

ИОНИЗАЦИЯ АТОМОВ В СИЛЬНОМ НИЗКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В. П. Крайнов**

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 11 января 2010 г.

Рассмотрена ионизация атомов в низкочастотном (энергия фотона мала по сравнению с потенциалом ионизации атома) линейно поляризованном электромагнитном поле в новых условиях, когда кулоновское взаимодействие электрона с атомным остовом в конечном состоянии непрерывного спектра нельзя рассматривать по теории возмущений по отношению к взаимодействию электрона с электромагнитным полем. Напряженность поля предполагается малой по сравнению с атомной напряженностью. В этих условиях классическое движение электрона в конечном состоянии непрерывного спектра становится хаотическим (так называемый динамический хаос). Используя известный метод усреднения Чирикова по хаотическому изменению фазы движения, рассматриваемую задачу можно свести к процессу нелинейной диффузии по шкале энергии. Вычислена усредненная по быстрым хаотическим колебаниям классическая энергия электрона в конечном состоянии, учитывающая как кулоновское, так и электромагнитное поле. Эта энергия используется для вычисления вероятности ионизации из основного состояния атома в низколежащее состояние непрерывного спектра на основе приближения Ландау–Дыхне (с экспоненциальной точностью). Эта вероятность ионизации существенно зависит от частоты поля. При уменьшении частоты рассмотрен переход к хорошо известному пределу туннельной ионизации, вероятность которой уже не зависит от частоты поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сначала мы обратимся к известным результатам Келдыша [1] для вероятности нерелятивистской ионизации атомов низкочастотным электромагнитным полем линейной поляризации в условиях, когда в конечном состоянии непрерывного спектра можно пренебречь кулоновским полем атомного остова, т. е. в случае короткодействующего потенциала. Будем всегда предполагать, что энергия фотона этого поля $\hbar\omega$ мала по сравнению с потенциалом ионизации атома E_i . В дальнейшем будем, как правило, использовать атомную систему единиц, в которой заряд и масса электрона, а также постоянная Планка равны единице. В соответствии с общим подходом приближения Ландау–Дыхне [2] будем вычислять вероятность ионизации только с экспоненциальной точностью, пренебрегая предэкспоненциальным фактором.

Низкая частота электромагнитного поля обеспечивает условие адиабатичности полевого возмуще-

ния, т. е. применимости приближения Ландау–Дыхне. Штарковским сдвигом начального состояния в низкочастотном поле можно пренебречь. Его величина близка к квадратичному штарковскому сдвигу в постоянном электрическом поле, малом по сравнению с атомным полем, и она не меняет показателя экспоненты в вероятности ионизации.

В конечном состоянии непрерывного спектра, как уже было сказано, в случае короткодействующего потенциала пренебрегаем полем атомного остова. Тогда энергия свободного электрона в поле линейно поляризованной электромагнитной волны равна

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(t) \right)^2 = \frac{F^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t).$$

Здесь $F = A\omega/c$ — амплитуда напряженности поля волны, ω — частота поля, $\mathbf{A} \sin(\omega t)$ — векторный потенциал поля. Величина \mathbf{p} представляет собой конечный дрейфовый импульс вылетевшего электрона. Мы интересуемся прежде всего вероятностью ионизации, а не энергетическим спектром вылетевших электронов. Поэтому здесь мы положим $\mathbf{p} = 0$.

*E-mail: vpkrainov@mail.ru

Отметим, что в случае малых значений \mathbf{p} энергия состояния непрерывного спектра может вычисляться в квазиклассическом приближении, на чем и будет основан подход, учитывающий кулоновское поле атомного остова.

Согласно приближению Ландау–Дыхне [2], вычисляем вероятность ионизации (с экспоненциальной точностью):

$$w = \exp \left(-2 \operatorname{Im} \int_0^{t_0} (E(t) + E_i(t)) dt \right). \quad (1)$$

Точка поворота в комплексной плоскости времени определяется из условия $E(t_0) = -E_i$ и имеет вид

$$t_0 = \frac{i}{\omega} \operatorname{arcsch} \gamma, \quad \gamma = \frac{\omega \sqrt{2E_i}}{F}.$$

Величина γ называется параметром Келдыша [1]. Этот параметр безразмерен, и его величина может быть как больше, так и меньше единицы. Тогда из (1) получим

$$w = \exp \left(-\frac{2E_i}{\omega} g(\gamma) \right). \quad (2)$$

Здесь обозначено

$$g(\gamma) = (1 + 1/2\gamma^2) \operatorname{arcsch} \gamma - (1/2\gamma) \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

При $\gamma \ll 1$ находим простое выражение для энергии, которое не зависит от частоты электромагнитного поля:

$$E(t) = \frac{(Ft)^2}{2}.$$

Из (1) получим туннельный предел для вероятности ионизации, не зависящий от частоты поля:

$$w = \exp \left\{ -\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F} \right\}. \quad (3)$$

Это выражение применимо, когда напряженность внешнего электромагнитного поля мала по сравнению с атомной напряженностью, т.е. $F \ll (2E_i)^{3/2}$. Величина $(2E_i)^{3/2}$ является атомной напряженностью для случая ионизации в короткодействующем потенциале.

Напротив, при $\gamma \gg 1$ из (2) получим многофотонный предел, соответствующий $K = (E_i - \omega)$ -му порядку теории возмущений (он является наименьшим для многофотонной ионизации в соответствии с законом сохранения энергии при поглощении фотонов внешнего поля):

$$w = \left(\frac{\sqrt{e} F}{2\omega \sqrt{2E_i}} \right)^{2K} \quad (4)$$

(e — основание натурального логарифма). Конечно, формула (4) справедлива в отсутствие каких-либо резонансов с дискретными возбужденными состояниями атома.

Выражение (2) может быть получено и в рамках S -матричного подхода, если использовать волковскую волновую функцию конечного состояния для электрона в монохроматическом электромагнитном поле [3]. Для этого нужно вычислять интеграл по времени методом перевала и пренебрегать возникающими преэкспонентами.

Итак, параметр Келдыша определяет характер ионизации в поле короткодействующего потенциала. При увеличении напряженности поля многофотонная ионизация сменяется туннельной. Полученные результаты применимы, когда, во-первых, энергия фотона мала по сравнению с потенциалом ионизации атома, а во-вторых, напряженность поля F мала по сравнению с характерной атомной напряженностью для короткодействующего потенциала $(2E_i)^{3/2}$.

В действительности формула (4) требует более жесткого условия применимости, основанного на требовании отсутствия надпорогового поглощения фотонов. Оно вытекает из рассмотрения S -матричного подхода [4], согласно которому поглощение минимального числа фотонов, т.е. соотношение (4), реализуется при выполнении условия, когда безразмерный квантовый параметр Риса

$$\frac{e^2 F^2}{m\hbar\omega^3} < 1.$$

Если же выполняется противоположное неравенство, то имеет место поглощение надпороговых фотонов. При этом численный фактор в указанном параметре зависит от того, насколько точно в порог попадает поглощение порогового числа фотонов [5]. Далее, в условиях

$$1 \ll \frac{e^2 F^2}{m\hbar\omega^3} < K = \frac{E_i}{\hbar\omega}$$

ионизация по-прежнему носит степенной характер, но поглощается большее число фотонов, нежели минимальное значение K . Наконец, при условии, соответствующем туннельному пределу $\gamma \ll 1$,

$$\frac{e^2 F^2}{m\hbar\omega^3} \gg K = \frac{E_i}{\hbar\omega},$$

поглощается

$$\frac{e^2 F^2}{4m\hbar\omega^3} \gg K$$

фотонов. Однако электрон вылетает с малой энергией, так как одновременно в поле линейной поляризации потенциал ионизации возрастает на величину (пандеромоторный сдвиг энергии)

$$\frac{e^2 F^2}{4m\omega^2}.$$

Перейдем теперь от случая короткодействующего потенциала к атому. Надпороговое поглощение добавочных фотонов возникает при выполнении условия (в атомных единицах) [6]

$$F > C\omega^{5/3}.$$

Константа пропорциональности была оценена в работе [7]:

$$C = \frac{1}{\pi}.$$

При этом вероятность надпороговой ионизации в единицу времени удобно представить в виде

$$w = \omega_a \left(\frac{I}{I_s} \right)^{K+S},$$

где, как и выше, K — минимальное число фотонов, необходимое для ионизации, а S — добавочное число надпороговых фотонов; $\omega_a = 4.13 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ — атомная единица частоты. Надпороговая интенсивность I_s определяется из численных расчетов и имеет порядок величины 10^{14} Вт/см^2 . Детальный анализ надпорогового поглощения дан в монографии [7]. Если напряженность поля меньше указанного критического значения, то поглощается минимальное число фотонов. Коэффициент пропорциональности в зависимости $w \propto I^K$, учитывающий кулоновское поле атомного остова, был получен недавно в работе [8] (в условиях отсутствия промежуточных многофотонных резонансов с состояниями дискретного спектра).

Кулоновское поле можно рассмотреть в рамках классической теории возмущений как малую поправку к классическому действию $\int E(t) dt$. Это было сделано в работах [9, 10]. Такая поправка справедлива лишь в туннельном режиме и определяет предэкспоненту в выражении для вероятности надпороговой ионизации (см. формулу (3)). Для состояния атома с потенциалом ионизации E_i вероятность туннельной ионизации в линейно поляризованном поле равна

$$w = C \left(\frac{E_i^2}{F} \right)^{1/\sqrt{2E_i}} \exp \left\{ -\frac{2(2E_i)^{3/2}}{3F} \right\}. \quad (5)$$

Мы не приводим здесь выражения для коэффициента C , зависящего от поля значительно слабее, чем

остальные факторы в этом выражении для вероятности туннельной ионизации. Характерное атомное поле определяется предэкспонентой, а не экспонентой, и равно $F_a = E_i^2$ вместо $F_a = (2E_i)^{3/2}$ в случае короткодействующего потенциала. В случае высоковозбужденных начальных состояний атомное поле для кулоновского случая гораздо меньше, чем для случая короткодействующего потенциала.

Кулоновское поле можно рассмотреть в рамках классической теории возмущений как малую поправку к полемому классическому действию в случае, когда кулоновская сила мала по сравнению с полевой, т. е. $e^2/r^2 \ll eF$. Для состояния непрерывного спектра характерное расстояние r в этом соотношении в условиях доминирования полевой силы можно оценить как амплитуду осцилляций электрона в электромагнитном поле, т. е.

$$r \propto eF/m\omega^2.$$

Таким образом, если

$$\left(\frac{m^2\omega^4}{e} \right)^{1/3} \propto F,$$

то воздействия кулоновской силы и полевой силы на электрон, находящийся в конечном состоянии непрерывного спектра, сравнимы друг с другом.

В условиях

$$\omega^{5/3} \ll F \ll \omega^{4/3}$$

имеет место поглощение и вынужденное испускание большого числа надпороговых фотонов. Экспериментальные энергетические спектры испущенных электронов представляют собой набор большого числа уширенных пиков, отделенных друг от друга энергией фотона. Электрон может переходить из одного пика в другой как с поглощением, так и с испусканием фотона, что и приводит к диффузионному механизму его блужданий в непрерывном спектре. Указанные неравенства согласуются с малостью энергии фотона

$$\hbar\omega \ll \frac{me^4}{\hbar^2}$$

по сравнению с ридберговским значением, т. е. фактически по сравнению с потенциалом ионизации атома.

Итак, в общем случае, когда кулоновское поле атомного остова нельзя рассматривать по теории возмущений, основная задача при использовании приближения Ландау — Дыхне состоит в том, чтобы

вычислить классическую энергию электрона $E(t)$ в сравнимых по величине кулоновском поле атомного остова и электромагнитном поле. Это и является основным предметом данной статьи, позволяющим с экспоненциальной точностью вычислить вероятность ионизации атома в рамках приближения Ландау–Дыхне. Как и ранее, будем предполагать, что энергия фотона электромагнитного поля мала по сравнению с потенциалом ионизации. Это условие обычно реализуется для ионизации атомов и атомарных ионов лазерными импульсами видимого и инфракрасного диапазонов. Кроме того, предполагается выполнение условия малости поля по сравнению с атомным полем $F_a = E_i^2$.

Так как мы не интересуемся энергетическим спектром вылетающих электронов, конечное состояние непрерывного спектра имеет малую дрейфовую часть энергии. Поэтому для описания конечного состояния применимо квазиклассическое приближение, в соответствии с которым для использования формулы Ландау–Дыхне (1) требуется вычислить классическое действие $\int E(t) dt$. Таким образом, задача сводится к вычислению классической энергии $E(t)$ электрона в кулоновском поле и во внешнем монохроматическом поле.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ И ВО ВНЕШНЕМ МОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Классическое (нелинейное) уравнение движения для электрона в кулоновском поле атомного остова (с зарядом, равным единице) и во внешнем монохроматическом поле с амплитудой напряженности электрического поля F имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + F \cos(\omega t).$$

В поле, напряженность которого еще мала по сравнению с характерной атомной напряженностью в кулоновской задаче (она отличается от приведенной выше атомной напряженности для короткодействующего потенциала) для данного начального состояния, равной $F_0 E_0^2$ ($F_0 = 5.14 \cdot 10^9$ В/см), где E_0 — дрейфовая энергия начального состояния непрерывного спектра, в классическом движении электрона возникает динамический хаос [11] (не путать малую величину E_0 и большой потенциал ионизации основного состояния атома E_i).

Подчеркнем, что речь идет о линейно поляризованном поле. В туннельном режиме вероятность вы-

лета электрона с энергией E_0 (вдоль направления поляризации поля) равна [3]

$$w \propto \exp\left(-E_0 \frac{2\omega^2(2E_i)^{3/2}}{3F^3}\right).$$

Максимум энергетического спектра находится при энергии $E_0 = 0$. Средняя энергия вылетевшего электрона имеет оценку

$$E_0 \propto \frac{F^3}{\omega^2(2E_i)^{3/2}} = \frac{\omega}{\gamma^3}.$$

Эта величина меньше E_i при значениях параметра Келдыша γ порядка 1 и при не слишком малых значениях $\gamma < 1$, так как $\omega \ll E_i$. Однако если поле циркулярно поляризовано, то, действительно, при туннельной ионизации максимум в энергетическом спектре электронов находится при большой энергии [3]

$$U_p \approx E_i/2\gamma^2 \gg E_i.$$

В данной задаче удобно сначала рассматривать ридберговские состояния дискретного спектра, так как их структура близка к структуре низколежащих состояний непрерывного спектра. Действие электромагнитного поля приводит к диффузионной ионизации высоковозбужденных состояний атома, которая впервые была обнаружена в численных экспериментах [12]. Оценка порога стохастичности будет приведена ниже. Диффузионное возбуждение соответствует постепенному росту энергии классического электрона от начального ридберговского значения до значения, соответствующего ионизации. Характерное время такой диффузии велико по сравнению с периодом оборота ридберговского электрона вокруг атомного остова.

На рис. 1 и 2 приведено численное решение трехмерного уравнения Ньютона для движения электрона в дискретном спектре под действием кулоновского заряда $Z = 2$ (в системе единиц $m = e = 1$):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Z\mathbf{r}}{r^3} - F\mathbf{i}_x \cos(\omega t).$$

На рис. 1 амплитуда напряженности поля $F = 0.1$, на рис. 2 — $F = 4$. Частота $\omega = 1.82$. Начальные условия: $x(0) = -1$; $y(0) = z(0) = 0.1$; $\dot{x}(0) = 1$; $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ для обоих случаев. Показано движение заряда в плоскости xy , начиная с момента времени $t = 0$. В слабом поле траектория близка к эллиптической в соответствии с теоремой Колмогорова–Арнольда–Мозера — слабое поле не оказывает существенного воздействия на кулоновскую орбиту. При включении сильного поля (рис. 2) эллиптическая траектория превращается в хаотическую (и

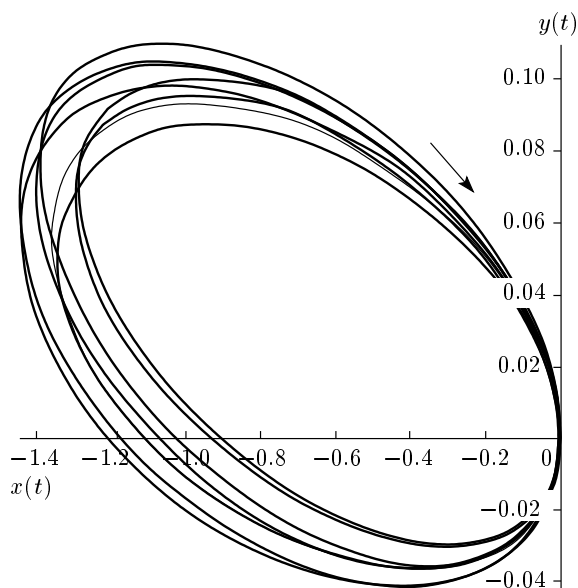


Рис. 1. Квази-эллиптическая траектория для движения электрона в кулоновском поле в слабом монохроматическом электрическом поле

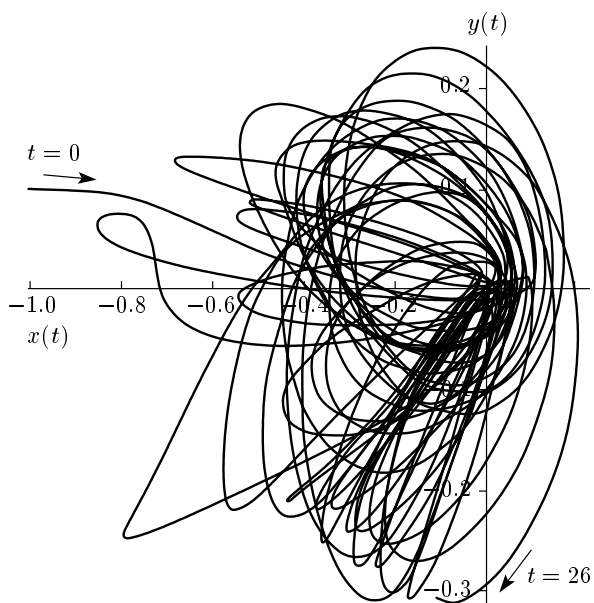


Рис. 2. Хаотическая инфинитная траектория для движения электрона в сильном монохроматическом электрическом поле, в которую переходит траектория, изображенная на рис. 1

инфинитную). На рис. 3 показана полная энергия электрона как функция времени для хаотической траектории, изображенной на рис. 2. Траектории электрона весьма чувствительны к ничтожно малому изменению начальных условий или параметров.

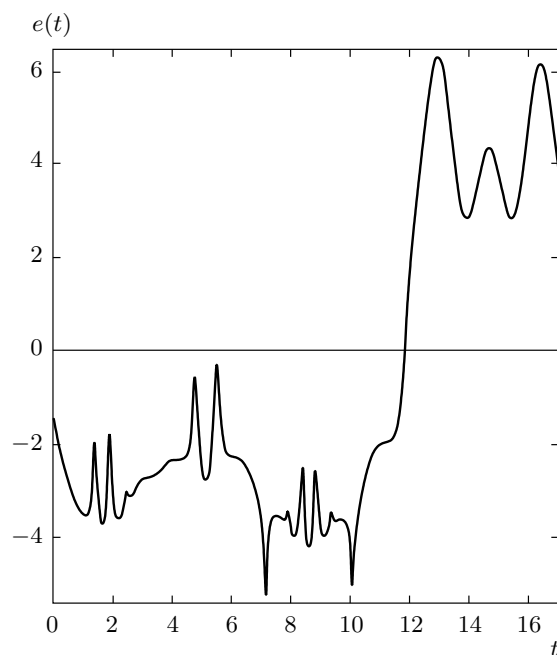


Рис. 3. Полная энергия электрона $e(t)$ в сильном монохроматическом электрическом поле для траектории, изображенной на рис. 2

На рис. 4 видно, как сильно изменяется хаотическая траектория электрона по сравнению с траекторией, показанной на рис. 2, при очень малом изменении амплитуды поля от значения 1.82 до значения 1.81.

Для возникновения стохастичности, приводящей к диффузионной ионизации, требуется выполнение критерия перекрытия нелинейных резонансов [11]. Это и приводит к существованию резкой границы для напряженности электрического поля. При меньших напряженностях энергия классического электрона колеблется в ограниченных пределах. Амплитуда этих колебаний уменьшается с уменьшением напряженности поля.

Следуя работе [13], сначала рассмотрим деформацию круговых орбит электрона во внешнем монохроматическом линейно поляризованном электромагнитном поле в условиях, когда вектор напряженности поля лежит в плоскости орбиты электрона (максимальный орбитальный момент). Классическая функция Гамильтона имеет вид

$$H = -\frac{1}{2n^2} + Fz \cos(\omega t), \quad z = r \cos \varphi, \quad r = n^2. \quad (6)$$

Здесь n и φ — канонически сопряженные переменные: классическое действие n и угол φ между радиусом-вектором электрона и направлением вектора напряженности поля.

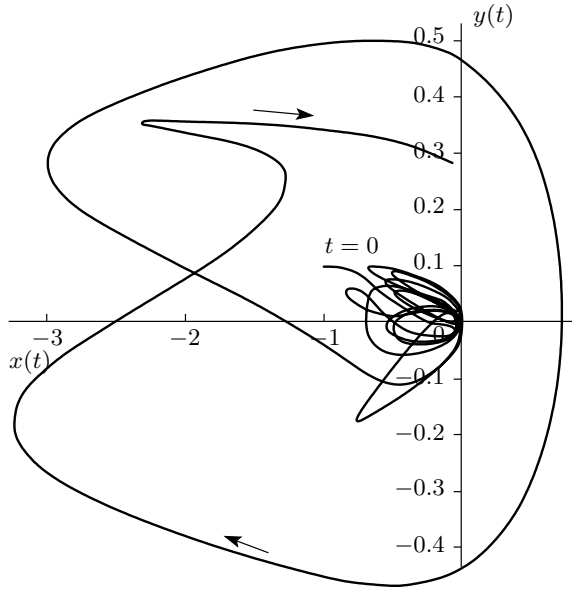


Рис. 4. Хаотическая траектория для движения электрона в сильном монохроматическом электрическом поле при изменении амплитуды поля от $F = 1.82$ до $F = 1.81$

Резонансно большое изменение главного квантового числа $\delta n = n - n_0$ (n_0 — главное квантовое число начального состояния ридберговского электрона) достигается в случае, когда частота поля ω равна частоте кеплерового вращения электрона n^{-3} . Введем новую фазу

$$\theta = \varphi - \omega t$$

и новое действие

$$I = n - \omega^{-1/3}.$$

Тогда гамильтониан (6) в окрестности резонанса приобретает вид (постоянное слагаемое опускаем):

$$H(I, \theta) = -\frac{3}{2}I^2\omega^{4/3} + \frac{F}{2\omega^{2/3}} \cos \theta. \quad (7)$$

При выводе этого выражения мы провели усреднение по быстрым осцилляциям с частотой порядка кеплеровской n^{-3} , т. е. пренебрегли быстроосциллирующими членами, линейными по действию I , а также быстроосциллирующим слагаемым, содержащим $\cos(\varphi + \omega t)$.

Гамильтониан (7) не зависит явно от времени, поэтому он сохраняется. Обозначим сохраняющуюся энергию через $(-\varepsilon)$. Из (7) получим

$$\frac{3}{2}I^2\omega^{4/3} - \frac{F}{2\omega^{2/3}} \cos \theta = \varepsilon. \quad (8)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением для математического маятника, совершающего большие колебания. Величина θ представляет собой угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Импульс маятника равен I . Масса маятника равна

$$M = \frac{1}{3\omega^{4/3}}.$$

Для малых (гармонических) колебаний маятника имеем

$$\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2.$$

Обозначим частоту малых колебаний через Ω . Из (7) следует, что

$$\frac{M\Omega^2}{2} = \frac{F\omega^{-2/3}}{4},$$

откуда

$$\Omega = \omega^{1/3} \sqrt{\frac{3F}{2}}. \quad (9)$$

Малые колебания около нижнего положения маятника реализуются, если в начальный момент $t = 0$ имеем

$$I_0 = n_0 - \omega^{-1/3} = 0, \quad \varphi = \theta = 0.$$

Верхнее положение маятника реализуется, если в начальный момент времени $t = 0$ имеем

$$I_0 = n_0 - \omega^{-1/3} = 0, \quad \varphi = \theta = \pi.$$

При этом колебания маятника переходят в его вращение (сепаратриса на фазовом портрете). Энергия маятника при этом равна

$$\varepsilon = \frac{F}{2\omega^{2/3}}.$$

Тогда из (8) получим

$$\frac{3}{2}I^2\omega^{4/3} = \frac{F}{\omega^{2/3}} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (10)$$

Отсюда находим классическое действие

$$I = \pm \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2F}{3}} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Из этого выражения, вспоминая определение действия I , определяем полуширину сепаратрисы по действию (т. е. по главному квантовому числу n) при изменении $0 < \theta < \pi$:

$$\delta n = \delta I = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2F}{3}} = 2M\Omega. \quad (11)$$

Из этого соотношения определяется полуширина резонанса по частоте нелинейных колебаний:

$$\delta\nu = \frac{\delta n}{M} = 2\Omega. \quad (12)$$

Как отмечалось выше, для применимости данного подхода она должна быть мала по сравнению с кеплеровой частотой, т. е.

$$\Omega \ll n_0^{-3} \approx \omega.$$

Это накладывает ограничение сверху на напряженность поля в соответствии с (9):

$$F \ll \omega^{4/3} \approx n_0^{-4}.$$

С другой стороны, должно выполняться условие применимости классической механики $\delta n \gg 1$. Тогда из (11) получим

$$F \gg \omega^2 \approx n_0^{-6}.$$

При выполнении указанных условий имеют место осцилляции движения электрона в пределах сепаратрисы нелинейного резонанса. Но, конечно, в данном случае диффузия электрона по нелинейным резонансам отсутствует, так как имеется только один нелинейный резонанс.

В приведенных выше рассуждениях мы пренебрегали изменением орбитального момента электрона, т. е. отклонением орбиты электрона от круговой. Это объясняется тем, что изменение орбитального момента $\delta l \propto F$ (оно может быть получено путем применения теории возмущений по F), в то время как изменение главного квантового числа согласно (11) гораздо больше, а именно $\delta n \propto \sqrt{F}$.

Далее рассмотрим совершенно противоположный случай сильно вытянутых орбит электрона (малый орбитальный момент). В целях простоты направим вектор напряженности поля вдоль орбиты электрона. Взаимодействие электрона с полем в функции Гамильтона (6) можно записать в виде разложения координаты z в ряд Фурье по фазе φ :

$$H = -\frac{1}{2n^2} + Fz(\varphi) \cos(\omega t) = -\frac{1}{2n^2} + F \cos(\omega t) \left\{ -\frac{3}{2}n^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cos(k\varphi) \right\}. \quad (13)$$

Здесь фурье-компонента координаты электрона z имеет известный вид [14] (она выражается через производную от функции Бесселя):

$$z_k = \frac{n^2}{k} J'_k(k). \quad (14)$$

Теперь резонансно большое изменение главного квантового числа $\delta n = n - n_0$ достигается в случае, когда частота поля ω кратна частоте кеплерового вращения электрона n^{-3} :

$$\omega = k/n^3.$$

Введем новую фазу

$$\theta = k\varphi - \omega t$$

и новое действие

$$I = n - (k/\omega)^{1/3}.$$

Оставляя в (13) только резонансное слагаемое $Fz_k \cos \theta$, получим гамильтониан маятника в виде, аналогичном выражению (7) для случая круговых орбит:

$$H(I, \theta) = -\frac{3}{2n^4} I^2 + Fz_k \cos \theta.$$

Отсюда для частоты малых колебаний маятника вместо (9) получим

$$\Omega_k = \frac{1}{n^2} \sqrt{3Fz_k} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{3FJ'_k(k)}{k}}. \quad (15)$$

По аналогии с (12) находим полуширину резонанса по частоте для k -го резонанса:

$$\delta\nu_k = 2\Omega_k.$$

Стохастическое движение электрона по ридберговским уровням начинается, когда возникает перекрытие k -го и $(k+1)$ -го резонансов (при фиксированной частоте ω). Степень перекрытия определяется параметром

$$s = \frac{\delta\nu_k + \delta\nu_{k+1}}{\omega/k - \omega/(k+1)} \quad (16)$$

(в знаменателе этого выражения стоит разность кеплеровых частот для соседних резонансов). Согласно численным расчетам [11] электрон начинает блуждать по резонансам при выполнении универсального критерия Чирикова

$$K = 2.5s^2 = \frac{F}{F_c} > 1. \quad (17)$$

Здесь F_c — критическое значение напряженности электрического поля для начала стохастизации движения (универсальный фактор 2.5 следует из численных расчетов).

Нас интересуют значения $k \gg 1$ (мы имеем в виду переход от ридберговских состояний к положительным значениям энергии конечного состояния в

континууме). Тогда из выражения (15), используя известное асимптотическое выражение Дебая для производной функции Бесселя $J'_k(k) \approx 0.4k^{-2/3}$, получим (с хорошей точностью уже при $k > 4$), что частота малых колебаний маятника равна

$$\Omega_k = \frac{k^{-5/6}}{n} \sqrt{1.2F}.$$

При этом из выражения (16) находим

$$s = \frac{4\Omega_k n^4}{3}.$$

Соответственно, из выражения (17) для критической напряженности электрического поля [13] получим

$$F_c = \frac{1}{48(\omega n^3)^{1/4} n^4}. \quad (18)$$

Таким образом, порог стохастичности для напряженности поля является достаточно низким по сравнению с характерным атомным полем.

Общий случай орбит с произвольной эллиптичностью рассматривается аналогичным образом. Однако перекрытие резонансов происходит только для сильно вытянутых орбит. Для орбит с меньшим эксцентриситетом фурье-компоненты координат убывают экспоненциально с увеличением k . Это следует из известных асимптотических свойств функций Бесселя $J_k(ke)$ и их производных с эксцентриситетом e , меньшим единицы (так называемые равномерные асимптотические разложения Дебая для функций Бесселя с большим индексом и большим аргументом). Экспоненциальное убывание отсутствует только для малых орбитальных квантовых чисел (сильно вытянутые орбиты), уже рассмотренных выше.

3. КОЭФФИЦИЕНТ ДИФFUЗИИ

Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче нет столкновений. Речь идет о диффузии, связанной с блужданием электрона по ридберговским состояниям вверх и вниз под действием лазерного поля. В классической механике она обусловлена не обычным, а динамическим хаосом. Согласно численным расчетам, энергия электрона как функция времени выглядит на рисунке как хаотическая величина.

Из результатов предыдущего раздела вытекает, что следует рассматривать только случай сильно вытянутых орбит (орбитальное квантовое число равно нулю). Резонансная часть соответствующего гамильтониана (13) имеет вид

$$H(n, \varphi) = -\frac{1}{2n^2} + F \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cos(\omega t - k\varphi).$$

Отсюда следует уравнение Гамильтона–Якоби

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = F \sum_{k=1}^{\infty} k z_k \sin(k\varphi - \omega t) = \\ &= F \sum_{k=1}^{\infty} k z_k \sin [k(\varphi - n^{-3}t) + (kn^{-3} - \omega)t]. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\omega_k = kn^{-3} - \omega, \quad \theta_k(t) = k(\varphi - n^{-3}t).$$

Тогда уравнение (19) переписывается в виде

$$\frac{dn}{dt} = F \sum_{k=1}^{\infty} k z_k \sin(\theta_k(t) + \omega_k t). \quad (20)$$

В резонансе величина ω_k является малой. Фаза $\theta_k(t)$ может считаться постоянной на характерном масштабе интегрирования, так как согласно второму уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial n} \approx \frac{1}{n^3}$$

основная зависимость от времени в фазе $\theta_k(t)$ выпадает и остается только медленная зависимость, связанная с зависящим от поля слагаемым. Поэтому интегрирование уравнения (20) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} n(t) - n_0 &= F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z_k}{\omega_k} [\cos \theta_k - \cos(\theta_k + \omega_k t)] = \\ &= 2F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z_k}{\omega_k} [\sin(\theta_k + \omega_k t/2) \sin(\omega_k t/2)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Возводя это выражение в квадрат, учтем, что фаза φ , а следовательно, и фазы θ_k являются случайными величинами. Поэтому при усреднении квадрат первого синуса в выражении (21) можно заменить на $1/2$, а произведения слагаемых с разными значениями k обратить в нуль. Заменяя сумму на интеграл в окрестности данного значения k и используя известное представление для δ -функции Дирака, получаем [13]

$$\begin{aligned} (n(t) - n_0)^2 &= 2F^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k z_k)^2 \frac{\sin^2(\omega_k t/2)}{\omega_k^2} = \\ &= \pi F^2 \int (k z_k)^2 \delta(\omega_k) dk t. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя

$$\omega_k = kn^{-1/3} - \omega \rightarrow 0$$

и интегрируя в области фиксированного резонанса с номером $k = \omega n^3$, находим, что имеет место нелинейная диффузия в окрестности значений $n = n(t)$:

$$(n(t) - n_0)^2 = \pi F^2 \int_0^t (kz_k)^2 n^3(t') dt'.$$

Здесь в правой части уравнения учтен нелинейный характер диффузии, т. е. в (22) заменено $t \rightarrow dt$.

Подставляя значение фурье-компоненты координаты из (14), получим

$$(n(t) - n_0)^2 = \pi F^2 \int_0^t (J'_k(k))^2 n^7(t') dt'.$$

Так как при $k \gg 1$ имеем $J'_k(k) \approx 0.4k^{-2/3}$, это выражение упрощается:

$$(n(t) - n_0)^2 = 0.5 F^2 \omega^{-4/3} \int_0^t n^3(t') dt'. \quad (23)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим дифференциальное уравнение

$$(n - n_0) \frac{dn}{dt} = \frac{F^2}{4\omega^{4/3}} n^3.$$

Его интегрирование приводит к выражению, определяющему время диффузии при заданном начальном главном квантовом числе n_0 :

$$1 - \frac{n_0}{n(t)} = \sqrt{\frac{n_0 F^2 t}{2\omega^{4/3}}}. \quad (24)$$

Величина $n(t)$ растет со временем. Время диффузии равно (при $n(t) \rightarrow \infty$)

$$\tau = \frac{2\omega^{4/3}}{n_0 F^2}.$$

Условие применимости $\tau \gg n_0^3$ приводит к неравенству

$$F \ll \frac{(\omega n_0^3)^{2/3}}{n_0^4},$$

которое не противоречит условию для критической напряженности (18) ввиду $k_0 = \omega n_0^3 > 1$. Конечно, время диффузии должно быть меньше длительности лазерного импульса. Более того, длительность лазерного импульса должна быть велика по сравнению с кеплеровским периодом обращения электрона. Например, при $n_0 = 10$ кеплеровский период составляет 25 фс.

Из выражения (24) для энергии ридберговского состояния как функции времени получаем

$$E_n(t) = -\frac{1}{2n^2(t)} = E_0 \left(1 + \frac{1}{2E_0} \sqrt{\frac{F^2 t}{2k_0 \omega^{1/3}}} \right)^2. \quad (25)$$

Здесь обозначено $E_0 = -1/2n_0^2$. При переходе к квазиклассическим состояниям непрерывного спектра следует заменить $n \rightarrow iK$, $n_0 \rightarrow iK_0$. Из выражения (24) окончательно получим выражение для классической энергии низколежащего состояния непрерывного спектра как функции времени:

$$E(t) = E_0 \left(1 - \frac{1}{2E_0} \sqrt{\frac{F^2 t}{2k_0 \omega^{1/3}}} \right)^2 > 0. \quad (26)$$

Теперь $E_0 = K_0^2/2 > 0$ — начальная энергия квазиклассического состояния непрерывного спектра.

4. ВЕРОЯТНОСТЬ ИОНИЗАЦИИ

В приближении Ландау–Дыхне из выражения (26) точку классического поворота в комплексной плоскости времени можно определить из условия

$$E(t_0) = -E_i,$$

т. е.

$$\frac{1}{2E_0} \sqrt{\frac{F^2 t_0}{2k_0 \omega^{1/3}}} = 1 - i \sqrt{\frac{E_i}{E_0}}.$$

Отсюда получим

$$t_0 = \frac{8k_0 \pi^{1/3} E_0^2}{F^2} \left(1 - 2i \sqrt{\frac{E_i}{E_0}} - \frac{E_i}{E_0} \right).$$

Согласно (1), находим вероятность ионизации:

$$w = \exp \left\{ -\frac{64}{3} \frac{k_0 \omega^{1/3} (E_0 E_i)^{3/2}}{F^2} \right\}.$$

Заменяя в этом соотношении

$$k_0 = \omega n_0^3 \rightarrow \frac{\omega}{(2E_0)^{3/2}},$$

окончательно получаем

$$w = \exp \left\{ -\frac{8\omega^{4/3} (2E_i)^{3/2}}{3F^2} \right\},$$

или, возвращаясь от атомных единиц к обычным:

$$w = \exp \left\{ -\frac{2(2mE_i)^{3/2}}{3\hbar e m F} \frac{4(m^2 e^2 \omega^4)^{1/3}}{eF} \right\}. \quad (27)$$

Первый фактор в показателе экспоненты (27) совпадает с показателем экспоненты (3), отвечающим туннельной ионизации в низкочастотном электрическом поле. Второй (классический) фактор

$$\frac{(m^2 e^2 \omega^4)^{1/3}}{eF} \gg 1$$

учитывает стохастический характер энергии электрона в континууме. Для энергии фотона 1.5 эВ это условие соответствует ограничению на напряженность поля $F \ll 1.1 \cdot 10^8$ В/см. Если выполняется противоположное условие низкой частоты (или вообще постоянного электрического поля)

$$\frac{(m^2 e^2 \omega^4)^{1/3}}{eF} < 1,$$

то динамический хаос отсутствует. Вместо нового результата (27) мы должны использовать хорошо известную формулу (3) для вероятности туннелирования или для повышения точности и определения предэкспоненты учитывать кулоновскую часть классического действия по теории возмущений по отношению к полевой части, как это делалось в работах [9, 10] и как это приведено во Введении к данной статье.

Что касается ограничения по полю снизу для применимости основного результата (27), то в соответствии с результатами, приведенными во Введении, имеем

$$\omega^{5/3} \ll eF \ll \omega^{4/3}.$$

Из (27) следует, что при увеличении частоты электромагнитного поля вероятность ионизации уменьшается. Если частота фиксируется, то, в соответствии с (27), при увеличении напряженности поля вероятность растет. При достижении полем значения $F \propto \omega^{4/3}$ вероятность ионизации начинает определяться известной туннельной формулой (3), т.е. степень ее роста замедляется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась туннельная ионизация атомов в переменном низкочастотном линейно поляризованном электромагнитном поле, когда кулоновское взаимодействие электрона с атомным остовом в конечном состоянии непрерывного спектра нельзя рассматривать по теории возмущений, как это делалось ранее. Напряженность поля предполагается малой по сравнению с атомной напряженностью. В этих условиях в конечном состоянии непрерывного

спектра возникает динамический хаос. Задача сведена к процессу нелинейной диффузии по энергии. Вычислена классическая энергия электрона в непрерывном спектре, учитывающая как кулоновское, так и электромагнитное поле. Эта энергия используется для вычисления вероятности ионизации из основного состояния атома в низколежащее состояние непрерывного спектра на основе приближения Ландау–Дыхне. Эта вероятность ионизации существенно зависит от частоты поля. При уменьшении частоты рассмотрен переход к хорошо известному пределу туннельной ионизации, вероятность которой уже не зависит от частоты поля.

Автор благодарит М. В. Федорова за обсуждение работы и ценные советы. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-02-00054).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, изд. 4-е, Наука, Москва (1989).
3. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением*, Физматлит, Москва (2001).
4. H. R. Reiss, Phys. Rev. A **22**, 1786 (1980).
5. И. Ю. Киян, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **96**, 1606 (1989).
6. N. B. Delone, S. P. Goreslavsky, and V. P. Krainov, J. Phys. B **16**, 2389 (1983).
7. M. V. Fedorov, *Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field*, World Scientific, Singapore (1997).
8. S. V. Popruzhenko, V. D. Mur, V. S. Popov, and D. Bauer, Phys. Rev. Lett. **101**, 193003 (2008).
9. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966).
10. М. В. Аммосов, Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **91**, 2008 (1986).
11. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
12. J. G. Leopold and I. C. Percival, Phys. Rev. Lett. **41**, 944 (1978).
13. Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, Д. Л. Шепелянский, УФН **140**, 355 (1983).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, изд. 7-е, Наука, Москва (1988).