

АССОРТАТИВНЫЕ И ДИССОРТАТИВНЫЕ СЕТИ. ВЛИЯНИЕ ТОПОЛОГИИ СЛОЖНОЙ СЕТИ НА СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЙ

*С. Л. Гинзбург, А. В. Накин, Н. Е. Савицкая**

*Петербургский институт ядерной физики Российской академии наук
188300, Гатчина, Ленинградская обл., Россия*

Поступила в редакцию 28 октября 2009 г.

Впервые изучено влияние структуры сложной сети на свойства лавинообразного динамического процесса, протекающего на ней. Установлено, что такая структурная характеристика сети, как степень ее ассортативности (дисассортативности), численно выражающаяся коэффициентом ассортативности r , является управляющим параметром, определяющим свойства динамического процесса на сети. Исследована структура отдельных лавин на сетях с различным значением r . Показано, что в случае дисассортативных сетей число точек, вовлеченных в лавину, изменяется во времени периодически.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие бурное развитие получила наука о сложных сетях — пространственных системах, представляющих собой совокупность узлов, соединенных связями. Это обусловлено в первую очередь тем, что множество объектов повышенного интереса, такие как разнообразные связи в социальной сфере, сеть интернет, комплекс энергоснабжения, совокупность дорожных развязок, торговые, финансовые контакты, и многое другое, можно представить именно в виде сети [1]. Так, например, в случае интернета узлы — это отдельные компьютеры как персональные, так и серверы, а связи — проводные и беспроводные соединения между ними.

Условно можно выделить два основных направления исследований сложных сетей. Первое из них связано с изучением их структурных свойств, второе — с исследованием динамических процессов на сетях. Очевидно, что оба эти направления тесно связаны. Если рассмотреть, например, передачу информации в качестве динамического процесса, то понятно, что его интенсивность, направленность и другие характеристики определяются структурой связи между компьютером, с которого передается информация, и компьютером, с которого она запрашивается. Несмотря на актуальность проблемы, до сих

пор не проводилось комплексного изучения влияния структурных свойств сложных сетей на характер динамики на них.

Целью данной работы является изучение зависимости свойств конкретного динамического процесса от характеристик сети, на которой он развивается.

Как известно, основной структурной характеристикой любой сети является функция распределения числа связей узлов [1]. Кроме того, ранее было показано [2], что в сложных сетях возможно наличие корреляций в связях между узлами с различным значением k (k — число связей узла). Так, в социальных сетях, например, узлы с большим числом связей (видные социальные деятели) со значительно большей вероятностью связаны между собой, чем с узлами с малым числом связей (рядовые граждане). По характеру корреляций сложные сети делятся на ассортативные, где связи устанавливаются преимущественно между узлами с одинаковым числом связей, и дисассортативные, где узлы с большим числом связей (хабы) связаны с узлами с наименьшим числом связей.

Характеристикой, которая отражает подобные тенденции, является коэффициент ассортативности [2]. Эта величина меняется в пределах $-1 \leq r \leq 1$. Так, в случае ассортативной сети, в которой узлы с большим числом связей (хабы) связаны между собой и практически не связаны с узлами с малой величиной k , этот коэффициент положителен ($r > 0$).

*E-mail: savitska@inbox.ru, savitska@thd.pnpi.spb.ru

Для дисассортативной сети, где характерны связи хабов с узлами с малыми k и почти отсутствуют связи между хабами, коэффициент ассортативности отрицателен ($r < 0$). Для нескоррелированной сети этот коэффициент равен нулю.

К сожалению, до настоящего времени были предложены лишь искусственные методы построения ассортативных и дисассортативных сетей, такие как конструирование сетей «by hands» из готовых модулей с большим и малым числом связей или принудительное «переплетение» связей в сетях [3]. В настоящей работе будем использовать простой и естественный способ построения сетей с различным значением коэффициента ассортативности.

Мы предлагаем строить растущую сеть методом линейного преимущественного присоединения следующим образом. В каждый момент времени t новый узел, рожденный с m связями, присоединяется к m узлам уже существующей сети. Узел i для присоединения выбирается с вероятностью, задаваемой линейной функцией от количества связей этого узла k_i и варьируемого коэффициента A : $f(k_i, A) = (k_i + A) / \sum_i (k_i + A)$.

Построенные по таким правилам присоединения сети являются безмасштабными, для них функция распределения числа связей имеет степенной вид $P(k) \sim k^{-\gamma}$, где $\gamma = 3 + A/m$ [1]. Используя такой способ построения сети, при простом варьировании коэффициента A ($-m \leq A < \infty$) можно получить сети с различным значением коэффициента ассортативности r . Рассмотрев зависимость коэффициента ассортативности от значения параметра A , мы покажем, что при $A < 0$ сеть будет дисассортативной ($r < 0$), а при $A > 0$ — ассортативной ($r > 0$). Значению $A = 0$ соответствует $r = 0$.

Таким образом, сети, построенные по предлагаемому нами методу, являются растущими безмасштабными сетями с различными значениями коэффициента ассортативности r . Заметим, что такие системы наиболее полно отражают свойства естественных природных и социальных сетей. Очевидно, что сеть интернет, к которой ежедневно подключаются новые узлы-пользователи, или сеть телефонных контактов, количество абонентов в которой постоянно увеличивается, являются растущими сетями. Безмасштабность же обеспечивает наличие таких топологических свойств сложных сетей, как неоднородность и наличие хабов (узлов с большим количеством связей).

В качестве динамической системы, поведение которой на сети мы будем исследовать, мы выбрали систему, описываемую моделью Френкеля–Контон-

ровой [4]. Эта модель относительно проста для изучения и очень популярна в физике (см. вторую главу монографии [4]). Ранее с ее помощью было описано поведение различных физических систем на решетках. Среди таких объектов — решетки джозефсоновских контактов [5, 6], волны зарядовой плотности [7], механические системы, например, совокупность упруго взаимодействующих частиц, находящаяся в периодическом потенциале и под действием внешней силы [8], дислокации и многое другое. Данная модель была выбрана нами для исследований прежде всего потому, что она демонстрирует нетривиальную, лавинообразную критическую динамику [9], изучение которой на сложной сети представляется очень интересным.

Изучаемая нами модель является системой взаимодействующих пороговых элементов. Система обладает закрытыми граничными условиями, основная динамическая переменная z имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное. Будем рассматривать данную модель при условии, что суммарное значение основной переменной z сохраняется в процессе эволюции системы и равно нулю. Возмущение будет производиться в определенных узлах, находящихся на «границе» сети, в которых $k = m$, при этом за каждый шаг в нее добавляется нулевое суммарное значение z . Возбуждение передается от одного узла к другому по связям и порождает лавинообразное изменение основной динамической переменной z в некотором количестве узлов. После прохождения лавины система возбуждалась вновь и так далее. По окончании переходного периода она достигала критического состояния, представляющего собой совокупность метастабильных состояний, по которым система блуждала в процессе эволюции. При этом в каждом из метастабильных состояний на определенной части узлов сети основная динамическая переменная z была близка к положительному пороговому значению, а на оставшейся части — к отрицательному. Примечательным фактом является то, что благодаря нелинейности системы не происходило полной аннигиляции положительных и отрицательных величин, а образовывались группы узлов с положительными и отрицательными значениями z . При переходе от одного метастабильного состояния к другому значения z на узлах флуктуировали, но разрушения критического состояния не происходило.

В настоящей работе мы изучили динамику описанной системы на сетях с различной степенью ассортативности.

В первую очередь мы рассмотрели статистику

лавины, возникающих в системе в критическом состоянии. В результате мы наблюдали интересное явление. Для сетей, у которых $A \rightarrow -m$ (сильно дисассортативных сетей), в функции распределения размеров лавин имелся явно выраженный «горб» при больших значениях размера. Это наблюдение, безусловно, говорит о наличии влияния структуры сети на динамику на ней.

Для более детального исследования этого влияния мы рассмотрели профили отдельных лавин, т. е. количество точек, вовлеченных в динамический процесс на каждом временном шаге в течение лавины. Мы наблюдали, что в случае дисассортативных сетей лавина представляла собой процесс с четко выраженной периодичностью и периодом в два временных шага, в то время как в ассортативных сетях число точек, затронутых лавиной, плавно нарастало, а затем так же плавно убывало к концу лавины. Этот результат легко объясним. Поскольку в дисассортативной сети ее граница (узлы с наименьшим значением k) связана в основном с хабами (узлами с большим значением k), то после инициации лавины на границе возмущение передается на узел-хаб, с которого поступает на множество узлов с малым k , после чего вновь возвращается на хаб. Таким образом число точек, вовлеченных в лавину, будет изменяться периодически. В ассортативной же сети точки с различными, как малыми, так и большими k вовлекаются в лавину, а по мере прохождения лавины их число так же плавно убывает.

Мы подробно изучили переход между динамическими режимами с «периодическими» и «гладкими» лавинами в системе, плавно изменяя коэффициент r , а следовательно, и структурные свойства сети. В результате было показано, что «горб» в функции распределения размеров лавин возникает при том значении параметра A , которое соответствует значению r , при котором возникают «периодические» лавины.

Таким образом, основным результатом нашей работы стал вывод о том, что структура сети, а именно, ее ассортативность или дисассортативность, оказывает решающее влияние на характер развивающихся на ней динамических процессов.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 2 подробно описывается алгоритм построения сетей с различными значениями коэффициента ассортативности, а также изучаются их структурные свойства. В разд. 3 представляются уравнения для исследуемой динамической системы. Раздел 4 посвящен изучению критического состояния рассматриваемой системы и расчету функции распределения

для размеров возникающих в системе лавин. В разд. 5 анализируются профили отдельных лавин на сетях с различным значением коэффициента ассортативности и проводится сопоставление вида профиля лавины с характеристиками пространственной структуры сети (A, r) , на которой она развивается. В Заключении приводятся основные результаты и выводы работы.

2. СЛОЖНЫЕ СЕТИ С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ АССОРТАТИВНОСТИ

Любая сеть представляет собой совокупность узлов, соединенных связями. Число связей узла в сети — величина k (degree). Будем рассматривать растущие (неравновесные) сети.

Процесс построения сети начинался с конструирования начального кластера. Для его создания мы брали $m + 1$ узлов и соединяли их между собой по принципу «все со всеми». Это означает, что каждый из узлов присоединялся с помощью своих m связей, с которыми он рожден, к остальным m узлам начального кластера. Заметим, что присоединение двух и более связей, принадлежащих узлу при рождении, к одному и тому же другому узлу запрещается.

Новый узел может быть присоединен к уже существующей сети различными способами. В настоящей работе мы будем рассматривать сети, построенные путем линейного преимущественного присоединения.

В каждый момент времени t новый узел, рожденный с m связями, присоединяется к m различным узлам уже существующей сети. Присоединение двух и более связей вновь рожденного узла к одному и тому же узлу уже существующей сети запрещается. Узел i для присоединения выбирается с вероятностью, задаваемой линейной функцией от количества связей этого узла k_i и варьируемого коэффициента A :

$$f(k_i, A) = (k_i + A) / \sum_i (k_i + A). \quad (1)$$

Сеть, построенная таким способом является растущей безмасштабной сетью. Покажем это, рассмотрев функцию распределения величины k .

Пусть $k_s(t)$ обозначает число связей, имеющих в момент времени t у узла, рожденного в момент времени s . Заметим, что при присоединении к сети нового узла общее количество связей в сети увеличивается на величину $2m$, а число связей у узла под номером t в момент времени t равно m , $k_t(t) = m$,

тогда в континуальном по k приближении можно записать следующее уравнение для числа связей узла, рожденного в момент времени s :

$$\frac{dk_s(t)}{dt} = mf(k_s(t)) = m \frac{k_s(t) + A}{\int_0^t (k_s(t) + A) ds}, \quad (2)$$

что с учетом условия

$$\int_0^t k_s(t) ds = 2mt$$

дает

$$\frac{dk_s(t)}{dt} = m \frac{k_s(t) + A}{(2m + A)t}. \quad (3)$$

Решение этого уравнения с граничным условием $k_t(t) = m$ имеет вид

$$k_s(t) = m \left(\frac{t}{s}\right)^\beta + A \left[\left(\frac{t}{s}\right)^\beta - 1 \right], \beta = \frac{m}{2m + A}. \quad (4)$$

Тогда для функции распределения $P(k)$ имеем

$$P(k) = \frac{1}{t} \int_0^t ds \delta[k - k_s(t)], \quad (5)$$

где $k_s(t)$ задается формулой (4).

Вычисление данного интеграла для $k > m$ дает

$$P(k) = \frac{2m + A}{m(m + A)} \left[\frac{m + A}{k + A} \right]^\gamma \theta(k - m), \quad (6)$$

$$\gamma = 3 + \frac{A}{m}.$$

Таким образом, мы имеем безмасштабную сеть.

Структурной характеристикой сети является не только функция распределения $P(k)$, но также и корреляция связей между узлами с различным числом k [2]. По характеру таких корреляций сложные сети делятся на ассортативные, где связи устанавливаются преимущественно между узлами с одинаковым числом связей, и дисассортативные, где узлы с большим числом связей связаны с узлами с наименьшим числом связей. Численной характеристикой, которая отражает подобные тенденции, является коэффициент ассортативности r [10],

$$r = \frac{\sum_k e_{kk} - \sum_k a_k b_k}{1 - \sum_k a_k b_k}. \quad (7)$$

Величина e_{lk} представляет собой долю связей, соединяющих узлы с числом связей l и k , $a_l = \sum_k e_{lk}$, $b_k = \sum_l e_{lk}$.

Из приведенной формулы видно, что величина r изменяется в пределах $-1 \leq r \leq 1$. Так, в случае ассортативной сети, в которой узлы с большим числом связей связаны между собой и практически не связаны с узлами с малой величиной k , этот коэффициент положителен ($r > 0$). В предельном случае полностью ассортативной сети $r = 1$, поскольку $\sum_k e_{kk} = 1$. Для дисассортативной сети, где характерны связи хабов с узлами с малыми k и почти отсутствуют связи между хабами, коэффициент ассортативности отрицателен ($r < 0$), так как $e_{kk} < a_k b_k$. Для некоррелированной сети коэффициент r равен нулю, поскольку $e_{lk} = a_l b_k$.

После построения растущих безмасштабных сетей с различной степенью ассортативности, путем простого варьирования коэффициента A ($-m \leq A < \infty$) в функции (1) мы изучили их основные структурные характеристики $r(A)$, $P(k)$ и впервые рассмотрели зависимость числа связей узла от времени его рождения $k(s)$.

Для расчетов коэффициента ассортативности мы пользовались следующей модификацией формулы (7) [10]:

$$r = \left\{ M^{-1} \sum_j l_j k_j - \left[M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j + k_j) \right]^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j^2 + k_j^2) - \left[M^{-1} \sum_j \frac{1}{2} (l_j + k_j) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Здесь суммирование ведется по связям в построенной сети, M — полное число этих связей, l_j и k_j — число связей у узлов, находящихся на концах j -й связи. На рис. 1 представлена зависимость коэффициента ассортативности r от величины A . Заметим, что расчеты коэффициента r проводились как минимум для десяти реализаций сети для каждого значения A , затем результаты усреднялись.

Рассмотрев зависимость коэффициента ассортативности от значения параметра A , можно увидеть, что при $A < 0$ сеть будет дисассортативной ($r < 0$), а при $A > 0$ — ассортативной ($r > 0$). Значению $A = 0$ соответствует $r = 0$.

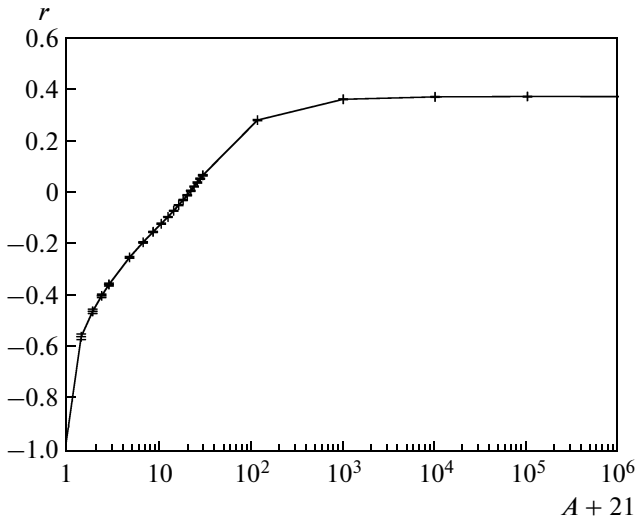


Рис. 1. Зависимость коэффициента ассортативности r от величины A . Расчеты выполнены для сетей размером $N = 10000$ при $m = 20$. Значения A на оси x приведены со сдвигом на величину $m + 1$

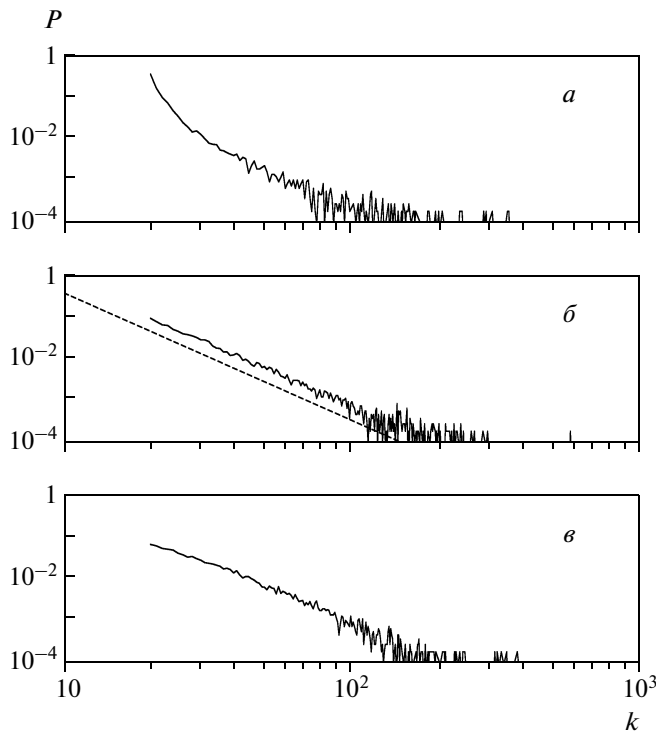


Рис. 2. Функция распределения $P(k)$ для сетей с различной степенью ассортативности, размером $N = 10000$ при $m = 20$; $A = -18$ (а), 0 (б), 18 (в); $r = -0.35$ (а), 0 (б), 0.2 (в). Пунктирная прямая соответствует функции $f(k) \sim k^{-\gamma}$, где $\gamma = 3$

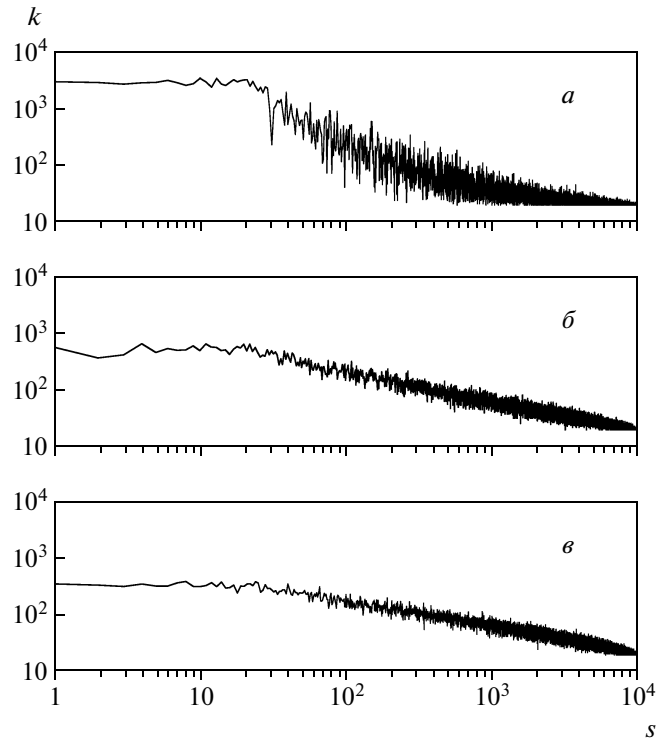


Рис. 3. Функция $k(s)$ для сетей с различной степенью ассортативности, размером $N = 10000$ при $m = 20$; $A = -18$ (а), 0 (б), 18 (в); $r = -0.35$ (а), 0 (б), 0.2 (в)

Далее мы изучили функцию распределения $P(k)$ для сетей с различной степенью ассортативности. Результаты представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что для ассортативных сетей степенная аппроксимация данной функции, свойственная безмасштабным сетям (б), справедлива практически на всем интервале значений k . Для дисассортативных же сетей отрезок значений k , на которых степенная аппроксимация возможна, резко сужается, что естественно, поскольку при $A = -m$ функция $P(k)$ становится сингулярной.

Мы рассмотрели распределение величины k по узлам ($k(s)$, где s — номер узла, узлы нумеруются по мере присоединения к сети) в сетях с различными значениями коэффициента r (рис. 3).

В результате мы наблюдали качественное изменение вида распределения при переходе от ассортативных сетей к дисассортативным. Различие проявляется в характерных значениях величины k , которые достигаются в начальном кластере узлов и во всей остальной сети. В случае дисассортативных сетей мы видели, что величины k в теле сети могут достигать тех же значений, вплоть до k_{max} , что и в

начальном кластере, где величины k самые большие. А в ассортативных сетях величины k максимальны в начальном кластере и постепенно уменьшаются для точек в теле сети, доходя до $k = m$ на границе, т. е. функция $k(s)$ плавно убывает с увеличением s . Кроме того, различен разброс в значениях k для соседних по номеру узлов. Так, в дисассортативных сетях разброс k в соседних узлах может достигать максимального значения $k_{max} - m$, а для ассортативных сетей он достаточно мал.

Далее в настоящей работе рассматриваются сети с количеством узлов $N = 10000$, $m = 20$ и различной степенью ассортативности.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА СЛОЖНОЙ СЕТИ

Перейдем теперь к изучению динамики на сети. Мы рассмотрим на сети динамическую систему, описываемую моделью Френкеля–Конторовой [4]. В рассматриваемой нами системе с каждым узлом сети связана одномерная динамическая переменная φ_i , помещенная в периодический потенциал, на которую воздействует локальная сила F_i , где i — номер узла (узлы нумеруются в порядке рождения). Данная переменная может трактоваться и как калибровочно-инвариантная разность фаз в случае джозефсоновской среды [5], и как фаза волн зарядовой плотности, и как координата «частицы» для механической системы [7]. Для описанной модели потенциальная энергия выражается следующей формулой [8]:

$$U(\varphi_i) = \sum_i [V(1 - \cos \varphi_i) - 2\pi F_i \varphi_i] + \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)^2. \quad (9)$$

Коэффициенты J_{ij} определяют взаимодействие между частицами и подчиняются следующим соотношениям: $J_{ij} = 1$, если i -й и j -й узлы связаны, $J_{ij} = 0$, если не связаны. Величины F_i описывают внешнее воздействие на систему.

Динамика переменной φ_i описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i}, \quad (10)$$

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + 2\pi F_i.$$

Здесь V и τ — параметры системы, коэффициенты J_{ij} , как сказано выше, характеризуют наличие или

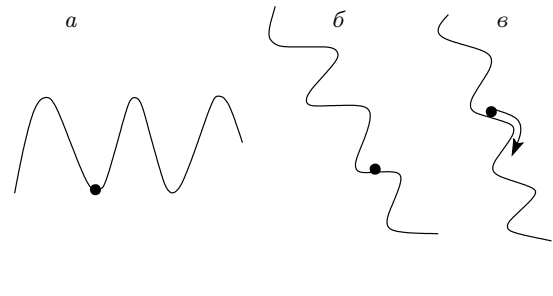


Рис. 4. Схематическое изображение динамики одиночной «частицы», описываемой уравнением (12), для случаев $F_i \leq V/2\pi$ (а), $F_i = V/2\pi$ (б), $F_i > V/2\pi$ (в)

отсутствие в сети связи между i -м и j -м узлами. В нашем случае $J_{ij} = J_{ji}$. При этом сумма всех связей, имеющихся у узла под номером i , равна k_i для этого узла, т. е. $\sum_j J_{ij} = k_i$. Тогда имеем

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} \varphi_j - k_i \varphi_i + 2\pi F_i. \quad (11)$$

Как уже сказано выше, величины F_i описывают внешнее воздействие на систему, что наглядно демонстрирует следующий пример. Если мы рассмотрим случай, когда взаимодействие в системе отсутствует, то уравнение движения для одной переменной φ_i , условно говоря, одной «частицы», имеет вид

$$\tau \frac{d\varphi_i}{dt} = 2\pi F_i - V \sin \varphi_i. \quad (12)$$

При $F_i \leq V/2\pi$ уравнение имеет в качестве решения устойчивую точку ($d\varphi_i/dt = 0$), «частица» находится в одной из потенциальных ям. При возрастании величины внешнего воздействия F_i «частица» начинает «скользить» по потенциалу и при $F_i > V/2\pi$ становится возможным переход из одного состояния в другое. Данная картина поведения проиллюстрирована на рис. 4.

Таким образом, описанная модель является системой взаимодействующих пороговых элементов. Система обладает закрытыми граничными условиями, основная динамическая переменная имеет два пороговых значения: положительное и отрицательное. Мы будем рассматривать нашу модель при условии, что суммарное значение основной переменной сохраняется в процессе эволюции системы и равно нулю. Внешнее возмущение будет производиться в определенных узлах, находящихся на «границе» сети. Определим границу сети как узлы, в которых

$k = m$. Именно на этих узлах будем изменять величины F_i , чтобы возбудить в системе динамический процесс. Ниже процесс возмущения будет обсужден более подробно. Заметим, что рассматриваемые ранее равновесные сети, такие как классический случайный граф, не имеют границ, однако для безмасштабной сети определение границы как совокупности узлов, у которых число связей в сети равно числу связей при рождении узла, является вполне естественным. Это узлы, к которым не было осуществлено присоединение.

Рассмотрим случай, когда параметр $V \gg 1$. В этой ситуации в системе можно ввести дискретное время и перейти к рассмотрению более удобной переменной

$$z_i = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt},$$

динамика которой будет описываться не системой дифференциальных уравнений, а системой отображений или алгоритмами. Подробное описание техники перехода к дискретному времени и системе отображений, а также его физическое обоснование, дано в работе [5].

Возникающая в результате перехода к дискретному времени система отображений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - k_i \Psi(z_i(n)), \\ z_i(n+1) - z_i(n) &= \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - \\ &- k_i \Psi(z_i(n)) + [F_i(n+1) - F_i(n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Первое уравнение данной системы справедливо для внутренних узлов сети, второе — для узлов на границе, где происходит добавление.

Функция $\Psi(z)$ имеет вид

$$\Psi(z_i(n)) = \theta[z_i - z_c^+] - \theta[-z_i - z_c^-],$$

где z_c^+ и $(-z_c^-)$ — положительные и отрицательные критические значения для z ($z_c^\pm > 0$).

Из уравнений (13) видно, что изменение во времени суммарного значения переменной z_i выражается через сумму изменений внешних воздействий:

$$\sum_i [z_i(n+1) - z_i(n)] = \sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)]. \quad (14)$$

Обсудим особенности возмущения нашей системы. Для того чтобы соблюдалось поставленное нами условие сохранения и равенства нулю суммарного значения основной динамической переменной z , мы выберем для системы следующие начальные

условия: $z_i = F_i = 0$. Далее разделим границу на «положительную» и «отрицательную» части. Для этого выберем случайно n_b^+ «положительных» узлов границы, остальные n_b^- узлов будут «отрицательными». На «отрицательных» узлах величины будут получать отрицательные приращения, на «положительных» — положительные. Количество узлов в «положительной» и «отрицательной» частях границ и величина изменения F_i будут выбираться так, чтобы $\sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)] = 0$. Тогда получим, что суммарное изменение величины z будет равно нулю.

Рассмотрим процесс моделирования динамики описанной нами закрытой системы на сети.

Напомним, что в начальном состоянии системы все $z_i = F_i = 0$.

Далее, мы возмущаем сеть, добавляя величину $+\Delta h$ к F_i в случайно выбранном i -м узле «положительной» части границы сети и величину $-\Delta h$ к величине F_j в случайно выбранном j -м узле «отрицательной» части границы сети. Если не будет оговорено особо, то $\Delta h = 1$. В результате суммарное добавление равняется нулю. Таким образом, шаг за шагом мы проводим «накачку» переменной z в сеть.

Как только в одном из узлов сети переменная z_i выйдет из интервала значений $-z_c^- < z_i < z_c^+$, то согласно отображениям (13) произойдет сброс нескольких единиц с этого узла на соседние узлы z_j , связанные с ним k_i связями. Заметим, что этот процесс можно описать алгоритмом

$$\begin{aligned} z_i > z_c^+ &\Rightarrow z_i \rightarrow z_i - k_i, \\ &z_j \rightarrow z_j + 1; \\ z_i < -z_c^- &\Rightarrow z_i \rightarrow z_i + k_i, \\ &z_j \rightarrow z_j - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Изменение z в одном из узлов (осыпание) может вызвать осыпание соседних, запуская таким образом лавинообразный процесс. В этом случае мы ожидаем окончания динамического процесса, т. е. ситуации, когда для всех z выполнено неравенство $-z_c^- < z_i < z_c^+$, а затем вновь возмущаем систему на границе способом, описанным выше.

По прошествии некоторого переходного периода в системе устанавливается критическое состояние. Уникальность этого явления состоит в том, что, несмотря на сложную топологию сети и условие сохранения нулевого суммарного значения динамической переменной, в системе не происходит полной аннигиляции положительных и отрицательных величин, а образуются устойчивые кластеры узлов, в которых величина z имеет положительное или отрицательное значение.

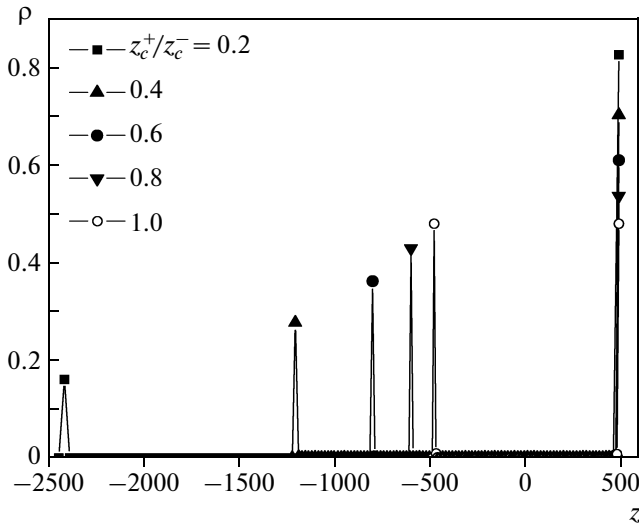


Рис. 5. Функции распределения величины z_i в одном из метастабильных критических состояний для различных соотношений z_c^+ / z_c^- и $n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^-$. Величины пиков соотносятся между собой как $\rho(z_c^+) / \rho(z_c^-) = z_c^- / z_c^+$

Процесс аннигиляции в системе способствует возникновению и поддержанию критического состояния, которое состоит из набора метастабильных состояний. Во время переходов из одного метастабильного состояния в другое, согласно алгоритму (15), значения z на узлах несколько флуктуируют, но не меняют знака в процессе эволюции системы. Переход между метастабильными состояниями осуществляется посредством лавин, которые обнаруживаются как каскад изменений z на узлах.

Структура метастабильных состояний, составляющих возникающее критическое состояние, условно зависит от разделения границы сети на «положительную» и «отрицательную» части и от соотношения положительного и отрицательного критических значений для z (рис. 5).

Динамика систем с различными соотношениями величин $n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^-$ на безмасштабной сети с $m = 2$ подробно исследована в работе [9]. В настоящей работе мы рассматривали следующее соотношение между этими величинами: $n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^- = 0.2$. Такой выбор связан с тем, что при данных условиях наша динамическая система демонстрировала самоорганизованное поведение [11]. Это означает, что в процессе эволюции система мигрировала по большому числу метастабильных критических состояний, переход между ними осуществлялся посредством лавин, а размеры возникающих лавин подчинялись степенному распределению [9].

4. СТАТИСТИКА ЛАВИН В КРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Рассмотрим статистику лавин в нашей закрытой системе, помещенной на безмасштабную сеть. Функция распределения размеров лавин, возникающих в системе, является основной характеристикой самоорганизованного критического состояния [11].

Размером лавины s будем называть полное число «осыпаний», т. е. актов, когда величина z выходит за пределы интервала $-z_c^- < z_i < z_c^+$, за время лавины. Моменты времени в течение лавины с номером a будем обозначать n_a , в отличие от a — номера лавины или возмущения, который является фиктивным временем в нашем процессе моделирования [6]. Будем нормировать эту величину на размер сети N :

$$s = \frac{1}{N} \sum_{i, n_a} \{ \theta[z_i(n_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(n_a) - z_c^-] \}. \quad (16)$$

Мы рассмотрели функции плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ в нашей системе для сетей с различной степенью ассортативности. Меняя параметр A , мы строили сети с различными величинами коэффициента ассортативности r , размером $N = 10000$ с $m = 20$. Для каждого случая мы рассчитывали плотность вероятности $\rho(s)$ следующим образом. После прихода системы в критическое состояние рассчитывался размер каждой возникающей лавины по формуле (16), а затем вычислялась плотность вероятности размеров лавин. Расчеты делались по количеству лавин, равному примерно $10^6 - 10^7$. В результате мы наблюдали, что, начиная с определенного значения коэффициента A ($A = -16$) у функции плотности вероятности имеется «горб», соответствующий некоторому выделенному значению размера лавины.

На рис. 6 представлены результаты расчетов для трех значений величины A и соответственно для трех значений r , отвечающих случаям сильно дисассортативной ($A = -18, r = -0.35$), некоррелированной ($A = 0, r = 0$) и ассортативной ($A = 18, r = 0.2$) сетей. Мы видим, что при $A = -18, r = -0.35$ у функции плотности вероятности имеется ярко выраженный «горб».

Появление особенности у функции плотности вероятности при изменении степени ассортативности сети подтверждает факт влияния структуры сети на свойства динамического процесса на ней. Для более подробного изучения этого интереснейшего эффекта мы изучили структуру отдельной лавины на сетях с различным значением коэффициента r .

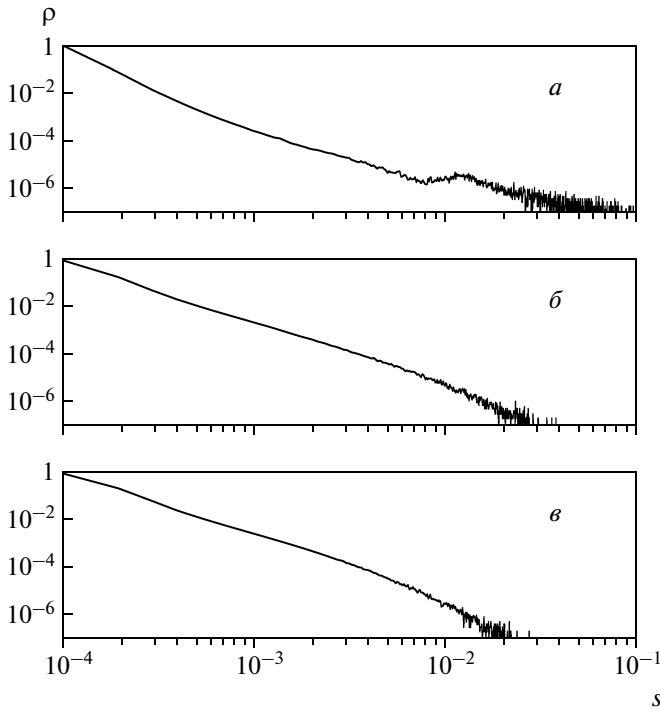


Рис. 6. Плотности вероятности размеров лавин $\rho(s)$ для исследуемой системы на сетях с различной степенью ассортативности: $A = -18$ (а), 0 (б), 18 (в), $r = -0.35$ (а), 0 (б), 0.2 (в). В случае а в системе имеется выделенный размер лавины, о чем свидетельствует наличие «горба» в функции $\rho(s)$

5. ПРОФИЛИ ЛАВИН НА СЕТЯХ С РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНЬЮ АССОРТАТИВНОСТИ

В качестве структурной характеристики отдельной лавины был выбран ее профиль в критическом состоянии, т. е. количество точек $s(n_a)$, вовлеченных в динамический процесс на каждом временном шаге n_a в течение лавины:

$$s(n_a) = \frac{1}{N} \sum_i \{\theta[z_i(n_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(n_a) - z_c^-]\}, \quad (17)$$

где n_a , как и ранее, — время на протяжении одной лавины.

Мы вычисляли усредненные профили лавин в системах, помещенных на сети, построенные при различных значениях коэффициента A , а следовательно, и коэффициента ассортативности r , следующим образом.

В течение всего процесса моделирования динамики нашей системы, который длился, пока не на-

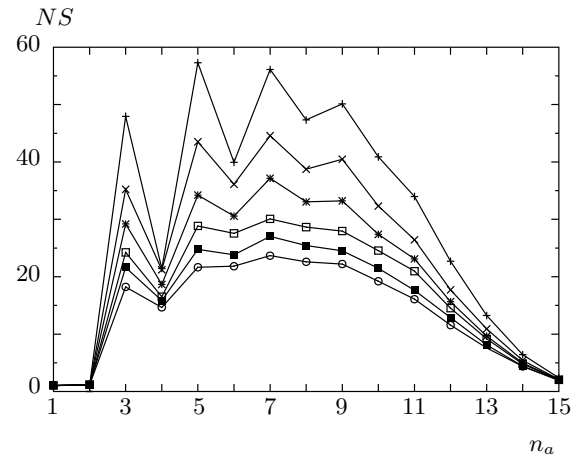


Рис. 7. Усредненное количество узлов сети, вовлеченных в лавину длиной $L = 15$ шагов на сети размером $N = 10000$ с $m = 20$ в случае дисассортативных сетей с $-0.35 \leq r \leq -0.23$ ($-18 < A < -15$). Количество лавин N_{ava} для каждого значения A : $A = -18$, $r = -0.35$ (+), $N_{ava} = 1745$; $A = -17.4$, $r = -0.31$ (×), $N_{ava} = 1899$; $A = -17$, $r = -0.29$ (*), $N_{ava} = 2137$; $A = -16.5$, $r = -0.27$ (□), $N_{ava} = 1817$; $A = -16$, $r = -0.24$ (■), $N_{ava} = 2460$; $A = -15.5$, $r = -0.23$ (○), $N_{ava} = 2320$. В профиле лавин видна периодичность вплоть до значения $r = -0.27$, $A = -16.5$

считывалось 10^6-10^7 лавин, отбирались лавины с фиксированной длительностью L временных шагов. Для каждой из них рассчитывалось число узлов, вовлеченных в лавину на каждом шаге $s(n_a)$, $1 \leq n_a \leq L$ по формуле (17). Затем проводилось усреднение профиля лавины $s(n_a)$ по всем лавинам фиксированной длины L согласно формуле

$$S(n_a) = \frac{1}{N_{ava}} \sum_{a=1}^{N_{ava}} s_a(n_a), \quad (18)$$

где $s_a(n_a)$ — количество узлов, вовлеченных на шаге n_a в a -ю лавину длиной L , а N_{ava} — число лавин длиной L , наблюдавшихся в течение всего времени моделирования.

Результаты расчетов представлены на рис. 7, 8.

Из рисунков видно, что в случае сильно дисассортативных сетей ($r < -0.27$) лавина представляла собой процесс с четко выраженной периодичностью и периодом в два временных шага, в то время как в ассортативных сетях ($r > 0$) число точек, затронутых лавиной, плавно нарастало, а затем так же плавно убывало к концу лавины.

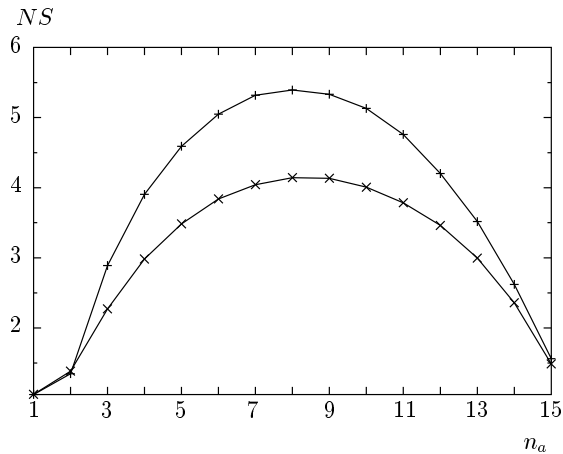


Рис. 8. Усредненное количество узлов сети, вовлеченных в лавину длиной $L = 15$ шагов на ассортативной (\times) ($A = 18, r = 0.12$) и некоррелированной ($+$) ($A = 0, r = 0$) сетях размером $N = 10000$ с $m = 20$. Периодичности не наблюдается

Этот результат объясняется структурными свойствами сетей, на которых развивается лавина, и еще раз доказывает факт влияния топологии сети на динамический процесс, развивающийся на ней. В сильно дисассортативной сети ее граница (узлы с наименьшим значением k) связана в основном с хабами (узлами с большим значением k), поэтому после инициации лавины на границе возмущение передается на узел-хаб, с которого поступает на множество узлов с малым k , после чего вновь возвращается на хаб. В результате число точек, вовлеченных в лавину, будет изменяться периодически, постепенно убывая из-за процесса аннигиляции. В ассортативной же сети точки с различными как малыми, так и большими k одинаково часто вовлекаются в лавину, чем и объясняется ее «гладкий» профиль. По мере прохождения лавины их число сначала плавно нарастает, а затем, благодаря процессу аннигиляции так же плавно убывает. В случае слабо дисассортативных сетей с $r > -0.27$ наблюдается переходный режим от периодического развития лавины к ее «гладкому» профилю.

Кроме того, мы наблюдали, что возникновение «периодического» режима развития лавины происходит при тех же значениях A и r , что и появление «горба» в функции плотности вероятности размеров лавин.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе детально изучено влияние структуры сложной сети на свойства динамического

процесса, протекающего на ней. Установлено, что одной из основных структурных характеристик, определяющей свойства динамического процесса на сети, является степень ее ассортативности (дисассортативности), численно выражающаяся коэффициентом ассортативности r . Данная величина характеризует степень корреляции в связях между узлами с малым и большим числом связей (хабами). В ассортативных сетях ($r > 0$) хабы преимущественно связаны между собой и практически не связаны с узлами с малым числом связей, в случае же дисассортативной сети ($r < 0$) хабы в основном связаны с узлами с малым числом связей.

Также получены следующие интересные результаты.

1. Использован новый метод построения сетей с различной степенью ассортативности. В рамках данного метода растущая сеть строится с помощью линейного преимущественного присоединения, и вероятность присоединения нового узла к уже существующему в сети пропорциональна $k + A$, где k — число связей узла в сети, A — варьируемый коэффициент. Изменяя коэффициент A , мы получали сети с различными значениями коэффициента ассортативности r . Зависимость $r(A)$ подробно изучена и показано, что при $A < 0$ сеть будет дисассортативной ($r < 0$), а при $A > 0$ — ассортативной ($r > 0$). Значению $A = 0$ соответствует $r = 0$.

2. На сети различной ассортативности мы помещали динамическую систему, демонстрирующую лавинообразную критическую динамику, и рассматривали статистику размеров лавин, возникающих в данной системе. Показано, что в случае дисассортативной сети функция плотности вероятности размеров лавин имеет характерный «горб», который исчезает при переходе к ассортативным сетям.

3. Изучена внутренняя структура лавин в зависимости от коэффициента ассортативности сети, на которой они возникают. Показано, что в дисассортативных сетях лавины характеризуются периодическим профилем, что объясняется тем, что в процессе своего развития на каждом шаге лавина переходит с хабов на узлы с малым числом связей. В результате число точек, вовлеченных в лавину периодически изменяется от большего к меньшему. В случае ассортативной сети такой эффект отсутствует. Возникновение «периодического» режима развития лавины происходит при тех же значениях A и r , что и появление «горба» в функции плотности вероятности размеров лавин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы «Квантовая макрофизика», Государственной программы «Сильно коррелированные электроны в полупроводниках, металлах, сверхпроводниках и магнитных материалах», Государственной программы «Нейтронная физика» и РФФИ (грант № 08-02-00314-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Adv. Phys.* **51**, 1079 (2002).
2. M. E. Newman, *Phys. Rev. E* **67**, 026126 (2003).
3. R. Xulvi-Brunet and I. M. Sokolov, *Acta Phys. Polon. B* **36**, 1431 (2005).
4. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля – Конторовой. Концепции, методы, приложения*, Физматлит, Москва (2008).
5. С. Л. Гинзбург, *ЖЭТФ* **106**, 607 (1994).
6. S. L. Ginzburg and N. E. Savitskaya, *Phys. Rev. E* **66**, 026128 (2002).
7. J. P. Sethna and C. R. Myers, *Phys. Rev. B* **47**, 11171 (1993).
8. S. N. Coppersmith, *Phys. Rev. A* **36**, 3375 (1987).
9. С. Л. Гинзбург, В. А. Накин, Н. Е. Савицкая, *ЖЭТФ* **136**, 1183 (2009).
10. M. E. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
11. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).