{A}_{01} \cos \Phi_0 - \mathbf{A}_{02} \sin \Phi_0]. \quad (58)$$

В этих двух случаях для вектора Пойнтинга получаются разные выражения:

$$\mathbf{P}_{lin} = C^2 \rho \omega^2 (\mathbf{s}_0 + \mathbf{p} \cos 2\beta + \mathbf{q} \sin 2\beta) \sin^2 \Phi_0, \quad (59)$$

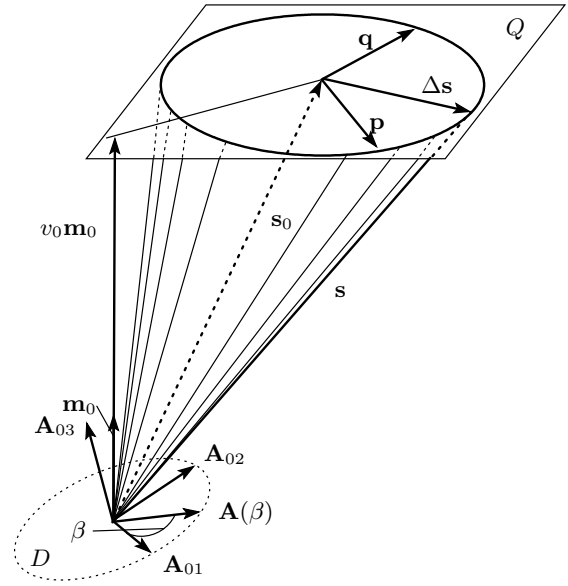


Рис. 10. Конус внутренней конической рефракции

$$\mathbf{P}_{cir} = C^2 \rho \omega^2 (\mathbf{s}_0 - \mathbf{p} \cos 2\Phi_0 + \mathbf{q} \sin 2\Phi_0). \quad (60)$$

Совершенно аналогично находят плотности упругой энергии $W = \rho(\text{Re } \dot{\mathbf{u}})^2$:

$$W_{lin} = C^2 \rho \omega^2 \sin^2 \Phi_0, \quad W_{cir} = C^2 \rho \omega^2. \quad (61)$$

С учетом формул (59)–(61), лучевые скорости рассматриваемых волн равны

$$\mathbf{s}_{lin} = \mathbf{P}_{lin} / W_{lin} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{p} \cos 2\beta + \mathbf{q} \sin 2\beta, \quad (62)$$

$$\mathbf{s}_{cir} = \mathbf{P}_{cir} / W_{cir} = \mathbf{s}_0 - \mathbf{p} \cos 2\Phi_0 + \mathbf{q} \sin 2\Phi_0. \quad (63)$$

За период циркулярно поляризованной волны при полном обороте вектора поляризации в плоскости вырождения D вектор лучевой скорости \mathbf{s}_{cir} (63) дважды очерчивает конус (рис. 10). При этом конец вектора \mathbf{s}_{cir} дважды пробегает по эллипсу

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0 = -\mathbf{p} \cos 2\Phi_0 + \mathbf{p} \sin 2\Phi_0, \quad (64)$$

в котором векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} являются сопряженными полудиаметрами [6]. С учетом (28) плоскость Q эллипса ортогональна \mathbf{m}_0 , а направления обхода эллипса (64) и вращения поляризации (58) совпадают при $\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] > 0$ и противоположны при $\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] < 0$.

Для линейно поляризованной волны тот же конус рефракции описывается вектором \mathbf{s}_{lin} (62) при варьировании ориентации вектора $\mathbf{A}(\beta)$ (54), когда угол β изменяется в интервале $0 < \beta < \pi$ (рис. 9). Именно эта схема была реализована в опытах [1].

7.2. Эллипсы поляризации $\mathbf{A}_{1,2}$ на ребре клина самопересечения

Рассмотрим теперь волновые характеристики поглощающего кристалла на ребре клина самопересечения поверхности медленности. Для описания перемещения волновой нормали по линии, соединяющей расщепленные точки вырождения $\delta\mathbf{m}_{\pm}$, введем вектор $\delta\mathbf{m}_{\xi} = \delta\mathbf{m}_{+} \sin \xi$. При изменении угла ξ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ этот вектор пробегает по всему ребру от одной сингулярной оси до другой. Подстановка $\delta\mathbf{m} = \delta\mathbf{m}_{\xi}$ в выражение (29) дает векторы поляризации изонормальных волн на ребре клина. С учетом соотношений (36) имеем

$$\mathbf{A}_{1,2} = \{(\sin \alpha \sin \xi - i \cos \alpha)\mathbf{A}_{01} + [\cos \alpha \sin \xi + i(\sin \alpha \mp \cos \xi)]\mathbf{A}_{02}\} \times [2(1 \mp \sin \alpha \cos \xi)]^{-1/2}, \quad (65)$$

где выполнена нормировка (9) и использованы обозначения, введенные в (34').

Напомним, что на ребре клина совпадают вещественные компоненты фазовых скоростей, $v'_1 = v'_2 = v'_{\xi}$, зависящие, однако, от положения точки на клине. При этом мнимые компоненты $v''_{1,2}$ совпадают только в конечных точках $\xi = \pm\pi/2$. С учетом (6) вещественные компоненты векторов смещений $\mathbf{u}_{1,2}$ можно представить в виде

$$\text{Re } \mathbf{u}_{1,2}(\mathbf{r}, t) = C_{1,2} \exp(-k''_{1,2} \mathbf{m}_{\xi} \cdot \mathbf{r}) \times \text{Re} [\mathbf{A}_{1,2} \exp(i\Phi_{\xi})] \equiv C_{1,2} \exp(-k''_{1,2} \mathbf{m}_{\xi} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{U}_{1,2}, \quad (66)$$

где введены волновая нормаль \mathbf{m}_{ξ} и вещественная фаза Φ_{ξ} на ребре клина,

$$\mathbf{m}_{\xi} = \mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}_{\xi}, \quad \Phi_{\xi} = k'_{\xi} \mathbf{m}_{\xi} \cdot \mathbf{r} - \omega t, \quad (67)$$

а также безразмерные векторы смещения

$$\mathbf{U}_{1,2} = \text{Re} [\mathbf{A}_{1,2} \exp(i\Phi_{\xi})]. \quad (68)$$

Существенно, что в формуле (66) тривиальное затухание волны, пропорциональное $\exp(-k''_{1,2} \mathbf{m}_{\xi} \cdot \mathbf{r})$, отделено от векторов $\mathbf{U}_{1,2}$, описывающих более важные для нас эффекты поглощения.

В рассматриваемой стационарной задаче выбор начала отсчета времени, естественно, ни на что не влияет и может быть разным для не зависящих друг от друга изонормальных волн. Поэтому векторы $\mathbf{U}_{1,2}$ так же, как и векторы поляризации $\mathbf{A}_{1,2}$, определены с точностью до знака. Ниже этот знак

будет выбираться исходя из компактности выражений.

Заметим, что при сканировании волновой нормалью \mathbf{m}_{ξ} ребра клина между сингулярными осями, т. е. при изменении ξ в интервале $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$, эллиптическая поляризация, задаваемая формулами (65), (68), быстро меняется. Следуя [6], нетрудно убедиться, что определяемая этими формулами эллиптичность волны отвечает вращению, знак которого не зависит от угла α и соответствует правому винту вдоль распространения, если $\sin \xi > 0$, и левому винту, если $\sin \xi < 0$. На краях клина при $\xi = \pi/2$ или $\xi = -\pi/2$, где реализуются сингулярные вырождения, изонормальные волны совпадают: $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 \equiv \mathbf{U}_0$. В обоих случаях имеет место циркулярная поляризация, но с разными «знаками» вращения:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0|_{\xi=\pi/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{A}_{01} \cos \Phi_{\xi} - \mathbf{A}_{02} \sin \Phi_{\xi}), \\ \mathbf{U}_0|_{\xi=-\pi/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{A}_{01} \cos \Phi_{\xi} + \mathbf{A}_{02} \sin \Phi_{\xi}). \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь с помощью выбора начала отсчета времени из аргументов исключен угол α .

Во всех остальных точках клина эллипсы поляризации изонормальных волн различны. Посередине ребра при $\xi = 0$ изонормальные волны имеют разные линейные поляризации, ортогональные друг другу:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1|_{\xi=0} &= \left\{ \mathbf{A}_{01} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_{02} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \sin \Phi_0, \\ \mathbf{U}_2|_{\xi=0} &= \left\{ \mathbf{A}_{01} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{A}_{02} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \sin \Phi_0. \end{aligned} \quad (70)$$

Можно убедиться, что линейная поляризация (70) сохраняется на целой линии $\delta\mathbf{m} \parallel \mathbf{M}$ (34), которая идет перпендикулярно ребру клина (см. рис. 9).

Выражения для эллипсов поляризации изонормальных волн на ребре клина сильно упрощаются в рассматривавшемся выше частном случае, когда исходная коническая акустическая ось \mathbf{m}_0 принадлежит плоскости симметрии кристалла, что дает $q'' = 0$. Предполагая для определенности, что $p'' > 0$, можно положить $\alpha = \pi/2$. Тогда, вместо (65), для эллиптической поляризации изонормальных волн на ребре клина имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_{01} \cos(\xi/2) + i\mathbf{A}_{02} \sin(\xi/2), \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_{01} \sin(\xi/2) + i\mathbf{A}_{02} \cos(\xi/2). \end{aligned} \quad (71)$$

Вращение векторов смещения $\mathbf{U}_{1,2}$ (68) по эллипсам теперь описывается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{A}_{01} \cos(\xi/2) \cos \Phi - \mathbf{A}_{02} \sin(\xi/2) \sin \Phi, \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{A}_{01} \sin(\xi/2) \cos \Phi - \mathbf{A}_{02} \cos(\xi/2) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (72)$$

Выражения (72) задают эллипсы поляризации в параметрической форме. Длины горизонтальной и вертикальной полуосей первого эллипса равны $|\cos(\xi/2)|$ и $|\sin(\xi/2)|$. Для второго эллипса те же длины относятся соответственно к вертикальной и горизонтальной полуосям. На краях ребра клина при $\xi = \pm\pi/2$ длины полуосей эллипсов равны друг другу, а поляризация является циркулярной. При перемещении от краев ребра к его середине большие полуоси эллипсов увеличиваются, а малые уменьшаются до нуля.

Таким образом, и общие формулы (69), (70), и частный пример (72) приводят к одинаковой картине распределения поляризации на ребре клина. По мере перемещения волновой нормали по ребру от одной сингулярной оси к другой изонормальные волны, стартуя с вырождения и циркулярной поляризации определенного знака, монотонно уменьшают свою эллиптичность, которая обращается в нуль в центре ребра, где эллипсы поляризации вытягиваются в векторы. С переходом на вторую половину клина эллиптичность волн изменяет знак и монотонно растет по величине, превращаясь в циркулярную поляризацию в точке вырождения на другом конце ребра. Рисунок 11 иллюстрирует поведение поляризации изонормальных волн на ребре клина.

Рассмотрим теперь кинематику движения векторов смещения изонормальных волн по эллипсам поляризации. Выразим координаты концов радиус-векторов \mathbf{U}_α ($\alpha = 1, 2$) на эллипсе в полярных координатах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$:

$$\mathbf{U}_\alpha = U_\alpha (\mathbf{A}_{01} \cos \varphi_\alpha + \mathbf{A}_{02} \sin \varphi_\alpha). \quad (73)$$

Конечно, для разных азимутов φ_α длины U_α этих радиус-векторов на эллипсе различны. Сопоставляя формулы (65), (68) и (73), получим

$$U_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \cos \xi \times \frac{(\sin \alpha \mp \cos \xi) \cos 2\Phi_\xi + \sin \xi \cos \alpha \sin 2\Phi_\xi}{1 \mp \sin \alpha \cos \xi} \right], \quad (74)$$

$$\text{tg } \varphi_{1,2} = \frac{\cos \alpha \sin \xi - (\sin \alpha \mp \cos \xi) \text{tg } \Phi_\xi}{\sin \alpha \sin \xi + \cos \alpha \text{tg } \Phi_\xi}. \quad (75)$$

Дифференцируя по времени последнее уравнение, нетрудно найти угловые скорости $\dot{\varphi}_{1,2}$ движе-

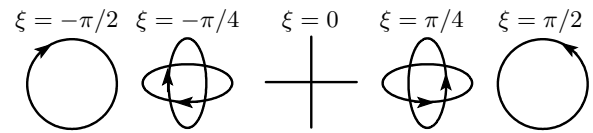


Рис. 11. Распределение поляризации изонормальных волн на ребре клина самопересечения поверхности медленности

ния концов радиус-векторов $\mathbf{U}_{1,2}$ по эллипсу поляризации:

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\omega \sin \xi}{2U_{1,2}^2}, \quad (76)$$

где принято во внимание, что $\dot{\Phi}_\xi = -\omega$. Как видно из (76), угловые скорости по-разному ведут себя во времени в разных точках «наблюдения» на клине. Вдоль сингулярных осей ($\xi = \pm\pi/2$), когда изонормальные эллипсы поляризации сливаются в один круг (69), знаменатель в (76) обращается в единицу, и циркулярное движение имеет постоянную угловую скорость $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \pm\omega$. Здесь верхний и нижний знаки отвечают вращению по правому и левому винту соответственно при $\xi = \pi/2$ и $\xi = -\pi/2$.

С уменьшением величины $|\xi|$ неравномерность движения возрастает и при $|\xi| \ll 1$ приобретает сингулярный характер, когда значительную часть периода скорости $\dot{\varphi}_{1,2}$ малы, а отвечающие им азимутальные углы $\varphi_{1,2}$ почти фиксированы, так что прохождение большей части эллипса происходит за малое время с очень большой скоростью. Это наглядно видно из аналитических формул для обсуждавшегося выше частного случая расщепления акустической оси из плоскости симметрии кристалла (рис. 12), когда

$$\text{tg } \varphi_1 = -\text{tg } \frac{\xi}{2} \text{tg } \Phi_\xi, \quad \text{tg } \varphi_2 = -\text{ctg } \frac{\xi}{2} \text{tg } \Phi_\xi, \quad (77)$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\omega \sin \xi}{1 \pm \cos \xi \cos 2\Phi_\xi}. \quad (78)$$

Из формул (74)–(78) и рис. 11 видно, что функции $\varphi_{1,2}(\Phi_\xi)$ и $\dot{\varphi}_{1,2}(\Phi_\xi)$ имеют период вдвое меньший, чем период волны. Это значит, что уже половина оборота вектора смещения по эллипсу поляризации исчерпывает все физически различные его ориентации.

Представляет также интерес найти секториальные скорости движения, которые, по определению, равны площади, «ометаемой» радиус-векторами $\mathbf{U}_{1,2}$ в единицу времени:

$$v_{1,2}^{sec} = \frac{1}{2} U_{1,2}^2 \dot{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{4} \omega \sin \xi. \quad (79)$$

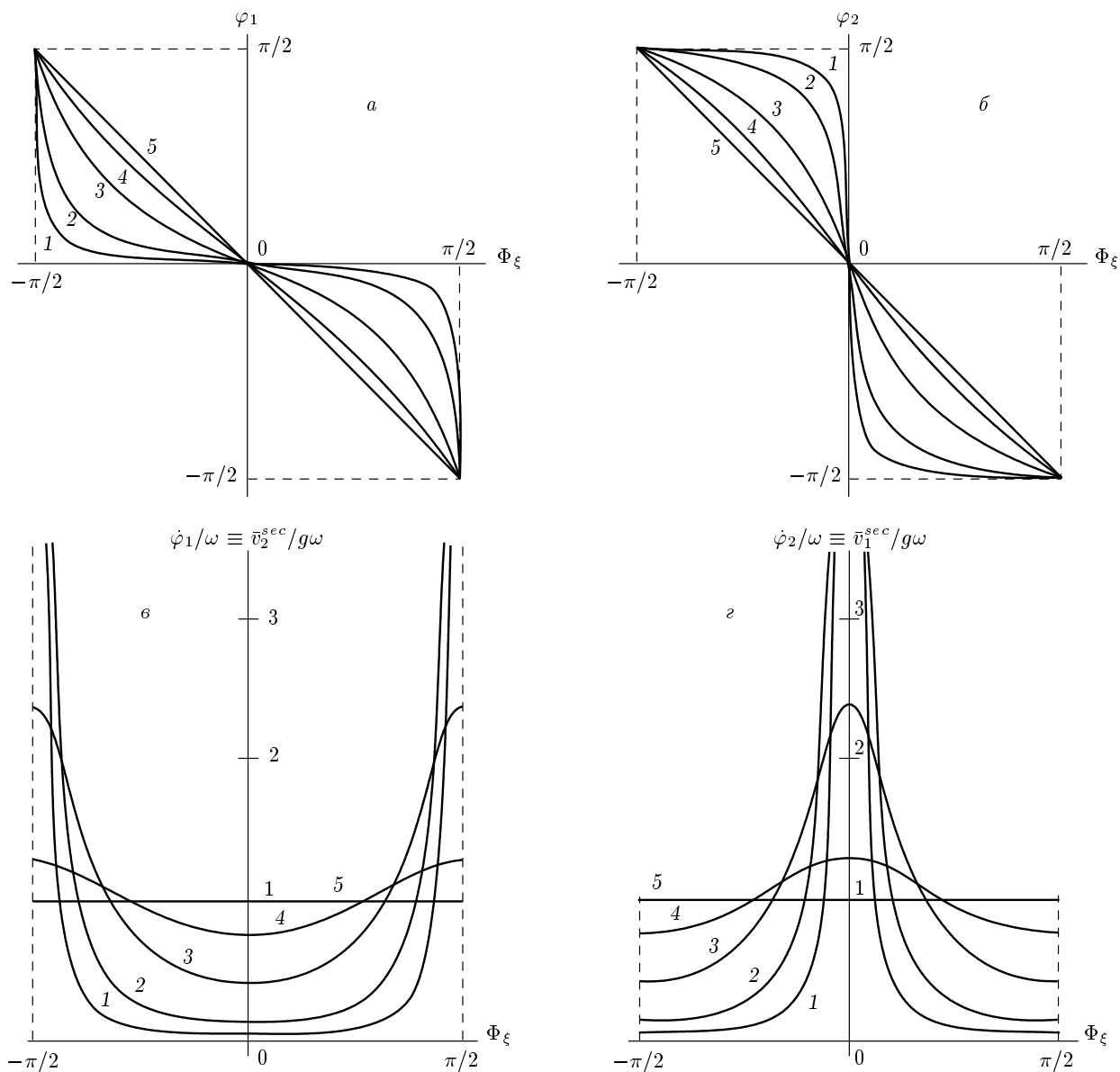


Рис. 12. Зависимости азимутов φ_1 (а) и φ_2 (б) (выражения (77)) и совпадающих нормированных скоростей $\dot{\varphi}_1/\omega \equiv \bar{v}_2^{sec}/g\omega$ (в) и $\dot{\varphi}_2/\omega \equiv \bar{v}_1^{sec}/g\omega$ (г) (см. выражения (78), (79), (99)) от фазы волны Φ_ξ для серии точек «наблюдения» на ребре клина (на примере расщепления конической оси из плоскости симметрии). Линии 1–5 отвечают углам: 1 – $\xi = 5^\circ$; 2 – $\xi = 15^\circ$; 3 – $\xi = 45^\circ$; 4 – $\xi = 75^\circ$; 5 – $\xi = 90^\circ$

Найденное выражение для секториальной скорости справедливо для произвольной анизотропии. Оно одинаково для обеих изонормальных волн и не зависит от времени, что согласуется с выводом [6] для непоглощающих кристаллов. При этом скорость (79) сильно зависит от положения волновой нормали на ребре клина, уменьшаясь до нуля в центре клина ($\xi = 0$), где поляризация становится линейной.

7.3. Универсальный конус рефракции на ребре клина и кинематика прецессии лучевой скорости по этому конусу

Теперь мы подготовлены к обобщению классической теории конической рефракции [6], кратко изложенной в разд. 7.1. Вычислим лучевые скорости изонормальных волн (66) на ребре клина. Подстав-

ляя (66) в (56), получим потоки энергии

$$\mathbf{P}_{1,2} = |C_{1,2} \exp(-k''_{1,2} \mathbf{m}_\xi \cdot \mathbf{r})|^2 \times \\ \times \rho \omega^2 [\mathbf{s}_0(F^2 + G_\mp^2) - \mathbf{p}(G_\mp^2 - F^2) + 2\mathbf{q}FG_\mp], \quad (80)$$

где

$$F = \sin \alpha \sin \xi \sin \Phi_\xi - \cos \alpha \cos \Phi_\xi, \quad (81)$$

$$G_\mp = \cos \alpha \sin \xi \sin \Phi_\xi + (\sin \alpha \mp \cos \xi) \cos \Phi_\xi. \quad (82)$$

Плотность энергии в рассматриваемых изонормальных волнах в тех же терминах равна

$$W_{1,2} = \rho(\operatorname{Re} \dot{\mathbf{u}}_{1,2})^2 = \\ = |C_{1,2} \exp(-k''_{1,2} \mathbf{m}_\xi \cdot \mathbf{r})|^2 \rho \omega^2 (F^2 + G_\mp^2). \quad (83)$$

Соответственно, лучевые скорости этих волн на ребре клина имеют вид

$$\mathbf{s}_{1,2} = \mathbf{P}_{1,2}/W_{1,2} = \mathbf{s}_0 - \mathbf{p} \cos 2\Theta_{1,2} + \mathbf{q} \sin 2\Theta_{1,2}, \quad (84)$$

где

$$\Theta_{1,2} = \Theta_{1,2}(\alpha, \xi, \Phi_\xi), \quad \operatorname{tg} \Theta_{1,2} = F/G_\mp. \quad (85)$$

Формула (84) получается из классического выражения (63) для кристаллов без поглощения после замены в последнем $\Phi_0 \rightarrow \Theta_{1,2}$. Это значит, что в поглощающем кристалле в любой точке на ребре клина концы векторов лучевой скорости $\mathbf{s}_{1,2}$ движутся по одинаковым траекториям, описываемым одним и тем же эллипсом

$$\Delta \mathbf{s}_{1,2} = -\mathbf{p} \cos 2\Theta_{1,2} + \mathbf{q} \sin 2\Theta_{1,2}. \quad (86)$$

Форма этого эллипса полностью определяется векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} и не зависит от параметров $\Theta_{1,2}$. Иными словами, она не чувствительна ни к фазе волны Φ_ξ , ни к углам α и ξ , связанным с параметрами поглощения и положением точки наблюдения на ребре клина. Главные полуоси универсального эллипса (86), совпадающего с эллипсом (64) для непоглощающей среды, равны [6]

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 \pm \sqrt{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)^2 - 4[\mathbf{p} \times \mathbf{q}]^2} \right). \quad (87)$$

Хотя векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} (25) зависят от выбора базиса $\{\mathbf{A}_{01}, \mathbf{A}_{02}\}$, нетрудно убедиться, что комбинации $\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2$ и $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ инвариантны по отношению к поворотам этого базиса.

При одинаковости траекторий движения концов векторов $\mathbf{s}_{1,2}$ кинематика их перемещения по универсальному эллипсу очень чувствительна к изменению точки «наблюдения» на ребре клина от одной сингулярной оси до другой. Нетрудно проверить, что

на обоих концах ребра параметры $\Theta_{1,2}$ в уравнении (86) совпадают ($\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0$), а значит, совпадают и мгновенные лучевые скорости $\mathbf{s}_{1,2}$ изонормальных волн, распространяющихся вдоль каждой из сингулярных осей ($\xi = \pm\pi/2$). При надлежащем выборе начала отсчета времени величины $\Theta_0(\pi/2)$ и $\Theta_0(-\pi/2)$ различаются только знаками:

$$\Theta_0(\pm\pi/2) = \pm\Phi_\xi. \quad (88)$$

При этом

$$\mathbf{s}(\pi/2) = \mathbf{s}_0 - \mathbf{p} \cos 2\Phi_\xi + \mathbf{q} \sin 2\Phi_\xi, \\ \mathbf{s}(-\pi/2) = \mathbf{s}_0 - \mathbf{p} \cos 2\Phi_\xi - \mathbf{q} \sin 2\Phi_\xi. \quad (89)$$

Иными словами, прецессия вектора лучевой скорости волны, распространяющейся вдоль сингулярной оси, идентична аналогичному процессу вдоль конической оси при нулевом поглощении для циркулярно поляризованной волны (63). Направления вращения лучевых скоростей $\mathbf{s}(\pm\pi/2)$ (89) вокруг расщепленных сингулярных осей имеют разные знаки. Нетрудно проверить, что при $\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] > 0$ они совпадают с соответствующими направлениями циркулярной поляризации (69), а при условии $\mathbf{m}_0 \cdot [\mathbf{p} \times \mathbf{q}] < 0$ противоположны им.

Несмотря на обнаруженную тождественность конусов (63) и (89), имеется важное различие между отвечающими им картинками конической рефракции. В кристалле без поглощения образующие конуса (63) направлены вдоль соответствующих нормалей к поверхности медленностей в конической точке контакта ее полостей. А нормали к аналогичной поверхности вокруг сингулярной оси, как мы видели (см. рис. 5), образуют плоский веер весьма далекий от конуса лучевых скоростей (89) (см. рис. 10).

Анализ показывает, что при перемещении волновой нормали по ребру клина от сингулярной оси к центру движение конца вектора лучевой скорости по универсальному эллипсу (86) меняет свой характер. Чем ближе к центру клина, тем менее равномерным становится это движение и тем дольше задерживается вектор \mathbf{s} в определенных участках траектории. В точке центра $\xi = 0$ движение прекращается вообще: изонормальные векторы $\mathbf{s}_{1,2}$ «замораживаются» в определенных позициях. Действительно, при $\xi = 0$ формулы (81), (82) и (85) дают значения $\Theta_{1,2}$, не зависящие от времени:

$$\Theta_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}. \quad (90)$$

При этом соответствующие фиксированные векторы лучевой скорости равны

$$\mathbf{s}_{1,2}(0) = \mathbf{s}_0 \pm (\mathbf{p} \sin \alpha + \mathbf{q} \cos \alpha) = \mathbf{s}_0 \pm \mathbf{M}/r. \quad (91)$$

Как и следовало ожидать, этот результат соотносится с выражениями (70) для линейной поляризации изонормальных волн точно так же, как формула (62) с выражением (57) из теории рефракции для непоглощающих кристаллов. Можно показать, что в точке $\xi = 0$ на ребре клина две нормали к поверхности медленности параллельны не векторам (91), а их компонентам, принадлежащим плоскости $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{M}\}$, ортогональной ребру (см. рис. 2).

Заметим, что фиксированные во времени положения лучевой скорости (91) при изменении параметров поглощения (угла α (34')) должны «отслеживать» изменение ориентации ребра самопересечения ($\delta\mathbf{m}_\pm \parallel \mathbf{m}_0 \times \mathbf{M}(\alpha)$), перемещаясь по эллипсу (86), который сам по себе, как мы знаем, не чувствителен к таким изменениям. Это значит, что точки (91), вообще говоря, не совпадают с концами главных полуосей эллипса. Конечно, в более симметричных ситуациях возможны и совпадения. Например, это происходит при расщеплении конической оси \mathbf{m}_0 , лежащей в плоскости симметрии кристалла.

Очевидно, что при любом малом отклонении ξ от нуля постоянные векторы (91) приобретут небольшие добавки, которые, будучи зависимыми от фазы Φ_ξ , восстановят движение лучевых скоростей $\mathbf{s}_{1,2}$ по конусу. Впрочем, если не отходить далеко от середины ребра клина, то большую часть периода векторы $\mathbf{s}_{1,2}$ будут находиться в окрестности ориентаций (91). При этом, конечно, направления средних по времени векторов $\bar{\mathbf{s}}_{1,2}$ тоже недалеко отойдут от направления векторов (91). Это значит, что в средней части линии самопересечения полостей поверхности медленности рефракция будет иметь скорее клиновидный, чем конический характер.

В рассматривавшемся выше частном случае расщепления конической оси из плоскости симметрии кристалла можно положить $\alpha = \pi/2$, что значительно упрощает выражения (81) и (82), а вместе с ними и формулы (85) для угловых параметров $\Theta_{1,2}$:

$$\text{tg } \Theta_1 = \text{ctg}(\xi/2) \text{tg } \Phi_\xi, \quad \text{tg } \Theta_2 = \text{tg}(\xi/2) \text{tg } \Phi_\xi. \quad (92)$$

Обратимся теперь к количественному описанию кинематики прецессии лучевых скоростей на ребре клина в общем случае произвольной анизотропии. Введем полярные координаты $(S_{1,2}, \bar{\varphi}_{1,2})$ положений концов радиус-векторов $\Delta\mathbf{s}_{1,2}$ на эллипсах (86):

$$\Delta\mathbf{s}_{1,2} = S_{1,2} \left(\frac{\mathbf{p}}{p} \cos \bar{\varphi}_{1,2} + \frac{\mathbf{m}_0 \times \mathbf{p}}{p} \sin \bar{\varphi}_{1,2} \right). \quad (93)$$

Сравнивая представления (93) и (86), нетрудно по-

лучить

$$S_{1,2}^2 = (\mathbf{q} \sin \Theta_{1,2} - \mathbf{p} \cos \Theta_{1,2})^2 = \frac{q^2 F^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} F G_\mp + p^2 G_\mp^2}{F^2 + G_\mp^2}, \quad (94)$$

$$\text{ctg } \bar{\varphi}_{1,2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - p^2 \text{ctg } \Theta_{1,2}}{g}. \quad (95)$$

Дифференцирование последнего уравнения дает угловые скорости

$$\dot{\bar{\varphi}}_{1,2} = -\frac{g}{S_{1,2}^2} \dot{\Theta}_{1,2}. \quad (96)$$

Здесь производная $\dot{\Theta}_{1,2}$ находится с помощью (85):

$$\dot{\Theta}_{1,2} = \frac{\dot{F}G_\mp - F\dot{G}_\mp}{F^2 + G_\mp^2} = -\frac{\omega \sin \xi}{U_{1,2}^2(\Phi_\xi + \pi/2)} = -2\dot{\varphi}_{1,2}(\Phi_\xi + \pi/2), \quad (97)$$

где $U_{1,2}^2$ и $\dot{\varphi}_{1,2}$ даются функциями (74) и (76), сдвинутыми по фазе: $\Phi_\xi \rightarrow \Phi_\xi + \pi/2$.

Секториальные скорости $\bar{v}_{1,2}^{sec}$ движения концов векторов $\Delta\mathbf{s}_{1,2}$ по универсальному эллипсу (86) определяются по аналогии с (79):

$$\bar{v}_{1,2}^{sec} = \frac{1}{2} S_{1,2}^2 \dot{\bar{\varphi}}_{1,2} = -\frac{1}{2} g \dot{\Theta}_{1,2} = g \dot{\varphi}_{1,2}(\Phi_\xi + \pi/2). \quad (98)$$

Таким образом, эта скорость отличается от угловой скорости поляризации (76) только размерным множителем g и сдвигом по фазе на $\pi/2$. Подставляя в выражение (98) угловую скорость $\dot{\varphi}_{1,2}$ (78) для рассматривавшегося выше симметричного примера, получим более компактный явный вид секториальной скорости:

$$\bar{v}_{1,2}^{sec}(\Phi_\xi) = \frac{g\omega \sin \xi}{1 \mp \cos \xi \cos 2\Phi_\xi} \equiv g\dot{\varphi}_{2,1}(\Phi_\xi). \quad (99)$$

Здесь учтено, что сдвиг по фазе скорости $\dot{\varphi}_{1,2}$ в упрощенном варианте (78) эквивалентен переходу на сопряженную ветвь:

$$\dot{\varphi}_{1,2}(\Phi_\xi + \pi/2) = \dot{\varphi}_{2,1}(\Phi_\xi).$$

Связь функций (99) позволила на рис. 11 одними и теми же кривыми охарактеризовать угловые скорости поляризации и секториальные скорости лучевой скорости. Приведенные зависимости вполне передают обсуждавшиеся выше свойства прецессии лучевой скорости при конической рефракции на ребре клина. Угловые скорости (96) ведут себя сходным образом, особенно в области малых ξ . С приближением к сингулярным осям ($\xi = \pm\pi/2$) вариации угловых скоростей во времени «выглаживаются», но не исчезают, как для $\bar{v}_{1,2}^{sec}$, а сохраняются в меру различия параметров p и q .

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, роль поглощения в кристаллах отнюдь не сводится к тривиальному ослаблению упругих волн при их распространении. Как мы видели, «включение» поглощения радикально трансформирует геометрию волновых поверхностей и топологию векторных поляризационных полей, расщепляя конические акустические оси общего положения. При этом возникают линии самопересечения на поверхности медленностей и на вновь образующейся поверхности поглощения (см. рис. 7). Проекции этих линий на единичную сферу направлений $\mathbf{m}^2 = 1$ продолжают друг друга после перехода через расщепленные точки вырождения. Плоское поле векторов линейной поляризации, имеющее в точке конического вырождения сингулярность с индексом Пуанкаре $n = (1/2) \text{sign } g$, после расщепления оси превращается в плоское распределение эллипсов поляризации, которое имеет две сингулярные точки \mathbf{m}_{\pm} с одинаковыми индексами Пуанкаре $n = (1/4) \text{sign } g$ (см. рис. 9) и циркулярной поляризацией в этих точках (см. рис. 11).

Топологические изменения волновых поверхностей и поляризационных полей порождают качественно новые черты явления внутренней конической рефракции. Тем не менее обобщение теории может быть по-прежнему построено в терминах классического конуса рефракции, ограниченного эллипсом, по которому за период дважды пробегает конец вектора лучевой скорости волны. Как мы видели, в кристалле без поглощения классическая картина конической рефракции автоматически возникает для циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль конической акустической оси. В поглощающем кристалле тот же конус и тот же эллипс сохраняются как траектория прецессии лучевых скоростей на всей линии клина самопересечения волновых поверхностей между расщепленными точками вырождения.

Вдоль самих сингулярных осей картина рефракции не отличается от классической: изонормальные волны вырождаются в одну циркулярно поляризованную волну, которой отвечает прецессия луча с постоянной секториальной скоростью на эллипсе $\bar{v}^{sec} = g\omega$. На картине «засветки» экрана это проявит себя как полностью прорисованный эллипс (рис. 13а). Увеличение «засветки» вблизи концов больших полуосей связано с более медленным прохождением вектором \mathbf{s}_0 этих участков (линейная скорость на эллипсе равна $2\bar{v}^{sec}/S_0$). При перемещении точки наблюдения по ребру клина в сторо-

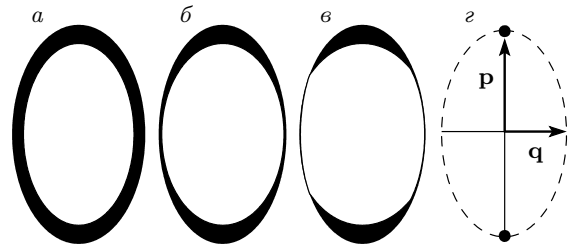


Рис. 13. Области «засветки» эллиптического контура внутренней конической рефракции в поглощающем кристалле для направлений волновой нормали, отвечающих четырем разным точкам на линии ребра клина самопересечения: от сингулярной оси (а) до середины ребра (г). Пример расщепления конической акустической оси, лежащей в плоскости симметрии

ну центра как прецессия векторов $\mathbf{s}_{1,2}$, так и картина «засветки» становятся все менее равномерными (рис. 13б,в). И в самом центре клина ($\xi = 0$) на эллипсе окажутся «засвеченными» только две точки (рис. 13г), отвечающие двум изонормальным волнам с линейной поляризацией: рефракция становится чисто клиновой. Таким образом, при сканировании волновой нормалью ребра клина характер рефракции плавно меняется от чисто конического к чисто клиновому.

Обсудим теперь условия наблюдаемости предсказываемых эффектов. В принципе, для расщепления осей никакого порогового поглощения не требуется. Просто, чем меньше поглощение, тем меньше телесный угол, внутри которого разыгрываются все описанные выше процессы. Если этот угол меньше угла расходимости акустического пучка, то мы не увидим ни расщепленных акустических осей, ни сопутствующих расщеплению эффектов. Поэтому для наблюдаемости обсуждаемых явлений угол расщепления $\delta\psi$ (39) должен превышать дифракционную расходимость пучка порядка λ/d , где λ — длина акустической волны, d — диаметр пучка. Принимая во внимание тот факт, что с ростом частоты волны угол $\delta\psi$ (39) увеличивается, а угол расходимости пучка, наоборот, уменьшается, мы говорим о пороге по частоте снизу. Конкретный анализ дает следующую оценку для выбора частоты $\nu = \omega/2\pi$ в предполагаемом опыте:

$$\nu > \nu_{th} \sim \sqrt{\frac{c_s \mu}{2\pi \eta d}}, \tag{100}$$

где c_s — скорость звука, μ — модуль сдвига и η — вязкость материала. Поскольку речь идет о достаточно высоких частотах и комнатных температурах $T \approx 300$ К, для оценки вязкости η естественно использовать так называемую фононную вязкость

$$\eta_{ph} \sim \tau_{ph} \frac{3k_B T}{a^3}, \quad (101)$$

где τ_{ph} — время релаксации фононов, k_B — постоянная Больцмана и a — параметр решетки. Подставляя сюда $c_s \approx 3 \cdot 10^5$ см/с, $\mu \sim 10^{11}$ дн/см², $d \approx 0.5$ см, $\tau_{ph} \sim 10^{-10}$ с, $a \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см, получим для пороговой частоты оценку $\nu_{ph} \sim 100$ МГц. При всей грубости этой оценки, она показывает, что наблюдение тонких эффектов, обсуждавшихся в этой статье, может быть реализовано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Польского фонда MNiSW (грант № NN501252334). Один из авторов (В. И. А.) благодарен за поддержку Польско-Японскому институту информационных технологий (г. Варшава) и Технологическому университету г. Кельце.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. De Klerk and M. J. P. Musgrave, Proc. Phys. Soc. London B **68**, 81 (1955).
2. M. J. P. Musgrave, Acta Crystallogr. **10**, 316 (1957).
3. А. Г. Хаткевич, Кристаллография **7**, 916 (1962).
4. P. A. Barry and M. J. P. Musgrave, Quart. J. Mech. Appl. Math. **32**, 205 (1979).
5. К. С. Александров, Т. В. Рыжова, Кристаллография **9**, 373 (1964).
6. Ф. И. Федоров, Теория упругих волн в кристаллах, Наука, Москва (1965).
7. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, Основы кристаллофизики, Наука, Москва (1979).
8. В. И. Альшиц, А. В. Сарычев, А. Л. Шувалов, ЖЭТФ **89**, 922 (1985).
9. A. L. Shuvalov and P. Chadwick, Phil. Trans. R. Soc. London A **355**, 156 (1997).
10. V. I. Alshits and V. N. Lyubimov, in Proc. 2nd Workshop on Dissipation in Physical Systems, Sept. 1–3, 1997, Borkow, Poland, ed. by A. Radowicz, Politechnika Swietokrzyska, Kielce (1998), p. 15.
11. A. L. Shuvalov and N. H. Scott, Quart. J. Mech. Appl. Math. **52**, 405 (1999).
12. A. L. Shuvalov and N. H. Scott, Acta Mech. **140**, 1 (2000).
13. В. И. Альшиц, В. Н. Любимов, ЖЭТФ **125**, 999 (2004).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, Наука, Москва (1987).