

ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛАВИН УБЕГАЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Л. П. Бабич, Е. И. Бочков*

*Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
607188, Саров, Нижегородская обл., Россия*

Поступила в редакцию 23 июня 2010 г.

Анализируются возможности двух детерминистических методик описания кинетики убегающих электронов (УЭ) высоких энергий как альтернативные стохастическим методикам, требующим нереально больших вычислительных ресурсов в задачах численного моделирования электрических разрядов в плотных газах с участием УЭ. Одна из методик, развиваемая в последние годы, основана на многогрупповых уравнениях для моментов функции распределения электронов, вторая, традиционная для решения задач газового разряда, — на уравнении переноса в диффузионно-дрейфовом приближении. Методика многогрупповых уравнений в современном состоянии позволяет вычислять распределение УЭ по энергиям и пространственное распределение вдоль электрической силы, которые при соответствующем числе энергетических групп N близки к распределениям, полученным методом Монте-Карло. Диффузионно-дрейфовое уравнение не дает распределения по энергиям, но его достоинством является возможность получать с малыми затратами вычислительных ресурсов распределения УЭ в пространстве не только вдоль, но и поперек электрической силы, близкие к результатам расчетов методом Монте-Карло. Для моделирования разрядов методом многогрупповых уравнений необходимо априорное знание числа групп N , обеспечивающего хорошую точность, характерного времени размножения УЭ t_e и энергетического порога убегания ε_{th} как функций перенапряжения электрического поля. В методике диффузионно-дрейфового уравнения, кроме t_e , необходимо задавать направленную скорость УЭ и коэффициенты продольной и поперечной диффузии, вычисляемые методом Монте-Карло.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развивая гипотезу Вильсона о возможности уско-рения электронов и протекания ядерных реакций в относительно слабых электрических полях гроз-вых облаков [1], Гуревич, Милих и Рюссель-Дюпре предложили и обосновали механизм развития атмо-сферных разрядов, основанный на генерации лавин релятивистских убегающих электронов (ЛРУЭ) в плотных газах и слабых полях [2, 3]. Основополагаю-щие идеи и теория, изложенные в работах [1–3], вос-требованы в связи с большим числом наблюдений высокоэнергетических явлений, коррелированных с грозовой активностью атмосферы: усиление рентге-новского излучения в грозowych облаках и ступен-чатом лидере молнии [4–8]; вспышки жесткого гам-ма-излучения, зарегистрированные в ближнем кос-

мосе с борта искусственных спутников Земли [9, 10], вблизи уровня моря [11–14] и в высокогорных усло-виях [15–18]; регистрация усиления потока нейтро-нов в высокогорных условиях [15, 19], вблизи уровня моря [20–22] и в ближнем космосе [23]. Это далеко не все сообщения о регистрации усиления проника-ющих излучений в грозовой атмосфере, опублико-ванные в последние десятилетия. Обзор небольшого числа ранних экспериментов на эту тему с начала 1930-х до конца 1980-х годов приведен в моногра-фии [24].

Для понимания результатов наблюдений и их интерпретации в рамках механизма Вильсона, Гу-ревича, Милиха, Рюсселя-Дюпре необходима раз-работка адекватных методов численного моделиро-вания разрядов, развивающихся в режиме генера-ции ЛРУЭ. Кинетика самой ЛРУЭ исследовалась методом кинетического уравнения и методом Мон-те-Карло. Наиболее точные характеристики ЛРУЭ,

*E-mail: babich@elph.vniief.ru

такие как распределение концентрации убегающих электронов ($UЭ$) в пространстве и времени, время усиления лавины в ϵ раз, установившиеся энергетическое и угловое распределения $UЭ$ и их тормозного излучения, получены методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА, учитывающей все множество элементарных процессов с участием электронов, фотонов и позитронов с энергиями выше 1 кэВ [25–28].

Хотя убежание электронов является принципиально стохастическим процессом, непосредственное использование стохастических методов для численного моделирования сопровождающихся высокоэнергетическими процессами газовых разрядов, в том числе грозовых, в самосогласованном электрическом поле практически невозможно ввиду требования нереально больших вычислительных ресурсов. Чтобы уменьшить последние до разумного уровня, разрабатываются детерминистические подходы в приближении сплошной среды. Существенным недостатком детерминистических методик является необходимость введения минимальной энергии (порога) убежания ϵ_{th} [29], величины довольно неопределенной, числовое значение которой зависит от способа вычисления.

Наиболее приближенной к стохастическим является математическая модель с многогрупповым описанием кинетики $UЭ$ высоких энергий на основе гидродинамических уравнений для моментов функции распределения электронов (ФРЭ) [30], в рамках которой выполнено численное моделирование высотного атмосферного разряда в самосогласованном поле [31]. Многогрупповой подход позволяет, не решая кинетическое уравнение и не прибегая к методу Монте-Карло, описывать эволюцию $UЭ$ в пространстве и времени, а также вычислять энергетическое распределение $UЭ$ и, следовательно, спектр тормозного излучения и выход фотоядерных нейтронов.

Многогрупповая модель начала разрабатываться в первой половине 1990-х годов, и в крайне упрощенной форме реализована для описания электрического разряда в плотных газах в сильных полях, развивающегося в режиме генерации $UЭ$ [24, 32, 33]. В дальнейшем было выполнено численное моделирование высотного атмосферного разряда с многогрупповым описанием кинетики $UЭ$ в рамках концепции трубок тока [34, 35]. В работах [30, 31] многогрупповая модель существенно уточнена по сравнению с концепцией трубок тока: она реализована в рамках последовательного гидродинамического подхода на основе системы уравнений для моментов ФРЭ высоких энергий, хотя и записанных априорно на основании физических соображений.

Последовательный вывод системы многогрупповых уравнений для трех первых моментов ФРЭ сделан в работе [36], исходя из кинетического уравнения с релятивистским оператором столкновений [37]. Существенным недостатком этой системы является отсутствие в ней членов, отвечающих за диффузию электронов, поперечную относительно направления электрической силы. Это связано с тем, что оператор столкновений в работе [37] получен для ФРЭ, не зависящей от азимутального угла относительно вектора электрической силы в пространстве импульсов.

Другой подход, основанный на уравнении переноса в приближении, известном в кинетике электронов низких энергий как диффузионно-дрейфовое приближение, делает возможным описание пространственно-временной эволюции $UЭ$ с учетом не только продольной диффузии, но и поперечной. Этот подход экономичнее метода многогрупповых уравнений, но исключает возможность вычисления распределения по энергиям. Диффузионно-дрейфовое уравнение ранее использовалось для анализа и моделирования кинетики $UЭ$ высоких энергий в грозовых полях, например, в работах [38, 39].

Целью настоящей работы является выяснение эффективности системы многогрупповых уравнений [36] для решения численными методами задач газового разряда с учетом $UЭ$ высоких энергий и возможности использования для этой цели диффузионно-дрейфового уравнения. Для этого выполнено численное моделирование ЛРУЭ в воздухе при давлении $P = 1$ атм методами многогрупповых и диффузионно-дрейфового уравнений. На основании сравнительного анализа вычисленных распределений и распределений, полученных методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА, предлагаются рекомендации по использованию этих уравнений для численного моделирования разрядов с участием $UЭ$ высоких энергий, в том числе разрядов в грозовой атмосфере. Установлено число энергетических групп в многогрупповых уравнениях, достаточное для достижения согласия с результатами, полученными методом Монте-Карло.

2. СИСТЕМА МНОГОГРУППОВЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вывод системы многогрупповых уравнений для трех первых моментов ФРЭ в газе неподвижных атомарных частиц [36] выполнен, исходя из релятивистского кинетического уравнения с редуциро-

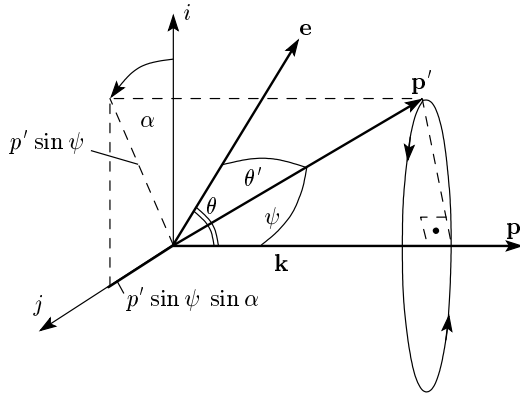


Рис. 1. Геометрия рассеяния [36, 37]

ванным ионизационным интегралом, в котором выделены слабые акты ионизирующих взаимодействий с рождением вторичных электронов низких энергий [1, 2, 37]. В кинетическом уравнении учтены упругие столкновения электронов и столкновения с возбуждением атомарных частиц. Геометрия рассеяния в элементарных взаимодействиях электронов с атомарными частицами приведена на рис. 1, где ψ — угол рассеяния, штрихами обозначены величины до актов элементарных взаимодействий электронов с атомарными частицами [37]. Вывод выполнен для ФРЭ $f = f(\mathbf{r}, p, \mu, t)$, зависящей от радиуса-вектора \mathbf{r} в конфигурационном пространстве, времени t , модуля импульса электрона p , косинуса μ угла θ между вектором импульса \mathbf{p} и единичным вектором \mathbf{e} в направлении локальной электрической силы, действующей на электрон $\mathbf{e} = -\mathbf{E}/E$, и не зависит от азимутального угла α в плоскости, перпендикулярной к \mathbf{e} . Последним предположением автоматически исключается диффузия электронов в направлении, ортогональном электрической силе. Формальный учет зависимости ФРЭ от азимутального угла α приводит к двойному интегралу, для численного интегрирования которого необходимо знание ФРЭ, т. е. необходимо решать кинетическое уравнение, от чего мы уходили.

Другое существенное упрощение обусловлено тем, что хотя в групповых уравнениях скорость генерации УЭ находится строго как интеграл части ионизационного интеграла, отвечающей за генерацию электронов высоких энергий ($\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$), для выполнения численного интегрирования получающегося двойного интеграла также необходимо знание ФРЭ. Поэтому в групповых уравнениях [36] скорость генерации УЭ, для строгого вычисления которой необходимо знание ФРЭ, выражена через

характерное время t_e экспоненциального нарастания в электрическом поле числа всех электронов высоких энергий. Для зависимости последнего от перенапряжения $\delta = E/F_{min}P$ электрического поля с напряженностью E относительно минимума силы трения электронов в воздухе $F_{min} = 218$ кВ/м·атм предложено использовать результаты, полученные методом Монте-Карло [25, 26, 28].

В системе многогрупповых уравнений опущены члены, отвечающие за скалярное давление и тензор вязких напряжений, существенные для полностью ионизованной плазмы [40], но несущественные для описания кинетики разреженного газа релятивистских УЭ в плотной среде нейтральных атомов. Область применимости уравнений ограничена обычным условием справедливости гидродинамического приближения, т. е. малости длины свободного пробега УЭ $\lambda \ll n^{-1/3}$, где n — концентрация УЭ, и условием доминирования столкновений УЭ с нейтральными атомами, т. е. $\nu_{ea} \gg \nu_{ee}, \nu_{ei}$, где ν_{ea}, ν_{ee} и ν_{ei} — частоты столкновений УЭ с атомами, свободными электронами всех энергий и ионами [40]. Точность вычислений, естественно, тем выше, чем больше число энергетических групп.

Систему групповых уравнений, включающую уравнения баланса концентрации электронов, уравнения движения и уравнения баланса полной кинетической энергии, полученную в работе [36], мы переписали в виде, удобном для численного решения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{r}} n_k \mathbf{u}_k &= [\langle \mu \rangle_{k-1/2} eE - F(p_{k-1/2})] \times \\ &\times \frac{n_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} - [\langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F(p_{k+1/2})] \times \\ &\times \frac{n_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} + \frac{\delta_{k1}}{t_e(\delta)} \sum_{i=k}^N n_i + S_k \delta_{k1}, \\ &k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{p}_k &= \\ &= \mathbf{e} \left[eE - \langle \mu \rangle_k \left(1 + \frac{Z_{mol} + 4}{4\gamma(p_k)} \right) F(p_k) \right] + \\ &+ \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} [eE \langle \mu \rangle_{k+1/2} - F(p_{k+1/2})] \times \\ &\times \frac{n_{k+1/2}}{n_k} - \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} \times \\ &\times [eE \langle \mu \rangle_{k-1/2} - F(p_{k-1/2})] \times \\ &\times \frac{n_{k-1/2}}{n_k} + \mathbf{p}_k \frac{S_k}{n_k}, \quad k = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} - \frac{\varepsilon_k}{n_k} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} n_k \mathbf{u}_k + \frac{c^2}{n_k} \operatorname{div}_{\mathbf{r}} n_k \mathbf{p}_k = \\ = (eE u_k - F(p_k) v_k) + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1/2}}{p_{k+1} - p_k} \times \\ \times [eE \langle \mu \rangle_{k+1/2} - F(p_{k+1/2})] \frac{n_{k+1/2}}{n_k} - \\ - \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1/2}}{p_k - p_{k-1}} [eE \langle \mu \rangle_{k-1/2} - F(p_{k-1/2})] \times \\ \times \frac{n_{k-1/2}}{n_k} + \varepsilon_k \frac{S_k}{n_k}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N — число разбиений интервала в пространстве импульсов $[p_{min}, p_{max}]$, границы которого определяются условиями задачи, в частности, p_{min} или соответствующая кинетическая энергия ε_{min} могут быть порогом убегания p_{th} или ε_{th} ; k — номер группы, ширина которой $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$ в общем случае произвольна; n_k — концентрация УЭ; p_k и \mathbf{p}_k — модуль и вектор импульса УЭ; v_k и u_k — скорость и направленная скорость УЭ; $\langle \mu \rangle_k = u_k/v_k$ — косинус угла между направленной скоростью и скоростью УЭ; E — модуль напряженности электрического поля; $F(\varepsilon)$ — сила трения электронов с энергией ε в воздухе, для которой используется формула Бете для удельных энергетических потерь электронов [41]; $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ — фактор Лоренца; $\beta = v/c$; c — скорость света в вакууме; e — элементарный заряд; Z_{mol} — число электронов в молекуле; S_k — внешний источник УЭ; δ_{kl} — символ Кронекера, которым учитывается то обстоятельство, что практически все вторичные, появляющиеся в области энергий $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ за счет ударной ионизации самими электронами, в том числе и за счет внешнего источника, попадают в первую группу вблизи ε_{th} [36].

Подсистема уравнений (1) отвечает за изменение концентрации электронов в k -й группе, подсистема (2) — за изменение направления движения электронной «жидкости» в той же группе, (3) определяет точку внутри группы, в которой вычисляются концентрация и вектор импульса. Последняя подсистема приведена для полноты, поскольку для численного моделирования кинетики УЭ в газе с электрическим полем достаточно первых двух подсистем, но тогда величины n_k и \mathbf{p}_k относятся к середине группы $[p_{k-1/2}, p_{k+1/2}]$.

3. ПОРОГОВАЯ ЭНЕРГИЯ УБЕГАНИЯ

Как отмечалось во Введении, для адекватного описания процесса убегания электронов требуются стохастические методы, такие как метод Монте-Карло, в которых отсутствует пороговая энергия убегания ε_{th} , являющаяся искусственной и доволь-

но неопределенной величиной, принятой в детерминистском описании. Результаты решения системы уравнений (1)–(3) сильно зависят от ε_{th} , особенно в области малых перенапряжений δ . Как строго детерминированная величина, ε_{th} определяется как второй корень уравнения [24, 29]

$$\mu E = F(\varepsilon) \quad (4)$$

и является функцией напряженности поля и косинуса μ угла между \mathbf{e} и вектором импульса УЭ (см. рис. 1). Поскольку при решении системы многогрупповых уравнений использовать эту функцию практически невозможно, мы вычисляли зависимость ε_{th} только от перенапряжения δ , используя определения ε_{th} , учитывающие в какой-то степени стохастический характер процесса убегания.

В работе [26] принято следующее определение $\varepsilon_{th}(\delta)$, являющееся, по существу, усреднением формулы (4) по ФРЭ:

$$\delta \langle \mu(\varepsilon_{th}, \delta) \rangle = 1. \quad (5)$$

Здесь средний косинус вычисляется усреднением по угловому распределению УЭ, полученному методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА [26], которое с погрешностью ≤ 0.06 аппроксимировано следующим образом:

$$\langle \mu(\varepsilon, \delta) \rangle = \frac{a(\delta)\varepsilon}{1 + a(\delta)\varepsilon}, \quad (6)$$

где $a(\delta = 2) = 2.7 \text{ МэВ}^{-1}$ и $a(\delta = 8) = 12 \text{ МэВ}^{-1}$ [26].

По формулам (5) и (6) получены следующие значения порога: $\varepsilon_{th}(\delta = 2) = 470 \text{ кэВ}$ и $\varepsilon_{th}(\delta = 8) = 67 \text{ кэВ}$ [26].

Кроме того, мы вычисляли $\varepsilon_{th}(\delta)$ исходя из определения, принятого в работе [42]:

$$N_m u \int_{\varepsilon_{th}(\delta)}^{\langle \varepsilon \rangle / 2} \sigma_M(\langle \varepsilon \rangle, \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{t_e(\delta)}, \quad (7)$$

где в отличие от [42] учтено, что направленная скорость УЭ u меньше c . Здесь $N_m = 2.7 \cdot 10^{19} P \text{ (см}^3 \cdot \text{атм)}^{-1}$ — концентрация молекул воздуха при давлении P , σ_M — дифференциальное сечение ионизации Меллера [43], $\langle \varepsilon \rangle$ — средняя энергия УЭ.

Для u , $\langle \varepsilon \rangle$ и t_e использованы результаты численного моделирования методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА, согласно которым u практически не зависит от перенапряжения δ и близка к $0.9c$ (см. таблицу), а $\langle \varepsilon \rangle$ крайне слабо зависит от δ , уменьшаясь в два раза от 6.97 до 3.46 МэВ в диапазоне

Таблица. Направленная скорость u , средняя энергия $\langle \varepsilon \rangle$, коэффициенты продольной D_L и поперечной D_T диффузии ЛРУЭ, полученные методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА

δ	u , м/с	$\langle \varepsilon \rangle$, МэВ	D_L , м ² /с	D_T , м ² /с
1.5	$2.69 \cdot 10^8$	6.75	$1.52 \cdot 10^8$	$6.27 \cdot 10^8$
2	$2.64 \cdot 10^8$	6.74	$7.73 \cdot 10^7$	$2.88 \cdot 10^8$
5	$2.66 \cdot 10^8$	6.87	$1.49 \cdot 10^7$	$4.88 \cdot 10^7$
8	$2.68 \cdot 10^8$	6.61	$7.14 \cdot 10^6$	$2.05 \cdot 10^7$
10	$2.69 \cdot 10^8$	6.41	$5.13 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^7$
12	$2.69 \cdot 10^8$	6.15	$3.94 \cdot 10^6$	$9.44 \cdot 10^6$
14	$2.69 \cdot 10^8$	5.99	$3.21 \cdot 10^6$	$6.99 \cdot 10^6$
20	$2.68 \cdot 10^8$	5.38	$2.10 \cdot 10^6$	$3.70 \cdot 10^6$
50	$2.66 \cdot 10^8$	4.35	$7.63 \cdot 10^5$	$6.40 \cdot 10^5$
100	$2.65 \cdot 10^8$	3.46	$3.82 \cdot 10^5$	$1.66 \cdot 10^5$

δ от 1.5 до 100. По формуле (7) порог вычислялся для $\langle \varepsilon \rangle = 7$ МэВ, т.е. для малых δ , характерных для грозовых полей. Получены следующие значения: $\varepsilon_{th}(\delta = 2) = 470$ кэВ, $\varepsilon_{th}(\delta = 5) = 91$ кэВ, $\varepsilon_{th}(\delta = 8) = 50$ кэВ.

Видно, что для малых значений δ пороги ε_{th} , вычисленные по формулам (5) и (7), практически совпадают, а при больших δ различие существенно, но не велико.

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Для демонстрации точности метода многогрупповых уравнений для моментов ФРЭ система (1)–(3) численно решалась в диапазоне энергий от порога убегания ε_{th} до энергии $\varepsilon_{max} = 100$ МэВ, близкой к максимальным потенциалам грозовых облаков.

Задача решалась в постановке, аналогичной постановке, принятой в численном моделировании ЛРУЭ методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА [25–28], что позволяет прямое сравнение полученных результатов. В начальный момент времени в однородном электрическом поле напряженностью $E = F_{min}\delta$ задавались дельтаобразное распределение электронов в пространстве и максвелловское распределение по энергиям со средней энергией $\langle \varepsilon \rangle = 10$ МэВ. Данное допущение является несущественным, поскольку из расчетов методом Мон-

те-Карло следует, что установившееся энергетическое распределение УЭ крайне слабо зависит от начального распределения для значений δ в диапазоне от 1.5 до 14 [25, 26, 28]. Внешний источник отсутствует ($S_k = 0$).

Величины $n_{k-1/2}$ и $n_{k+1/2}$ в системе (1)–(3) вычислялись по следующей процедуре:

$$n_{k+1/2} = \begin{cases} n_k, & \langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F(p_{k+1/2}) > 0, \\ n_{k+1}, & \langle \mu \rangle_{k+1/2} eE - F(p_{k+1/2}) < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Значения импульса $\mathbf{p}_{k+1/2}$ и $\mathbf{p}_{k-1/2}$ вычислялись линейной интерполяцией соответствующих значений в центре энергетических ячеек.

Задача решалась методом конечных разностей. Чтобы избавиться от численной диффузии для вычисления потоковых членов, использовался метод FCT (flux-corrected transport) [44]. При этом схема QUICKEST 3 [45] была использована в качестве схемы высокого порядка, а схема donor cell — как схема низкого порядка.

Результаты численного моделирования высотных атмосферных разрядов существенно зависят от числа энергетических групп N [31], поэтому нами выполнялись расчеты для разного числа групп N .

В данной статье сравниваются распределения, полученные решением системы (1)–(3) и методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА на момент времени $t = 5t_e(\delta)$, когда устанавливаются универсальные распределения УЭ по энергиям и углам [25, 26]. Расчеты выполнены для $\delta = 2, 5, 8$ и вычисленных выше порогов убегания ε_{th} . При больших δ небольшое отличие порогов ε_{th} , вычисленных по формулам (5) и (7), не сказалось на результатах решения системы (1)–(3).

На рис. 2–5 представлены распределения линейной концентрации УЭ вдоль оси симметрии лавины (рис. 2, 4) и энергетические распределения УЭ (рис. 3, 5) с указанием принятых значений ε_{th} . Распределения нормированы на единицу.

Видно, что энергетические распределения, полученные в многогрупповом приближении для числа групп $N = 200$ и методом Монте-Карло, близки для всех δ (рис. 3). Значения средней энергии УЭ $\langle \varepsilon \rangle$, полученные двумя методами, отличаются не более, чем на 1–2%. Пространственные распределения вдоль вектора \mathbf{e} , вычисленные в многогрупповом приближении, хорошо согласуются с распределениями, полученными методом Монте-Карло (рис. 2).

Как видно на рис. 4, распределение линейной концентрации УЭ вдоль оси симметрии лавины

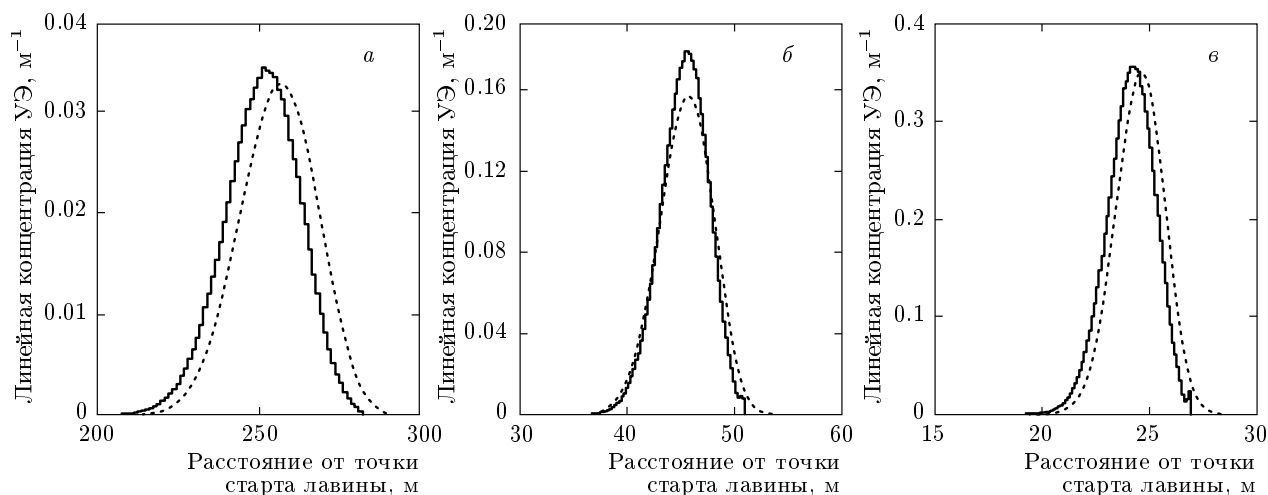


Рис. 2. Распределения УЭ вдоль оси симметрии лавины для $\delta = 2$ (а), 5 (б), 8 (в) в момент времени $t = 5t_e = 950$ (а), 170 (б), 90 (в) нс. $\varepsilon_{th}(\delta) = 470$ (а), 91 (б), 50 (в) кэВ. Число групп $N = 200$. Пунктирные линии — многогрупповой подход, сплошные — расчет Монте-Карло

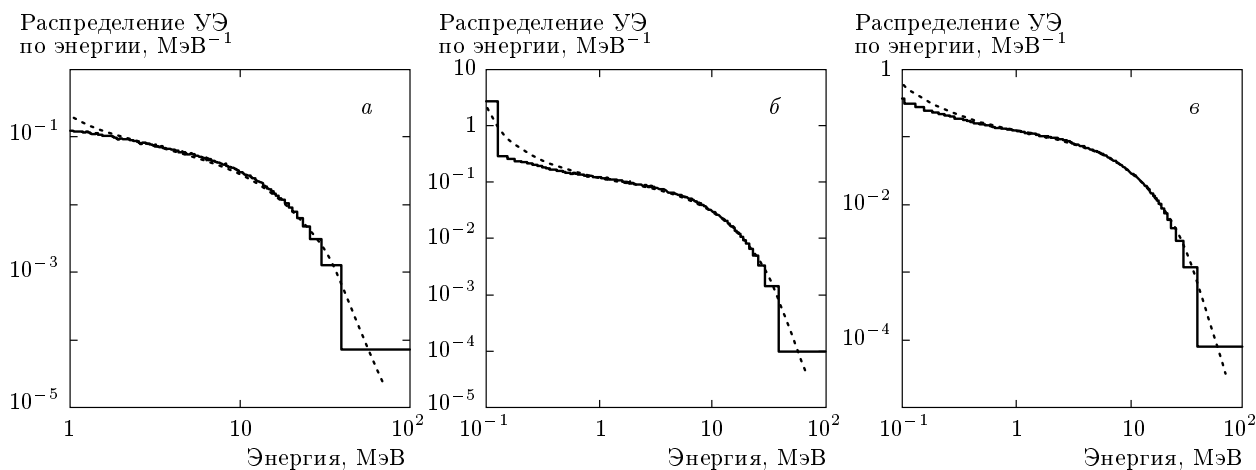


Рис. 3. Энергетические распределения УЭ для $\delta = 2$ (а), 5 (б), 8 (в) в момент времени $t = 5t_e = 950$ (а), 170 (б), 90 (в) нс. $\varepsilon_{th}(\delta) = 470$ (а), 91 (б), 50 (в) кэВ. Число групп $N = 200$. Пунктирные линии — многогрупповой подход, сплошные — расчет Монте-Карло

(вдоль направления электрической силы \mathbf{e}), полученное для $N = 10$, — максимального числа групп в работе [31], — сильно отличается от распределения, полученного методом Монте-Карло.

Энергетическое распределение УЭ крайне слабо зависит от числа групп N . Как видно из рис. 5, при $N = 10$ распределение по группам близко к распределению, полученному методом Монте-Карло, и, следовательно, к распределению по группам при $N = 200$ (ср. рис. 3а и 5). Соответственно, средняя энергия УЭ $\langle \varepsilon \rangle$ также слабо зависит от N . Так, для $N = 200$ величина $\langle \varepsilon(\delta = 2) \rangle$ близ-

ка к величине, полученной методом Монте-Карло, 6.96 МэВ [25, 26, 28] (см. таблицу) и $\langle \varepsilon(\delta = 2) \rangle \approx 7.5$ МэВ для $N = 10$, т. е. различие не превышает 7%.

5. ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнение переноса в диффузионно-дрейфовом приближении традиционно используется для описания лавин электронов низких энергий, находящихся в равновесии с электрическим полем. Это уравне-

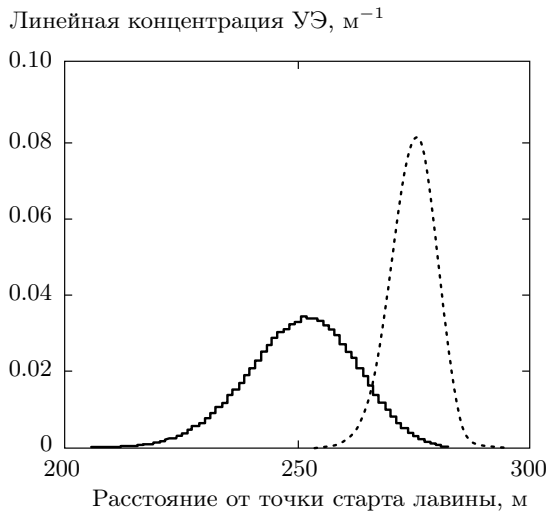


Рис. 4. Распределение УЭ вдоль оси симметрии лавины для $\delta = 2$ в момент времени $t = 5t_e(\delta = 2) = 950$ нс. $\varepsilon_{th}(\delta = 2) = 470$ кэВ, $N = 10$. Пунктирная линия — многогрупповой подход, сплошная — расчет Монте-Карло

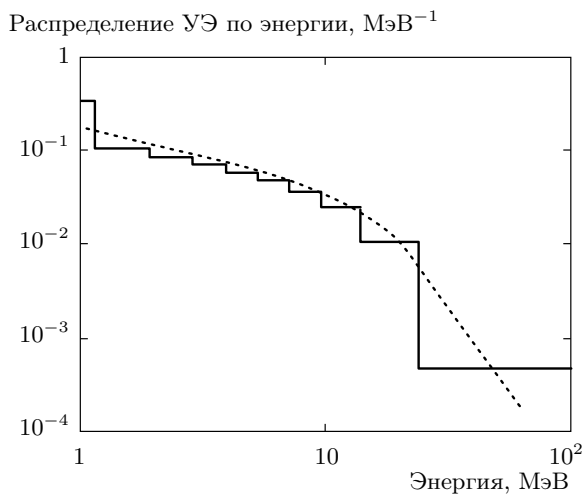


Рис. 5. Энергетическое распределение УЭ для $\delta = 2$ в момент времени $t = 5t_e(\delta = 2) = 950$ нс. $\varepsilon_{th}(\delta = 2) = 470$ кэВ, $N = 10$. Пунктирная линия — многогрупповой подход, сплошная — расчет Монте-Карло

ние получается интегрированием нерелятивистского кинетического уравнения по энергиям в пределах $[\varepsilon_{th}, \infty]$ в предположении локальной зависимости гидродинамической скорости электронов от напряженности поля [40]. Соответствующее уравнение для УЭ должно непосредственно следовать из релятивистского кинетического уравнения. Попытки

строгого вывода приводят к тем же непреодолимым трудностям, что и при выводе групповых уравнений, и, насколько известно авторам, строгий вывод отсутствует в доступной литературе. Тем не менее, можно по крайней мере обосновать диффузионно-дрейфовое уравнение переноса УЭ в рамках приближений, сделанных при выводе групповых уравнений (1)–(3) [36]. Интегрируя по импульсу в пределах $[p_{th}, \infty]$ кинетическое уравнение (2.6) работы [36], из которого выведены групповые уравнения (1)–(3) и которое является дивергентной формой кинетического уравнения, изначально используемого для описания кинетики УЭ в грозовых полях [3], получаем уравнение баланса концентрации УЭ всех энергий в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial n(z, r, t)}{\partial t} + \text{div } n(z, r, t) \mathbf{w}(z, r, t) \frac{\partial n(z, r, t)}{\partial z} = \frac{n(z, r, t)}{t_e(\delta)}. \quad (9)$$

Здесь n — концентрация УЭ всех энергий, \mathbf{w} — гидродинамическая скорость и, так же как в уравнениях (1)–(3), скорость генерации УЭ выражена через характерное время t_e экспоненциального нарастания числа УЭ всех энергий.

Подставляя в (9) известное выражение для гидродинамической скорости [40]

$$\mathbf{w}(\delta) = \mathbf{u}(\delta) - D_L(\delta) \text{grad}_{\parallel} n(z, r, t) - D_T(\delta) \text{grad}_{\perp} n(z, r, t), \quad (10)$$

получаем уравнение переноса для описания пространственно-временной эволюции одиночной ЛРУЭ в однородном электрическом поле:

$$\frac{\partial n(z, r, t)}{\partial t} + u \frac{\partial n(z, r, t)}{\partial z} - D_L \frac{\partial^2 n(z, r, t)}{\partial z^2} - D_T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(z, r, t)}{\partial r} \right) = \frac{n(z, r, t)}{t_e}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{u} — направленная скорость УЭ вдоль направления электрической силы \mathbf{e} ; D_L и D_T — соответственно коэффициенты продольной и поперечной диффузии УЭ относительно \mathbf{e} .

В таблице представлены зависимости направленной скорости u и коэффициентов диффузии D_T и D_L от перенапряжения δ , полученные по результатам моделирования ЛРУЭ методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА для давления $P = 1$ атм и δ в диапазоне 1.5–100. Для зависимостей коэффициентов D_L и D_T от δ в диапазоне $\delta = 1.5$ –14 получены

следующие аппроксимации с погрешностью, не превышающей соответственно 13% и 12%:

$$D_L = 2.687 \cdot 10^8 \delta^{-1.715} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$D_T = 1.246 \cdot 10^9 \delta^{-1.973} \text{ м}^2/\text{с}.$$
(12)

В работе [38] независимо от δ коэффициент диффузии принят равным $D \approx 1.9 \cdot 10^8 \text{ м}^2/\text{с}$, что близко к D_L при $\delta = 1.5$ (см. таблицу). В работе [39], где учтена только диффузия в направлении, ортогональном \mathbf{e} , с ростом δ от 1.4 до 5.5 коэффициент диффузии D меняется в интервале $8 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}$ при давлении $P = 1 \text{ атм}$, что близко к коэффициенту поперечной диффузии в таблице.

Решение уравнения (11) для случая, когда в начальный момент времени $t = 0$ в точке $z = 0, r = 0$ присутствует только один электрон, имеет следующий вид:

$$n(z, r, t) = \exp \frac{t}{t_e} \frac{\exp \left(-\frac{r^2}{4D_T t} \right)}{4\pi D_T t} \times$$

$$\times \frac{\exp \left(-\frac{(z - ut)^2}{4D_L t} \right)}{(4\pi D_L t)^{1/2}}, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Адекватность уравнения (11) для описания кинетики УЭ высоких энергий мы покажем путем прямого сравнения его решения с результатами расчетов методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА. На рис. 6 и 7 сравниваются нормированные на единицу продольные и радиальные распределения линейной концентрации (рис. 6) и флюенса (рис. 7) электронов в лавине, вычисленные соответствующим интегрированием формулы (13), и полученные из результатов численного моделирования методом Монте-Карло для $\delta = 2, 5, 8$ в момент времени $t = 5t_e$. Видно, что распределения очень близки.

Метод диффузионно-дрейфового уравнения предполагается использовать для моделирования убегания электронов на фронте ступенчатого лидера молнии, где могут реализоваться очень большие перенапряжения δ , поэтому для тестирования этого метода и вычисления направленной скорости u , а также коэффициентов диффузии D_L и D_T выполнено численное моделирование ЛРУЭ методом Монте-Карло по программе ЭЛИЗА в широком диапазоне перенапряжений $\delta = 1.5 - 100$. Во всем этом диапазоне метод диффузионно-дрейфового уравнения дает пространственные распределения УЭ, близкие к распределениям, полученным

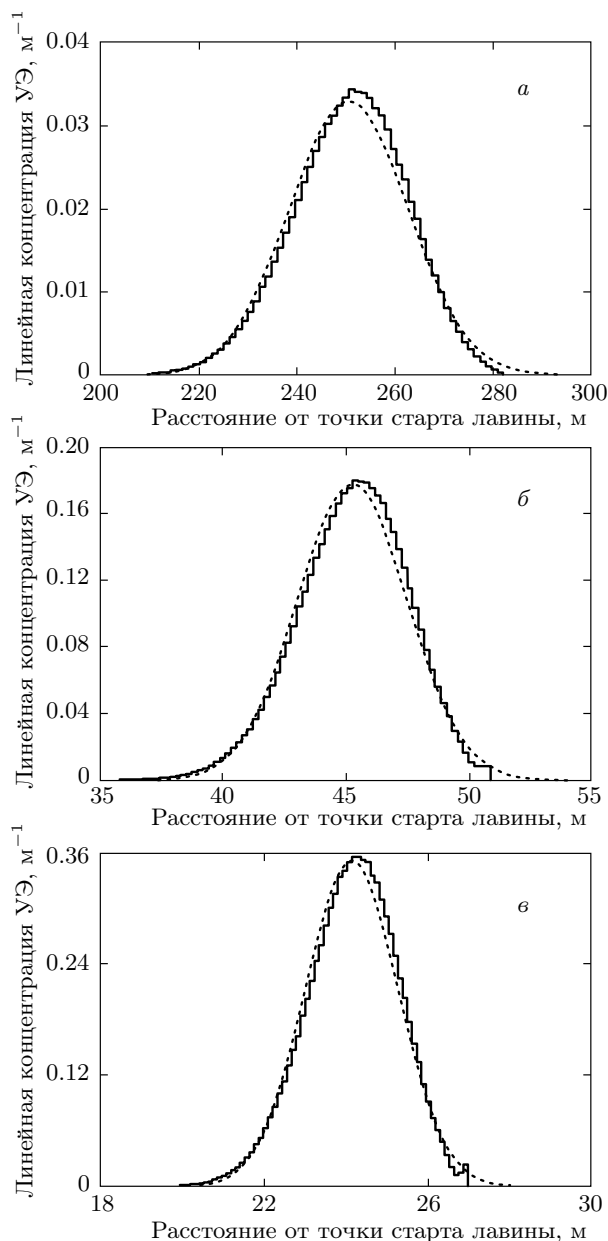


Рис. 6. Распределения УЭ вдоль оси симметрии лавины для $\delta = 2$ (а), 5 (б), 8 (в) в момент времени $t = 950$ (а), 170 (б), 90 (в) нс. Сплошные линии — расчет Монте-Карло, пунктирные — диффузионное приближение

методом Монте-Карло. Таким образом, диффузионно-дрейфовое уравнение хорошо описывает пространственную эволюцию ЛРУЭ и, следовательно, может быть использовано для численного моделирования разрядов с УЭ высоких энергий.

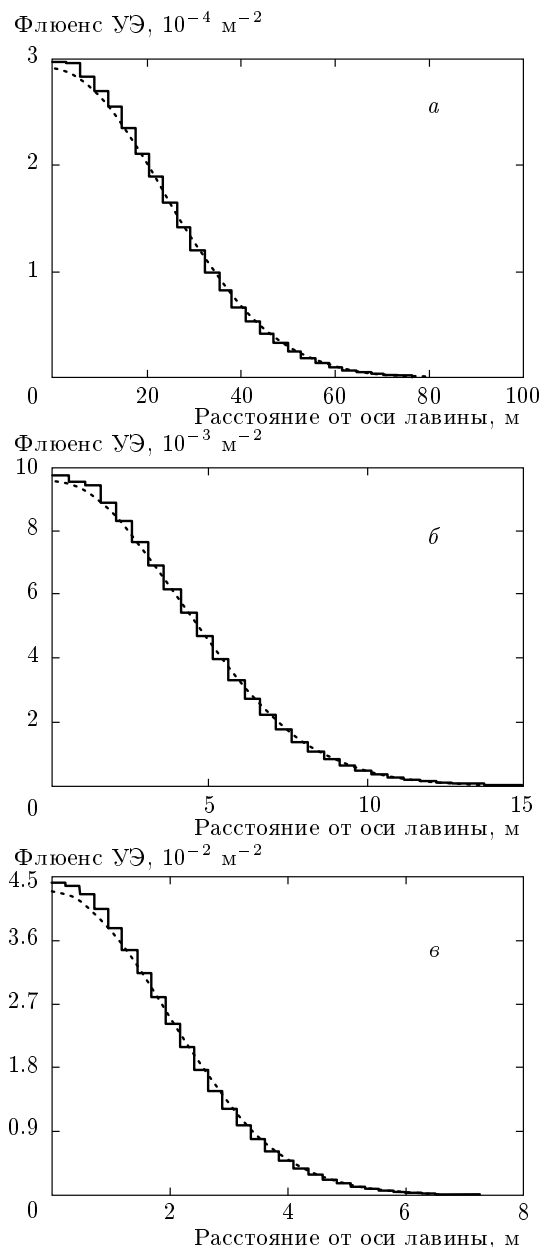


Рис. 7. Распределения УЭ по радиусу лавины для $\delta = 2$ (а), 5 (б), 8 (в) в момент времени $t = 950$ (а), 170 (б), 90 (в) нс. Сплошные линии — расчет Монте-Карло, пунктирные — диффузионное приближение

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнением с результатами численного моделирования лавины релятивистских УЭ в воздухе при нормальных условиях методом Монте-Карло с учетом всего множества элементарных процессов с участием электронов, фотонов и позитронов оценивались возможности двух детерминистических методик моделирования электрических разрядов в плот-

ных газах, одна из которых основана на системе многогрупповых гидродинамических уравнений, другая — на диффузионно-дрейфовом уравнении.

Методика многогрупповых уравнений при достаточно большом числе групп, $N \sim 100$, дает пространственное распределение УЭ вдоль направления электрической силы \mathbf{e} , близкое к распределению, полученному методом Монте-Карло. Распределение УЭ по энергиям слабо зависит от числа групп и близко к установившемуся распределению, полученному методом Монте-Карло.

В современном исполнении методика многогрупповых уравнений не учитывает диффузию УЭ в направлении, ортогональном вектору \mathbf{e} . Скорее всего, этот недостаток несущественно влияет на точность двумерного и трехмерного численного моделирования электрических разрядов в плотных газах. Поскольку внешнее, а тем более самосогласованное электрическое поле является неоднородным и анизотропным, «дрейф» со скоростью, близкой к скорости света в вакууме в направлении, ортогональном локальному вектору \mathbf{e} , сильнее диффузии и экранирует ее.

Практически в опубликованных работах по численному моделированию высотных атмосферных разрядов с вычислением характеристик их излучений [29, 31, 46–49] достоинство многогруппового подхода, т. е. возможность вычисления пространственно-временной зависимости энергетического распределения электронов, не использовалось. В этих работах вычислялись многогрупповые распределения в пространстве и времени концентрации УЭ, а вместо многогрупповых энергетических распределений УЭ для расчетов флуоресценции воздуха, а также импульсов γ -излучения и фотоядерных нейтронов использовались установившиеся распределения по энергиям УЭ и спектры тормозного излучения, полученные методом Монте-Карло [25–27]. Казалось бы, использование установившихся распределений не вполне корректно, если напряженность поля существенно меняется в пространстве и времени. Следует, однако, иметь в виду, что в широком диапазоне перенапряжений, $\delta = 1.5\text{--}14$, установившиеся распределения УЭ по энергиям и спектры тормозного излучения крайне слабо зависят от δ , т. е. являются универсальными [25–27]. Поэтому слабая зависимость распределения УЭ по энергиям от числа групп позволяет ограничиваться относительно небольшим числом групп (порядка 10) при моделировании реальных разрядов и вычислении характеристик флуоресценции воздуха и импульсов проникающих излучений.

Диффузионно-дрейфовое уравнение в диапазоне перенапряжений $\delta = 1.5\text{--}100$ с точностью, близкой к точности метода Монте-Карло, описывает пространственное распределение УЭ при использовании направленной («дрейфовой») скорости и коэффициентов продольной и поперечной диффузии, вычисленных методом Монте-Карло. Диффузионно-дрейфовое уравнение дает возможность экономичнее, чем уравнения многогрупповой гидродинамики, воспроизводить пространственное распределение УЭ вдоль и поперек направления электрической силы. Но сам метод исключает возможность прямого вычисления энергетического распределения УЭ, поэтому использование установившихся энергетических распределений УЭ и спектров тормозного излучения, вычисленных методом Монте-Карло [25–28] или по многогрупповым уравнениям, принципиально необходимо при решении задач электрического разряда в плотных газах методом диффузионно-дрейфового уравнения.

Л. П. Бабич выражает глубокую благодарность А. В. Гуревичу, К. П. Зыбину и Р. А. Русселю-Дюпре (R. A. Roussel-Dupré) за многолетнее плодотворное сотрудничество по физике атмосферного электричества, следствием которого явилась данная работа. Оба автора глубоко благодарны Т. Ньюберту (T. Neubert) и Х. Халдоупису (C. Haldoupis), европейским коллабораторам в проекте МНТЦ № 3993, в рамках которого выполнена данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. T. R. Wilson, Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, 534 (1924).
2. A. V. Gurevich, G. M. Milikh, and R. A. Roussel-Dupré, Phys. Lett. A **165**, 463 (1992).
3. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **171**, 1177 (2001).
4. M. McCarthy and G. K. Parks, Geophys. Res. Lett. **12**, 393 (1985).
5. K. B. Eack, W. H. Beasley, W. D. Rust, T. C. Marshall, and M. Stolzenburg, Geophys. Res. Lett. **23**, 2915 (1996).
6. A. P. Chubenko, V. P. Antonova, S. P. Kryukov, V. V. Piskal, M. O. Ptitsyn, A. L. Shepetov, L. I. Vildanova, K. P. Zybin, and A. V. Gurevich, Phys. Lett. A **275**, 90 (2000).
7. C. B. Moore, K. B. Eack, G. D. Aulich, and W. Rison, Geophys. Res. Lett. **28**, 2141 (2001).
8. J. R. Dwyer, H. K. Rassoul, M. Al-Dayeh, L. Caraway, A. Chrest, B. Wright, E. Kozak, J. Jerauld, M. A. Uman, V. A. Rakov, D. M. Jordan, and K. J. Rambo, Geophys. Res. Lett. **32**, L01803 (2005).
9. G. J. Fishman, P. N. Bhat, R. Mallozzi, J. M. Horack, T. Koshut, C. Kouveliotou, G. N. Pendleton, C. A. Meegan, R. B. Wilson, W. S. Paciasas, S. J. Goodman, and H. J. Christian, Science **264**, 1313 (1994).
10. D. M. Smith, L. I. Lopez, R. P. Lin, and C. P. Barrington-Leigh, Science **307**, 1085 (2005).
11. K. B. Eack, D. M. Suszcynsky, W. B. Beasley, R. A. Roussel-Dupré, and E. M. Symbalisky, Geophys. Res. Lett. **27**, 185 (2000).
12. M. Brunetti, S. Cecchini, M. Galli, G. Giovannini, and A. Pagliarin, Geophys. Res. Lett. **27**, 1599 (2000).
13. T. Torii, M. Takeishi, and T. Hosono, J. Geophys. Res. **107**(D17), 4324 (2002).
14. H. Tsuchiya, T. Enoto, S. Yamada, T. Yuasa, M. Kawaharada, T. Kitaguchi, M. Kokubun, H. Kato, M. Okano, S. Nakamura, and K. Makishima, Phys. Rev. Lett. **99**, 165002 (2007).
15. A. Chilingarian, A. Daryan, K. Arakelyan, A. Hovhannisyan, B. Mailyan, L. Melkumyan, G. Hovsepyan, S. Chilinarian, N. Bostanjyan, and A. Reymers, in Proc. 31th Int. Cosmic Ray Conf., Lodz, Poland (2009).
16. T. Torii, T. Sugita, S. Tanabe, Y. Kimura, M. Kamogawa, K. Yajima, and H. Yasuda, Geophys. Res. Lett. **36**, L13804 (2009).
17. H. Tsuchiya, T. Enoto, T. Torii, K. Nakazawa, T. Yuasa, S. Torii, T. Fukuyama, T. Yamaguchi, H. Kato, M. Okano, M. Takita, and K. Makishima, Phys. Rev. Lett. **102**, 255003 (2009).
18. V. V. Alexeenko, N. S. Khaerdinov, A. S. Lidvansky, and V. B. Petkov, Phys. Lett. A **301**, 299 (2002).
19. G. N. Shah, H. Razdan, C. L. Bhat, and Q. M. Ali, Lett. Nature **313**, 773 (1985).
20. Б. М. Кужевский, Вестник МГУ, сер. 3, физика, астрономия, 14 (2004).
21. A. Shyam and T. C. Kaushik, J. Geophys. Res. **104**, 6867 (1999).
22. А. А. Гусев, И. М. Мартин, М. А. Алвес, Г. И. Пугачева, О. Р. Григорян, А. Петров, Конф. «Физика плазмы в солнечной системе», Сб. тезисов, с. 9 (2009).

23. L. S. Bratolyubova-Tsulukidze, E. A. Grachev, O. R. Grigoryan, V. E. Kunitsyn, B. M. Kuzhevskij, D. S. Lysakov, O. Yu. Nechaev, and M. E. Usanova, *Adv. Space Res.* **34**, 1815 (2004).
24. L. P. Babich, *High-Energy Phenomena in Electric Discharges in Dense Gases: Theory, Experiment and Natural Phenomena*, Futurepast Inc., Arlington, Virginia, USA (2003).
25. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, *ДАН* **394**, 320 (2004).
26. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, *Физика плазмы* **30**, 666 (2004).
27. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, И. М. Куцык, Р. А. Рюссель-Дюпре, *Геомагнетизм и аэронавигация* **44**, 697 (2004).
28. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, Р. А. Рюссель-Дюпре, *Геомагнетизм и аэронавигация* **47**, 548 (2007).
29. Л. П. Бабич, *ТВТ* **33**, 659 (1995).
30. Л. П. Бабич, А. Ю. Кудрявцев, М. Л. Кудрявцева, И. М. Куцык, *Геомагнетизм и аэронавигация* **48**, 381 (2008).
31. Л. П. Бабич, А. Ю. Кудрявцев, М. Л. Кудрявцева, И. М. Куцык, *Геомагнетизм и аэронавигация* **48**, 392 (2008).
32. L. P. Babich and I. M. Kutsyk, in *Proc. XXII Int. Conf. Phenomena in Ionized Gases*, Hoboken, USA (1995), Contributed papers, Vol. II, p. 149.
33. Л. П. Бабич, И. М. Куцык, *ТВТ* **33**, 191 (1995).
34. Л. П. Бабич, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, К. И. Бахов, Р. А. Рюссель-Дюпре, *ДАН* **388**, 383 (2003).
35. Л. П. Бабич, Р. И. Илькаев, И. М. Куцык, К. И. Бахов, Р. А. Рюссель-Дюпре, *Геомагнетизм и аэронавигация* **44**, 254 (2004).
36. Л. П. Бабич, М. Л. Кудрявцева, *ЖЭТФ* **131**, 808 (2007).
37. Л. П. Бабич, *ЖЭТФ* **125**, 808 (2004).
38. A. V. Gurevich, K. P. Zybin, and R. A. Roussel-Dupré, *Phys. Lett. A* **254**, 79 (1999).
39. J. R. Dwyer, *Geophys. Res. Lett.* **32**, L20808 (2005).
40. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, И. Е. Сахаров, *Основы физики плазмы*, Атомиздат, Москва (1977).
41. H. Bethe and U. Ashkin, in *Experimental Nuclear Physics*, ed. by E. Segré, New York-London (1953), Vol. 1, Part 2.
42. L. P. Babich, E. N. Donskoy, A. Y. Kudryavtsev, and I. M. Kutsyk, *Phys. Lett. A* **245**, 460 (1998).
43. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика. Теоретическая физика*, том IV, Наука, Москва (1989).
44. S. T. Zalesak, *J. Comp. Phys.* **31**, 335 (1979).
45. V. P. Leonard, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **88**, 17 (1991).
46. Л. П. Бабич, А. Ю. Кудрявцев, М. Л. Кудрявцева, И. М. Куцык, *ДАН* **415**, 394 (2007).
47. Л. П. Бабич, Е. Н. Донской, А. Ю. Кудрявцев, И. М. Куцык, *ДАН* **421**, 817 (2008).
48. L. P. Babich, A. Y. Kudryavtsev, M. L. Kudryavtseva, and I. M. Kutsyk, *ЖЭТФ* **133**, 80 (2008).
49. L. P. Babich, E. N. Donskoy, A. Y. Kudryavtsev, M. L. Kudryavtseva, and I. M. Kutsyk, *AIP Conf. Proc., Proc. of Workshop on Coupling of Thunderstorms and Lightning Discharges to Near-Earth Space*, Corte, Corsica, France, ed. by N. B. Vock, Tai-Yin Huang, and M. J. Rycroft, **1118**, 52 (2008).