

ОТ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ К БЕЗДИССИПАТИВНЫМ УДАРНЫМ ВОЛНАМ

Р. Н. Гарифуллин, Б. И. Сулейманов***

*Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра Российской академии наук
450008, Уфа, Россия*

Поступила в редакцию 28 мая 2009 г.

Изучается влияние малых дисперсионных добавок на трансформации слабых разрывов уравнений идеальной гидродинамики в сильные. Показано, что в окрестности точек трансформации это влияние описывается совместными решениями уравнения Кортевега де Вриза $u'_t + uu'_x + u'''_{xxx} = 0$ и неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка. Приведена асимптотика при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ этих совместных решений, которая в области незатухающих осцилляций задается квазипростыми решениями уравнений Уизема вида $r_i(t, x) = tl_i(x/t^2)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Слабые разрывы (разрывы производных) решений уравнений одномерного движения идеальной сжимаемой жидкости (ρ — плотность, v — скорость, $\alpha(\rho) = c^2(\rho)/\rho > 0$, $c(\rho) = (p'(\rho))^{1/2}$ — скорость звука, $p(\rho)$ — давление) [1]

$$\rho'_T + (v\rho)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + \alpha(\rho)\rho'_X = 0 \quad (1.1)$$

как и слабые разрывы более общих гиперболических систем, распространяясь вдоль характеристик, со временем в ситуации общего положения превращаются в сильные [2, разд. 5.5, 5.6].

В работах [3–5] начато исследование вопроса о влиянии малой диссипации на процессы трансформации слабых разрывов в сильные. В частности, в работе [3] (см. также работу [5]) показано, что для решения $U(T, X, \varepsilon)$ модельной начальной задачи

$$U'_T + g(U)U'_X = \varepsilon^2 U''_{XX}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1.2)$$

$$U(-1, X, \varepsilon) = \begin{cases} -X - aX^2, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

это влияние на трансформацию, которое при

$$g(0) = 0, \quad g'(U) > 0, \quad g'(0) = 1, \quad a > g''(0)/2$$

осуществляется при решении уравнения

$$U'_T + g(U)U'_X = 0 \quad (1.4)$$

в окрестности точки $T = 0, X = 0$, в главном по малому параметру ε порядке описывается специальным решением

$$\begin{aligned} \Gamma(t, x) &= -2[\ln \Lambda(t, x)]'_x, \\ \Lambda(t, x) &= \int_0^\infty \exp\left(\lambda x + t\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3}\right) d\lambda \end{aligned} \quad (1.5)$$

уравнения Бюргерса

$$\Gamma'_t + \Gamma\Gamma'_x = \Gamma''_{xx}. \quad (1.6)$$

При $t \rightarrow -\infty, x > 0$ асимптотика $\Gamma(t, x)$ задается решением $-2t - 2\sqrt{t^2 + x}$ уравнения Хопфа $(\Gamma^0)'_t + \Gamma^0(\Gamma^0)'_x = 0$, а при $t \rightarrow -\infty$ и $x < 0$ имеем $\Gamma(t, x) \approx 2/x$.

Данное специальное решение уравнения Бюргерса является главным членом полного асимптотического разложения по параметру ε функции $W(t, x, \varepsilon)$, которое справедливо при всех конечных t и x . С решением $U(T, X, \varepsilon)$ задачи Коши (1.2), (1.3) эта функция $W(t, x, \varepsilon)$ связана растяжениями

$$x = -\varepsilon^{-2/3}X, \quad t = \varepsilon^{-1/3}T,$$

$$U(T, X, \varepsilon) = -\varepsilon^{-2/3}W(t, x, \varepsilon).$$

*E-mail: rustem@matem.anrb.ru

**E-mail: bisul@mail.ru

В настоящей статье описываются универсальные специальные решения $u(t, x)$ уравнения Кортевега де Вриза (КдВ)

$$u'_t + uu'_x + u'''_{xxx} = 0, \quad (1.7)$$

которые в задачах с дисперсией играют роль, аналогичную роли функции (1.5) для задач с диссипацией. Эти специальные решения одновременно есть решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$\left(u''''_{xxxx} + \frac{5u''_{xx}u}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5u^3}{18} \right)' - \frac{2u + xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x)}{6} = 0 \quad (1.8)$$

или ОДУ

$$\left(u''''_{xxxx} + \frac{5u''_{xx}u}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5u^3}{18} \right)' + \frac{2u + xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x)}{6} = 0, \quad (1.9)$$

представляющих собой [6, Гл. 5, § 5.2] комбинации стационарных частей высшей (обобщенной) коммутативной симметрии уравнения КдВ

$$u'_{\tau_5} = \left(u''''_{xxxx} + \frac{5u''_{xx}u}{3} + \frac{5(u'_x)^2}{6} + \frac{5u^3}{18} \right)' \quad (1.10)$$

и его классической симметрии растяжения

$$u'_{\tau_r} = 2u + xu'_x - 3t(u'''_{xxx} + uu'_x). \quad (1.11)$$

Пояснение. Под симметрией эволюционного уравнения

$$w'_t = F(w, w_1, \dots, w_k) \quad (1.12)$$

(нижний индекс при функции w означает порядок производной этой функции по переменной x) понимается уравнение

$$w'_\tau = G(t, x, w, w_1, \dots, w_n), \quad (1.13)$$

правая часть которого удовлетворяет условию коммутирования $dF/d\tau = dG/dt$. При его выполнении общая теория гарантирует, что с эволюционным уравнением (1.12) (для рассматриваемых в настоящей статье уравнений Бюргерса и КдВ, см. работу [6]) совместны, в частности, стационарные части $G = 0$ симметрий (1.13). С уравнением (1.12) совместны симметрии, стационарные части которых есть любые конечные суммы его других стационарных симметрий. Под классической симметрией понимается случай функции, представимой в виде $G = H(t, x, F(U, U_1, \dots, U_k), U_x)$, а остальные симметрии системы (1.12) называются высшими.

2. ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ ОПРОКИДЫВАНИЯ

2.1. Анализ окрестности точки опрокидывания начнем со случая уравнения (1.4), которое представляет собой бездиссипативный (бездисперсионный) предел модельного уравнения (1.2) (соответственно, уравнения

$$U'_T + g(U)U'_X + \varepsilon^2 U'''_{XXX} = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (2.1)$$

моделирующего влияние малой дисперсии). По обе стороны от слабого разрыва компоненты $U_\pm(T, X)$ решения (1.4) определяются согласно формулам

$$X - (T - T_0)g(U_\pm) + F_\pm(U_\pm) = 0 \quad (2.2)$$

функциями F_+ и F_- . Слабый разрыв, выходящий в начальный момент времени $T = T_0$ из заданной точки $X = X_0$, распространяется вдоль характеристики уравнения (1.4), на которой решение (1.4) постоянно: $U = U(T_0, X_0) = U_*$.

Поэтому момент $T = T_*$ трансформации слабого разрыва решения (1.4) и соответствующая точка $X = X_*$ трансформации связаны соотношениями

$$X_* - (T_* - T_0)g(U_*) = -F_-(U_*) = -F_+(U_*), \quad (2.3)$$

$$(T_* - T_0)g'(U_*) = F'(U_*). \quad (2.4)$$

Под F здесь понимается та из функций F_-, F_+ , которая в точке трансформации претерпевает градиентную катастрофу (ГК). Из равенств (2.3), (2.4) вытекает, что для такой функции F в окрестности точки T_*, X_* справедливо соотношение

$$\begin{aligned} [X - X_* - g(U_*)(T - T_*)] - g'(U_*)(U - U_*)(T - T_*) + \\ + [F''(U_*) - (T_* - T_0)g''(U_*)] \times \\ \times (U - U_*)^2/2 + \dots = 0, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где $g'(U_*) \neq 0, F''(U_*) \neq (T_* - T_0)g''(U_*)$. (При рассмотрении ситуации общего положения на коэффициенты разложений функций $F_\mp(U)$ в ряды Тейлора в фиксированных точках $U = U_*$ ограничений в виде равенств накладывать нельзя.)

При этом вторая компонента решения (2.2) в точке $T = T_*, X = X_*$ остается гладкой. Действительно, момент ГК $T = T_*$ по заданной компоненте функции $F(U)$ в фиксированной точке $U = U_*$ находится из соотношения (2.4). Считать, что для другой компоненты F при тех же значениях U_* и T_* также выполняется равенство (2.4) в ситуации общего положения нельзя, и, значит, при $(X - X_*)^2 + (T - T_*)^2 \rightarrow 0$

вторая компонента решения (1.4) удовлетворяет соотношению

$$N(U - U_*) \approx [X - X_* - g(U_*)(T - T_*)] \quad (2.6)$$

с отличной от нуля постоянной $N = (T_* - T_0)g'(U_*) - F'(U_*)$.

2.2. Аналогичное заключение об асимптотике в окрестности типичной точки трансформации слабого разрыва в сильный справедливо и для решений гидродинамических уравнений (1.1). (В инвариантах Римана

$$\begin{aligned} r &= v + \int_{\rho_*}^{\rho} \left(\frac{\alpha(z)}{z} \right)^{1/2} dz, \\ l &= v - \int_{\rho_*}^{\rho} \left(\frac{\alpha(z)}{z} \right)^{1/2} dz. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ее характеристическая форма принимает вид [7, § 16]

$$(C_+) : \quad dx/dt = v + c, \quad r = \text{const};$$

$$(C_-) : \quad dx/dt = v - c, \quad l = \text{const},$$

где $c = \sqrt{\rho\alpha(\rho)}$ — скорость звука. Слабые разрывы системы (1.1) распространяются либо вдоль характеристики C_+ , либо вдоль характеристики C_- .

Сначала рассмотрим решения системы (1.1) с не равным тождественно нулю якобианом

$$I = \rho'_T v'_X - v'_T \rho'_X. \quad (2.8)$$

Ситуации, когда хотя бы по одну сторону от слабого разрыва такой якобиан тождественно равен нулю, рассматриваются ниже в разд. 2.7, 2.8. (Для приложений особенно интересен случай, когда в некоторой части плоскости X, T течение постоянно. Движение, описываемое решением (1.1) с $I \neq 0$, от области постоянства ρ и v отделено [1, § 104] простой волной, для которой $I \equiv 0$.)

При $I \neq 0$ уравнения (1.1) преобразованием годографа сводятся к линейным: рассмотрение T и X в качестве координат, а ρ и v в качестве независимых переменных дает [1, § 105], [8, Гл. 1, § 2] систему

$$X'_\rho = vT'_\rho - \alpha(\rho)T'_v, \quad X'_v = vT'_v - \rho T'_\rho. \quad (2.9)$$

Точке ГК решений системы (1.1) отвечает нуль якобиана

$$J = X'_\rho T'_v - X'_v T'_\rho = \rho(T'_\rho)^2 - \alpha(\rho)(T'_v)^2 \quad (2.10)$$

гладкого отображения $(\rho, v) \rightarrow (X, T)$. Учет этого факта в духе подхода работ [9, 10] позволяет ниже описать поведение v и ρ в окрестности такой точки.

2.3. Анализ решений системы (1.1) в окрестности точки ГК (T_*, X_*) (соответствующей точке (ρ_*, v_*) обращения якобиана J в нуль) опирается на ряды Тейлора гладких в точке $(\rho_* \neq 0, v_*)$ решений уравнения

$$\rho B''_{\rho\rho} + 2B'_\rho = \alpha(\rho)B''_{vv}, \quad (2.11)$$

к которому система (2.9) сводится [8, Гл. 1, § 2] при помощи соотношений

$$T = B'_v; \quad X = -B - \rho B'_\rho + v B'_v. \quad (2.12)$$

Замечание 1. Точка ГК находится на кривой постоянства одного из инвариантов Римана. Поэтому коэффициенты $b_{ij}(v_*, \rho_*)$ рядов Тейлора

$$B = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij}(v - v_*)^i (\rho - \rho_*)^j \quad (2.13)$$

всевозможных гладких в точках $(v = v_*, \rho = \rho_*)$ решений линейного уравнения (2.11) (для которых якобиан (2.10) в этих точках не обязательно есть нуль) фактически зависят лишь от одного параметра. И помимо ограничений на коэффициенты $b_{ij}(v_*, \rho_*)$ и на коэффициенты ряда Тейлора функции $\alpha(\rho)$ в точке $\rho = \rho_*$, следующих из уравнения (2.11), за счет параметров v_* и ρ_* возможно наложение на них еще только одного ограничения, выражаемого равенством. Такое ограничение используется ниже для обращения якобиана (2.10) в нуль.

Помня это замечание, в дальнейшем без ограничения общности считаем, что

$$X_* = T_* = v_* = 0 \quad (2.14)$$

(общий случай сводится к этому переходом в системе (1.1) от переменных X, T и v к переменным $X - X_* - v_*(T - T_*)$, $T - T_*$ и $v - v_*$). Также без ограничения общности считаем, что при $h = \rho - \rho_* \rightarrow 0$

$$\alpha(\rho) = 4 + \alpha_1 h + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k h^k. \quad (2.15)$$

Случай представимости этой функции рядом Тейлора (2.15) из общего случая получается после нормировки $\rho \rightarrow 4\rho/\alpha(\rho_*)$. Мы рассматриваем сжимаемую жидкость общего положения, в которой $\alpha_1 + 12/\rho_* \neq 0$.

Подстановка в уравнение (2.11) рядов Тейлора (2.13) и (2.15) с учетом соотношений (2.12) и равенств (2.14) дают следующие связи:

$$\begin{aligned} b_{00} &= -\rho_* b_{01}, \quad b_{10} = 0, \quad 4b_{20} = b_{01} + \rho_* b_{02}, \\ 4b_{21} + \alpha_1 b_{20} &= 3(b_{02} + \rho_* b_{03}), \quad (2.16) \\ 12b_{30} &= b_{11} + \rho_* b_{12}, \dots \end{aligned}$$

2.4. Обращение при $v = 0, h = 0$ якобиана (2.10) в нуль означает, что

$$4b_{20} = \pm \rho_*^{1/2} b_{11}. \quad (2.17)$$

Из соотношений (2.12) и (2.15)–(2.17) следует, что при $v^2 + h^2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} T &= b_{11} \left(h \pm \rho_*^{1/2} \frac{v}{2} \right) + (b_{11} + \rho_* b_{12}) \frac{v^2}{4} + \\ &+ 2b_{21}vh + b_{12}h^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} T_{ij}v^i h^j, \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= Tv - b_{11}(\rho_* v \pm 2\rho_*^{1/2}h) - \left(b_{21}\rho_* \pm \rho_*^{1/2} \frac{b_{11}}{4} \right) v^2 - \\ &- 2(b_{11} + \rho_* b_{12})vh - 3(b_{02} + \rho_* b_{03})h^2 + \\ &+ \sum_{i+j=3}^{\infty} X_{ij}v^i h^j. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Далее перейдем к переменным

$$Y = X - 2\rho_*^{1/2}T, \quad Z = X + 2\rho_*^{1/2}T \quad (2.20)$$

и неизвестным

$$R = v + 2\rho_*^{-1/2}h, \quad L = v - 2\rho_*^{-1/2}h, \quad (2.21)$$

в главном порядке совпадающим с инвариантами Римана (2.7):

$$\begin{aligned} r &= R + \frac{1}{128} \left(\alpha_1 - \frac{4}{\rho_*} \right) \rho_*^{1/2} (R - L)^2 + \\ &+ O(|R|^3 + |L|^3), \quad (2.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= L - \frac{1}{128} \left(\alpha_1 - \frac{4}{\rho_*} \right) \rho_*^{1/2} (R - L)^2 + \\ &+ O(|R|^3 + |L|^3). \quad (2.23) \end{aligned}$$

(Прямая $Y = 0$ ($Z = 0$) в точке $T = 0, X = 0$ касается характеристики C_+ (C_-), вдоль которой постоянен инвариант r (инвариант l .) В новых обозначениях соотношения (2.18), (2.19) выглядят так (A_{ij}, B_{ij} — постоянные):

$$\begin{aligned} Z - Y &= \rho_* b_{11} (R - L \pm (R + L)) + \\ &+ \frac{1}{4} \rho_*^{1/2} (b_{11} + \rho_* b_{12}) (R + L)^2 + \frac{1}{4} \rho_*^{3/2} b_{12} (R - L)^2 + \\ &+ \rho_* b_{21} (R^2 - L^2) + \sum_{i+j=3}^{\infty} A_{ij} R^i L^j, \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z + Y &= \frac{1}{4\rho_*^{1/2}} (Z - Y)(R + L) - \rho_* b_{11} (R + L \pm (R - L)) - \\ &- \frac{1}{2} (\rho_* b_{21} \pm \frac{1}{4} \rho_*^{1/2} b_{11}) (R + L)^2 - \\ &- \frac{\rho_*^{1/2}}{2} (b_{11} + \rho_* b_{12}) (R^2 - L^2) - \\ &- \frac{3}{8} \rho_* (b_{02} + \rho_* b_{03}) (R - L)^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} B_{ij} R^i L^j. \quad (2.25) \end{aligned}$$

2.5. Пусть в правой части соотношения (2.17) стоит знак минус. Тогда подстановка в правую часть (2.25) вместо $Z - Y$ правой части равенства (2.24), а вместо постоянной $3[b_{02} + \rho_* b_{03}]$ равной ей (см. (2.16), (2.17)) величины $4b_{21} - \alpha_1 \rho_*^{1/2} b_{11}/4$ и сложение результата с равенством (2.24) дает уравнение

$$\begin{aligned} Z = F(R, L) &= -2\rho_* b_{11} L - \\ &- \frac{\rho_*^{1/2}}{16} b_{11} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_1 \rho_* \right) R^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} a_{ij} R^i L^j + \\ &+ \frac{\rho_*^{1/2}}{8} b_{11} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha_1 \rho_* \right) RL + \\ &+ \left(\rho_*^{1/2} \frac{b_{11}}{64} (12 + \alpha_1 \rho_*) + \rho_*^{3/2} \frac{b_{12}}{2} - \rho_* b_{21} \right) L^2, \end{aligned}$$

где a_{ij} — постоянные, и в силу сказанного в Замечании 1 $b_{11} \neq 0$.

Так как $F_L(0, 0) = -2\rho_* b_{11} \neq 0$, то из уравнения $Z = F(R, L)$ следует, что

$$\begin{aligned} L &= -\frac{Z}{2\rho_* b_{11}} + \frac{(\rho_*)^{1/2}}{128} \left(\alpha_1 - \frac{4}{\rho_*} \right) \left(R^2 + \frac{ZR}{\rho_* b_{11}} \right) + \\ &+ \frac{\rho_*^{1/2} b_{11} (12 + \alpha_1 \rho_*) + 32\rho_*^{3/2} b_{12} - 64\rho_* b_{21}}{64(2\rho_* b_{11})^3} Z^2 + \\ &+ \sum_{i+j=3}^{\infty} c_{ij} Z^i R^j, \quad (2.26) \end{aligned}$$

где c_{ij} — постоянные. Подстановка этого ряда в (2.24) дает уравнение для R :

$$Y = \frac{(\rho_*)^{1/2}}{64} \left(\alpha_1 + \frac{12}{\rho_*} \right) ZR - \frac{1}{(\rho_*)^{3/2} b_{11} 64} \times \\ \times \left(1 - \frac{\alpha_1 \rho_*}{4} \right) Z^2 + g_{02} R^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} g_{ij} Z^i R^j, \quad (2.27)$$

постоянные g_{ij} из правой части которого задаются коэффициентами b_{ij} и ρ_* . Замена

$$R = C_0(Z)Z + R_0 + \sum_{j=2}^{\infty} C_j(Z)R_0^j, \quad (2.28)$$

коэффициенты $C_j(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ij} Z^i$ которой (C_{ij} — постоянные) определяются явно [11, Гл. 4, §§ 2.2–2.4, с. 45, 46, 52], сводит уравнение (2.27) к квадратному уравнению

$$\delta(Y, Z) + \sigma(Z)R_0 + kR_0^2 = 0, \quad (2.29)$$

где

$$\delta(Y, Z) = Y + \sum_{j=2}^{\infty} \delta_{0j} Z^j + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{1j} Y Z^j, \quad (2.30) \\ \sigma(Z) = -\frac{1}{64} \rho_*^{1/2} \left(\alpha_1 + \frac{12}{\rho_*} \right) Z + \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_j Z^j,$$

δ_{ij} , σ_j — постоянные, $k = -g_{02}$. Для корня $R_0(\delta, \sigma)$ точка ($Y = 0, Z = 0$) есть точка ГК. Поэтому в начале координат ГК имеет место и для функций $R(Y, Z)$ и $L(Y, Z)$, асимптотики которых при $Y^2 + Z^2 \rightarrow 0$ задаются формулами (2.28)–(2.30), (2.26).

Замечание 2. Согласно формуле (2.22) ГК в точке ($Y = 0, Z = 0$) имеет место и для инварианта Римана r . Но для инварианта l это уже не так — из соотношений (2.23), (2.26) и ограниченности при малых σ и δ дробей $\sigma/(3kR_0^2(\sigma, \delta) + \sigma)$ и $\delta/(3kR_0^2(\sigma, \delta) + \sigma)$ (в этом при $\sigma \neq 0$ можно убедиться путем перехода к автомодельным переменным $s = \delta|\sigma|^2$ и $R_0(\delta, \sigma) = |\sigma|g(s)$ первые производные l являются ограниченными при $\delta^2 + \sigma^2 \rightarrow 0$ величинами.

Сходным образом исследуется случай, когда в уравнении (2.17) стоит знак плюс, также соответствующий ГК лишь одного из инвариантов Римана — инварианта l . Далее рассматривается только случай слабого разрыва, на котором $r = r_* = \text{const}$.

2.6. Изложенное в разд. 2.2–2.5 касалось решения системы (1.1) по одну сторону от слабого разрыва. Коэффициенты ряда Тейлора (2.13), который согласно формуле (2.12) определяет компоненту решения (1.1) по другую сторону разрыва, обозначим b_{ij}^{sm} , а под b_{ij} будем понимать описанные ранее постоянные.

Из рассуждений, аналогичных приведенным в конце разд. 2.1, следует, что эта вторая компонента дифференцируема в точке $T = 0, X = 0$. Действительно, при фиксированных $\rho = \rho_*, v = v_*$ недопустимы никакие ограничения в виде равенств для b_{ij}^{sm} , кроме тех, что связаны с рассмотрением ситуации слабого разрыва. Из того, что рассматривается именно эта ситуация и из соотношений (2.12), (2.13) (2.16), (2.26) вытекает, что при $R = 0, Y = 0$ для главной части L отклонения не опрокидывающегося инварианта l

$$2\rho_* b_{11} = \rho_* b_{11}^{sm} - 4b_{20}^{sm} = - \left(\lim_{Z \rightarrow -0} L'_Y(0, Z) \right)^{-1} \neq 0.$$

При $Q_{\mp} = 4\rho_*^{1/2} b_{20}^{sm} \mp \rho_* b_{11}^{sm} \neq 0$ и $Y^2 + Z^2 \rightarrow 0$

$$L = \frac{Z(1 + O((Y^2 + Z^2)^{1/2}))}{Q_-} = \\ = -\frac{Z(1 + O((Y^2 + Z^2)^{1/2}))}{2\rho_* b_{11}}, \quad (2.31) \\ R = -\frac{Y}{Q_+}(1 + O((Y^2 + Z^2)^{1/2})).$$

2.7. Пусть теперь по одну сторону от слабого разрыва решение системы уравнений задается простой волной и ему соответствуют тождественное равенство якобиана (2.8) нулю и постоянство одного из инвариантов Римана (2.7) [1, §§ 101, 104], [7, Теорема 1, Гл. III, § 16], а по другую этот якобиан до момента ГК нулю не равен. По-прежнему, без существенного ограничения общности будем считать справедливыми соотношения (2.14), означающие, в частности, равенство нулю в точке ГК инвариантов Римана (2.7) и (2.15).

Допустим сначала, что ГК впервые в момент времени $T = T_*$ имеет место на линии слабого разрыва $r = 0$ для компоненты решения системы (1.1), не являющейся простой волной. При рассмотрении ситуации общего положения можно считать, что такая ГК происходит согласно анализу, проведенному в разд. 2.2–2.5. Из первой части формулы (2.31) и определения слабого разрыва следует, что тогда по другую сторону от слабого разрыва $l \neq 0$ и $r \equiv 0$. При этом из уравнения $l'_T + (v(l, 0) - c(l, 0))l'_X = 0$ для l -составляющей простой волны вытекает, что $l'_Y(0, 0) = 0$, а из свойств слабого разрыва можно (см. конец разд. 2.1) заключить, что для этой составляющей

$$l'_Z(0, 0) = -\frac{1}{2\rho_* b_{11}} \neq 0. \quad (2.32)$$

2.8. Рассмотрим противоположный вариант, когда на линии слабого разрыва ГК претерпевает простая волна, а компонента решения (1.1) с не равным тождественно нулю якобианом (2.8), определенная по другую сторону от слабого разрыва, остается дифференцируемой в точке ГК простой волны.

Для такой компоненты при стремлении к точке ГК из ее области определений справедливы оценки

$$\begin{aligned} r &= r_{10}Y + O(Y^2 + Z^2), \\ L &= l_{01}Z + O(Y^2 + Z^2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Они следуют из уравнений для соответствующих инвариантов Римана (1.1) [1, § 104], [7, § 16]

$$\begin{aligned} r'_T + (v + c(\rho))r'_X &= 0, \\ l'_T + (v - c(\rho))l'_X &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

после перехода в них к переменным (2.20).

Для удобства дальнейшего изложения допустим, что по другую сторону от слабого разрыва постоянен инвариант Римана l . (Если бы в разд. 2.2–2.6 был подробно описан случай ГК инварианта l , то удобнее было бы сейчас рассмотреть случай непостоянного l .) Тогда этот разрыв в окрестности точки ГК инварианта Римана r касается прямой $Y = 0$, а значит, в силу того, что производные вдоль линии слабого разрыва обоих инвариантов по обе его стороны совпадают, в оценках (2.33) справедливо равенство $l_{01} = 0$. Из первого из уравнений (2.34) и соотношения (2.15), следуя проведенным в разд. 2.1 рассуждениям, получаем, что при этом в ситуации общего положения асимптотика инварианта r в окрестности точки его ГК определяется соотношением ($\kappa_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} [X - 2(\rho_*)^{1/2}T] + \frac{\rho_*}{16} \left(\alpha_1 + \frac{12}{h_*} \right) Tr + \kappa_2 r^2 + \\ + \sum_{j=3}^{\infty} \kappa_j r^j = 0, \end{aligned}$$

или, после перехода в нем к переменным (2.20), соотношением

$$\begin{aligned} Y - \frac{(\rho_*)^{1/2}}{64} \left(\alpha_1 + \frac{12}{h_*} \right) (Z - Y)r + \kappa_2 r^2 + \\ + \sum_{j=3}^{\infty} \kappa_j r^j = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.9. Наконец, проанализируем ситуацию, характеризующую тождественным равенством нулю якобиана (2.8) по обе стороны от слабого разрыва. Если учесть изложенное выше в разд. 2.1, то ясно,

что не разобранным фактически остался лишь случай, когда по разные стороны от слабого разрыва решение (1.1) представлено разными типами простых волн.

Опять рассмотрим случай, когда на линии слабого разрыва ГК претерпевает инвариант r . Тогда в ситуации общего положения по другую сторону от слабого разрыва инвариант l гладкости в точке $Y = 0, Z = 0$ не теряет (см. рассуждения, проведенные в разд. 2.1), а значит, как и выше в разд. 2.8, для этой компоненты при $Y^2 + Z^2 \rightarrow 0$ справедливы соотношения

$$r \equiv 0, \quad l = l_{01}Z + O(Y^2 + Z^2) \quad (2.36)$$

с $l_{01} = 0$. По другую сторону слабого разрыва $l \equiv 0$, а поведение инварианта r при стремлении к точке ГК определяется соотношением (2.35).

3. ЭТАЛОННЫЕ ЗАДАЧИ

3.1. Начнем со случая модельного уравнения (2.1). Для того чтобы учесть влияние дисперсии в окрестности точки $T = T_*, X = X_*$, в соответствии с идеологией метода согласования [12] нужно осуществить масштабные преобразования, зависящие от параметра $\varepsilon \ll 1$. Из требования того, чтобы все выписанные члены соотношения (2.5) были в результате таких масштабных преобразований сбалансированы, вытекает, что они с необходимостью имеют вид

$$\begin{aligned} U - U_* &= \varepsilon^\gamma W, \\ [X - X_* - g(U_*)(T - T_*)] &= \varepsilon^{2\gamma} y, \\ g'(U_*)(T - T_*) &= \varepsilon^\gamma z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а требование, чтобы в результате преобразований вида (3.1) были сбалансированы все члены модельного уравнения (2.1), приводит к заключению, что

$$\gamma = 2/5. \quad (3.2)$$

Преобразования (3.1), (3.2) уравнение (2.1) переводят в уравнение, которое при $\varepsilon = 0$ переходит в уравнение КдВ

$$g'(U_*)[W'_z + WW'_y] + W'''_{yyy} = 0.$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющие условию согласования [12] с поведением при $X \rightarrow X_*$ и $T \rightarrow T_*$ решений (1.4) со слабым разрывом, описанных в разд. 2.1, при $z \rightarrow -\infty$ по одну сторону

от прямой $y = 0$ стремятся к нулю (согласно растяжениям независимых переменных (3.6), (3.2), правая часть соотношения (2.6) имеет порядок $O(\varepsilon^{4/5})$), а по другую в качестве главного члена асимптотики имеют корни $W_0(z, y)$ квадратного уравнения $y - zW_0 + (F''(U_*) - (T - T_*)g''(U_x))W_0^2 = 0$ (к нему при $\varepsilon = 0$ после преобразований (3.1), (3.2) сводится соотношение (2.5)).

3.2. Рассмотрим далее известное уравнение $-i\varepsilon G'_T = \varepsilon^2 G''_{XX} - K(|G|^2)G$, где $K'(\rho) = \alpha(\rho)/2$. Подстановка в него выражения $G = \rho \exp(i\varphi/\varepsilon)$ и последующее дифференцирование второго уравнения

$$\rho'_T + 2(\rho\varphi'_X)'_X = 0,$$

$$\varphi'_T + (\varphi'_X)^2 + K(\rho) = \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}}$$

по переменной X дает систему ($v = 2(\varphi)'_X$)

$$\rho'_T + (\rho v)'_X = 0,$$

$$v'_T + vv'_X + \alpha(\rho)\rho'_X = 2\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}} \right)'_X, \quad (3.3)$$

которая при $\varepsilon = 0$ вырождается в уравнения (1.1).

Замены (2.21) позволяют систему (3.3) переписать в виде уравнений

$$R'_T - L'_T + \frac{1}{2}(4\rho_*^{1/2} + R - L)(R'_X + L'_X) + \frac{1}{2}(R + L)(R'_X - L'_X) = 0,$$

$$R'_T + L'_T + \frac{1}{2}(R + L)(R'_X + L'_X) + \frac{1}{2}\rho_*^{1/2} \left(4 + \frac{\alpha_1\rho_*^{1/2}}{4}(R - L) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k \rho_*^{k/2} \left(\frac{R - L}{4} \right)^k \right) (R'_X - L'_X) = 4\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}} \right)'_X.$$

Их сложение и затем вычитание сводят эти уравнения к системе

$$R'_T + \left[2\rho_*^{1/2} + R \left(\frac{12 + \alpha_1\rho_*}{16} + \sum_{i+j=1}^{\infty} p_{ij}R^iL^j \right) + L \left(\frac{4 - \alpha_1\rho_*}{16} + \sum_{i+j=1}^{\infty} f_{ij}R^iL^j \right) \right] R'_X + \sum_{i+j=1}^{\infty} \gamma_{ij}R^iL^jL'_X = 2\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}} \right)'_X, \quad (3.4)$$

$$L'_T - \left[2\rho_*^{1/2} + \sum_{i+j=1}^{\infty} q_{ij}R^iL^j \right] L'_X - \left[R \left(\frac{4 - \alpha_1\rho_*}{16} + \sum_{i+j=1}^{\infty} \delta_{ij}R^iL^j \right) + L \left(-\frac{4 - \alpha_1\rho_*}{16} + \sum_{i+j=1}^{\infty} q_{ij}R^iL^j \right) \right] R'_X = 2\varepsilon^2 \left(\frac{(\sqrt{\rho})''_{XX}}{\sqrt{\rho}} \right)'_X, \quad (3.5)$$

в которой $\gamma_{ij}, \delta_{ij}, f_{ij}, p_{ij}$ и q_{ij} — постоянные.

Из соотношений (2.21), (2.26) и (2.28)–(2.30) следует, что главные члены асимптотик v и $\rho - \rho_*$ пропорциональны R . Поэтому для описания поведения решений системы (3.4), (3.5) в малой окрестности точки $(T = 0, X = 0)$ нужно осуществить масштабные преобразования

$$Y = \varepsilon^{2\gamma}\zeta, \quad Z = \varepsilon^\gamma\theta, \quad R = \varepsilon^\gamma A, \quad L = \varepsilon^\gamma \frac{\theta}{2\rho_*b_{11}} + \varepsilon^{2\gamma}C, \quad (3.6)$$

где γ — постоянная, а переменные Y и Z определены соотношениями (2.20). Вид данных преобразований диктуется требованием сбалансированности всех слагаемых в квадратном уравнении (2.29). А для сбалансированности нелинейности и дисперсии в системе, которая из системы (3.4), (3.5) возникает в результате растяжений (3.6), постоянную γ надо вновь определить равенством (3.2).

Переход к переменным (2.20), (2.21) и последующее осуществление растяжений (3.6), (3.2) сводят R и L к функциям $A(\theta, \zeta, \varepsilon)$, $C(\theta, \zeta, \varepsilon)$, которые при $\varepsilon = 0$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$A'_\theta + \frac{A'_\zeta}{64(\rho_*)^{1/2}} \left[\frac{(\alpha_1\rho_* - 4)\theta}{2\rho_*b_{11}} + (\alpha_1\rho_* + 12)A \right] + \frac{A''_{\zeta\zeta\zeta}}{16\rho_*} = 0,$$

$$C'_\zeta = \frac{\rho_*^{1/2}}{64} \left(\alpha_1 - \frac{4}{\rho_*} \right) \left(A + \frac{\theta}{2\rho_* b_{11}} \right) A'_\zeta - \frac{A'''_{\zeta\zeta\zeta}}{16\rho_*}.$$

Эта система дополняется условием срачивания с представимостью при $T < 0$ компонент решений системы (1.1) асимптотиками (2.26), (2.28) и (2.31):

а) при $\theta \rightarrow -\infty$ главный член $A_0(\theta, \zeta)$ асимптотики $A(\theta, \zeta)$, стремясь к нулю по одну сторону от прямой $Z = 0$, по другую задается корнем уравнения

$$\zeta + \frac{\theta^2}{256(\rho_*)^{3/2} b_{11}} (4 - \alpha_1 \rho_*) - \rho_*^{1/2} \frac{(\alpha_1 + 12/\rho_*) \theta A_0}{64} + k A_0^2 = 0;$$

б) главный член $C_0(\theta, \zeta)$ асимптотики функции $C(\theta, \zeta)$ при $\theta \rightarrow -\infty$ по обе стороны от прямой $Z = 0$ задается формулой

$$C_0 = \frac{\rho_*^{1/2}}{128} (\alpha_1 - 4/\rho_*) \left(A_0^2 + \frac{\theta A_0}{\rho_* b_{11}} \right) + \frac{\rho_*^{1/2} b_{11} (12 + \alpha_1 \rho_*) + 32 \rho_*^{3/2} b_{12} - 64 \rho_* b_{21}}{64 (2 \rho_* b_{11})^3} \theta^2;$$

с) эти же асимптотики должны быть справедливы и при $\theta + \zeta^2 \rightarrow \infty$ всюду, кроме области, в которой существенно нарождающееся влияние дисперсии.

3.3. Тривиальным преобразованием зависимых и независимых переменных задачи, описанные в двух предыдущих подразделах, сводятся к необходимости описания специальных решений уравнения КдВ (1.7), которые при $t \rightarrow -\infty$ по одну сторону от прямой $x = 0$ стремятся к нулю, а по другую ее сторону в качестве главных членов $u_0(t, x)$ асимптотики имеют корни одного из уравнений

$$x - t u_0 \pm u_0^2 = 0. \tag{3.7}$$

Корни квадратных уравнений (3.7) при $t < 0$ должны обращаться в нуль при $x = 0$. Поэтому возможны лишь два варианта:

1) корень уравнения (3.7) в случае знака минус имеет вид

$$u_0 = \frac{1}{2} \left(-t - \sqrt{t^2 + 4x} \right) \tag{3.8}$$

и задает асимптотику специального решения уравнения КдВ (1.7) при $x > 0$;

2) корень уравнения (3.7) в случае знака плюс имеет вид

$$u_0 = \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{t^2 - 4x} \right) \tag{3.9}$$

и задает асимптотику специального решения уравнения КдВ (1.7) при $x < 0$.

Корни (3.8), (3.9), удовлетворяющие уравнению Хопфа $u'_t + uu'_x = 0$ и задающие для фиксированных t асимптотики соответственно при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$ решений (1.7) (стремящихся к нулю на противоположной бесконечности) при $t > 0$ в нуль не обращаются. Это обстоятельство отражает тот факт, что посредством введенных в рассмотрение специальных решений уравнения КдВ описывается влияние малой дисперсии на трансформации слабых разрывов в сильные, происходящие при пренебрежении дисперсией.

3.4. С помощью масштабных преобразований (3.2), (3.6) показывается, что посредством данных специальных решений уравнения (1.7) такое влияние описывается в ситуации ГК, проанализированной в разд. 2.7. Таким образом, соотношения $r \equiv 0$, $l'_Y(0, 0) = 0$ и (2.32), справедливые для неопрокидывающейся компоненты решения системы (1.1), согласуются с этими масштабными преобразованиями.

Данные специальные решения уравнения КдВ возникают и при рассмотрении ситуаций ГК, проанализированных в разд. 2.8, 2.9: основная разница по сравнению с предыдущим анализом состоит в том, что вместо преобразования (3.6) согласно соотношениям (2.35), (2.36) и другим соображениям относительно поведения l и r , приведенным в разд. 2.8, 2.9, нужно сделать преобразование

$$Y = \epsilon^{2\gamma} \zeta, \quad Z = \epsilon^\gamma \theta, \quad R = \epsilon^\gamma K, \quad L = \epsilon^{2\gamma}, \quad \gamma = \frac{2}{5}.$$

После перехода в результате этих масштабных преобразований к пределу $\epsilon = 0$ возникают задачи описания решений $K(\theta, \zeta)$ уравнений КдВ, которые простыми заменами вновь сводятся к одной из двух задач из разд. 3.3.

3.5. Данные решения уравнения (1.7) имеют универсальное значение. Очевидно, например, что с их помощью в аналогичной ситуации описывается влияние малой дисперсии для уравнений мелкой воды (g — ускорение силы тяжести, A — значение потенциала скорости на дне, H — свободная граница)

$$H'_T + (H A'_X)'_X = \epsilon^2 (H^3 A''_{XX})''_{XX} + O(\epsilon^4),$$

$$A'_T + \frac{(A'_X)^2}{2} + gH = \frac{\epsilon^2}{2} \times \\ \times (A'''_{XXT} + A'_X A'''_{XX} - (A''_{XX})^2) + O(\epsilon^4).$$

В правых частях здесь подразумеваются полные ряды по параметру ϵ , которые выписываются согласно процедуре, приведенной, например, в работе [13,

Гл. 1, § 4]. То же самое относится и к другим подобным дисперсионным возмущениям (1.1).

3.6. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше и в работе [10], легко также показывается, что в случае решений малых диссипативных возмущений системы (1.1), типа уравнений движения вязкого баротропного газа

$$\rho'_T + (\rho v)'_X = 0,$$

$$v'_T + vv'_X + \alpha(\rho)\rho'_X = \varepsilon^4 \frac{v''_{XX}}{\rho} \quad (\varepsilon \ll 1),$$

влияние диссипации на процессы трансформации слабых ударных волн в сильные в главном порядке задаются двумя специальными решениями $\Gamma(t, x)$ уравнения Бюргерса (1.6), асимптотики которых при $t \rightarrow -\infty$, $x \neq 0$ в главном совпадают с описанными двумя типами асимптотик специальных решений уравнений КдВ (1.7). Ввиду инвариантности уравнения Бюргерса относительно замены $u(x) \rightarrow -u(-x)$ оба этих варианта эквивалентны друг другу и описываются посредством явно заданной специальной функции (1.5).

Для введенных в рассмотрение специальных решений уравнения КдВ ситуация иная: во-первых, они друг к другу не сводятся, а во-вторых, не допускают явного представления. Тем не менее они обладают многими общими со специальной функцией (1.5) свойствами. В частности, это касается инвариантности всех данных решений интегрируемых уравнений относительно высших симметрий, наличие которых выделяет интегрируемые уравнения среди прочих.

4. ЭТАЛОННЫЕ РЕШЕНИЯ И СИММЕТРИИ

4.1. Функция (1.5) и данные специальные решения уравнения КдВ (1.7) являются представителями класса специальных решений интегрируемых уравнений в частных производных [9, 10, 14–21], которые в нелинейных задачах имеют значение, аналогичное значению так называемых специальных функций волновых катастроф (СФВК) [22, Гл. 6, § 4] для линейных задач: их асимптотики задаются с помощью корней уравнений (3.7), описывающих простейшую типичную особенность гладких отображений — катастрофу складки [11].

Относительно таких аналогов СВФК была сформулирована [16, 17] гипотеза, согласно которой эти аналоги должны одновременно удовлетворять ОДУ. В работе [17] было уточнено, что данные ОДУ есть стационарные части симметрий интегрируемых

уравнений в частных производных, и были сформулированы правила, которые позволяют выбирать подходящие симметрии, исходя из соответствующей особенности теории катастроф. (Возможно, эта гипотеза является слишком смелой. Но пока она подтверждается серией специальных решений интегрируемых уравнений Бюргерса, КдВ и нелинейного уравнения Шредингера, имеющих самый разный физический смысл [9, 10, 18, 19].)

Решение (1.5) уравнения (1.6) одновременно удовлетворяет ОДУ

$$\left(\Gamma''_{xx} - \frac{3}{2} \Gamma \Gamma'_x + \frac{\Gamma^3}{4} \right) - 2t \left(\Gamma'_x - \frac{\Gamma^2}{2} \right) - x\Gamma = -2,$$

продифференцированная форма которого есть стационарная часть симметрии

$$\Gamma'_\mu = \left(\Gamma''_{xx} - \frac{3}{2} \Gamma \Gamma'_x + \frac{\Gamma^3}{4} \right)'_x - 2t(\Gamma''_{xx} - \Gamma \Gamma'_x) - x\Gamma'_x - \Gamma \quad (4.1)$$

уравнения (1.6) — суммы стационарных частей классической симметрии растяжения $2t\Gamma'_t + x\Gamma'_x + \Gamma = 0$ уравнения (1.6) и стационарной части его не зависящей от x и t высшей симметрии [6, Гл. 5, § 1] $(\Gamma''_{xx} - 3\Gamma \Gamma'_x/2 + \Gamma^3/4)'_x = 0$. Симметрия (4.1) соответствует [23] упомянутым общим правилам из [17].

4.2. Оказывается, что на примере нелинейных СВФК складки, представляющих собой описанные в разд. 3.3 решения уравнения (1.7), эти общие правила из [17] также подтверждаются. Действительно, применяя эти правила к решениям (1.7), соответствующим описываемой уравнением (3.7) катастрофе складки, мы делаем следующее (ниже контур C считается таким, что последующие интегрирования по частям не дают вкладов от внеинтегральных членов): берем интеграл

$$I = \int_S \lambda^r \exp(x\lambda - t\lambda^3 + c\lambda^5) d\lambda, \quad (4.2)$$

который удовлетворяет линейной части $I'_t + I''_{xxx} = 0$ уравнения КдВ (1.7) и который при больших $|x|$ и $|t|$, согласно методу стационарной фазы [22], описывается в терминах корней λ^2 квадратного уравнения складки $x - 3t\lambda^2 = -5c\lambda^4$. Из интеграла (4.2) получаем ОДУ:

$$5cI''''_{xxxx} - 3tI'''_{xxx} + xI'_x + (1+r)I = 0, \quad (4.3)$$

которому удовлетворяет интеграл (4.2). Исходя из вида известных симметрий уравнения (1.7) [6, Гл. 5,

§ 1], постоянную r полагаем теперь равной единице, а ОДУ (4.3) сопоставляем нелинейное ОДУ

$$5c \left(u_{xxxx}''' + \frac{5u_{xx}''u}{3} + \frac{5(u_x')^2}{6} + \frac{5u^3}{18} \right)' + 2u + xu_x' - 3t(u_{xxx}''' + uu_x') = 0. \quad (4.4)$$

При этом производной I_{xxxx}'''' сопоставляется его нелинейное «обобщение» — стационарная часть высшей симметрии (1.10), а оставшейся комбинации членов из левой части уравнения (4.3) сопоставляется ее нелинейное «обобщение» — стационарная часть симметрии растяжения (1.11).

Наконец, требуя, чтобы бездисперсионным пределам

$$5cu^2u_x'/6 + 2u + xu_x' = 3tuu_x' \quad (4.5)$$

ОДУ (4.4) удовлетворяли корни квадратных уравнений (3.7) и чтобы $c = \pm 6/5$, получаем в итоге ОДУ (1.8) и (1.9).

5. СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1.8)

5.1. Из вида бездисперсионного предела (4.5) ОДУ (1.8) следует, что для интересующего нас совместного решения этого ОДУ с уравнением (1.7) реализуется вариант 1) описанной в разд. 3.3 альтернативы из двух возможных асимптотик. На рис. 1 и 2 приводятся результаты численного моделирования поведения этого совместного решения при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow \infty$. При этом требовалось, чтобы при $x \rightarrow -\infty$ как u , так и u_x' стремились к нулю и чтобы при $x \rightarrow \infty$ моделируемая специальная функция имела один раз дифференцируемую по x асимптотику, определяемую корнем (3.8).

5.2. Из результатов численного моделирования однозначно следует вывод, что асимптотика при $x \rightarrow -\infty$ решения краевой задачи, описанной в предыдущем разделе, в главном порядке определяется соотношением

$$u(t, x) \approx \frac{3}{2x^2}. \quad (5.1)$$

Этот факт аналогичен тому обстоятельству, что функция (1.5) при $x \rightarrow -\infty$ имеет в качестве главного члена асимптотики дробь $2/x$.

На рис. 2 видно, что это же соотношение (5.1) задает асимптотику при $t \rightarrow -\infty, s < 0$ и функции

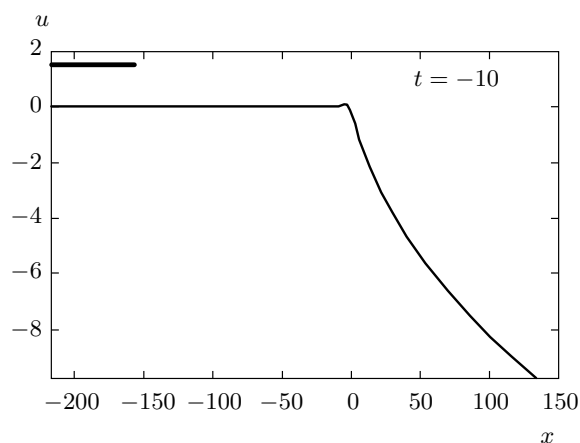


Рис. 1. Совместное решение уравнения КдВ (1.7) и ОДУ (1.8) при $t = -10$ и его произведение на x^2 при $x < -150$

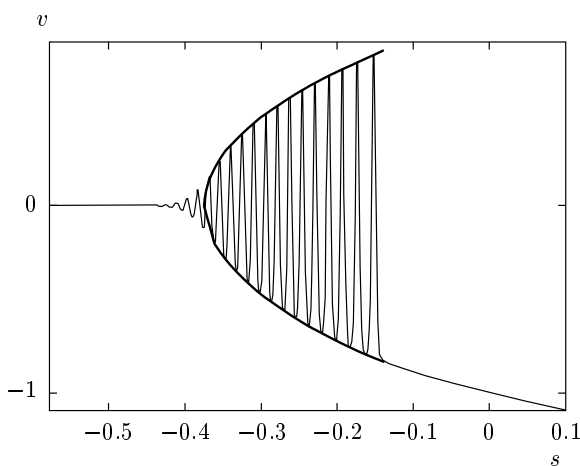


Рис. 2. Совместное решение уравнения КдВ (1.7) и ОДУ (1.8) в переменных s, v при $t = 15$. Огибающая: функции $\pm(l_2(s) - l_1(s))$, определенные согласно (5.8)

$v(s, t)$, которая с моделируемой специальной функцией связана заменой

$$u(t, x) = tv(t, s), \quad s = x/t^2 < 0, \quad (5.2)$$

а при $x > 0$ и $t \ll -1$ имеем $u(t, x) \approx -(t + \sqrt{t^2 + 4x})/2$. Видно, что никаких изломов в точке $s = 0$ эта функция $v(t, s)$ не имеет. Это объясняется тем, что асимптотика при $t \rightarrow -\infty$ анализируемого в данном разделе решения сшивается с решениями уравнений идеальной гидродинамики лишь вне малых окрестностей слабых разрывов последних. В окрестностях же этих разрывов надо уже учитывать

сглаживающее влияние малой дисперсии. (Для широкого ряда случаев, относящихся к ситуации постоянства решений уравнений идеальной гидродинамики по одну сторону от слабых разрывов, существование решений уравнения КдВ, которые до момента трансформации осуществляют подобное сглаживание слабых разрывов, математически строго доказано Фаминским [24].)

5.3. Правильное поведение рассматриваемого совместного решения уравнений (1.7) и (1.8) при $t \rightarrow -\infty$ в окрестности точки $x = 0$ задается автомодельным решением уравнения КдВ (1.7) вида

$$u(t, x) = t^{-2/3}G(\nu) = t^{-2/3}G(xt^{-1/3}). \quad (5.3)$$

Здесь функция $G(\nu)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ третьего порядка

$$3G'''_{\nu\nu\nu} + 3GG'_{\nu} = 2G + \nu G'_{\nu}, \quad (5.4)$$

стремится к ν при $\nu \rightarrow -\infty$ и стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$. Отметим, что согласно Гуревичу и Питаевскому [25–28, § 4, Гл. V] это же автомодельное решение описывает сглаживающее влияние дисперсии на один из двух слабых разрывов (в терминологии работы [28, § 4, Гл. V] — разрыв типа В), возникающих при эволюции в рамках уравнения КдВ волны разрежения, порожденной конечным скачком в начальном условии.

Оказывается, формулой $G(\nu) = \nu - q^2(\nu)$ это автомодельное решение выражается через сепаратрисное решение Хастингса – Маклеода [29] второго уравнения Пенлеве $q''_{\nu\nu} = (q^3 - \nu q)/6$, которое экспоненциальным образом стремится к нулю при $\nu \rightarrow -\infty$, а при $\nu \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение $q = \nu^{1/2} - 3/4\nu^{-5/2} + \dots$. Поэтому при $\nu \rightarrow \infty$ функция $G(\nu)$ в качестве главного члена асимптотики имеет дробь $3/(2\nu^2)$, что согласуется с результатами численных экспериментов, представленных на рис. 1.

5.3. На рис. 2 хорошо видно, что при $t \rightarrow \infty$ совместное решение уравнений КдВ (1.7) и (1.8) имеет область незатухающих колебаний, которая практически симметрична относительно прямой $v = 0$ и правее которой моделируемая функция $v(s, t)$ в главном описывается функцией $-(1 + \sqrt{1 + 4s})/2$. Эта зарождающаяся структура является представителем бездиссипативных ударных волн (БУВ), для описания которых вслед за работой [25] часто с успехом применяются решения уравнений Уизема [30], получающихся усреднением по периоду функции

$$V_0 = 2a \operatorname{dn}^2[(a/6)^{1/2}\xi, k] + \gamma,$$

где $\xi = x - \varphi t$, $k^2 = [(r_2 - r_1)/(r_3 - r_1)]$ — квадрат модуля эллиптической функции Якоби dn , $a = r_3 - r_1$, $\gamma = r_1 + r_2 - r_3$, $\varphi = (r_1 + r_2 + r_3)/3$ и $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

Возникающие в результате уравнения Уизема для функции $r_j(t, x)$

$$(r_j)'_t + P_j(r_j)'_x = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

определяются величинами

$$P_1 = P_1(r_1, r_2, r_3) = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} + \frac{2(r_1 - r_2)}{3(1 - \mu)},$$

$$P_2 = P_2(r_1, r_2, r_3) = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - \frac{2(r_1 - r_2)(1 - k^2)}{3(1 - \mu - k^2)},$$

$$P_3 = P_3(r_1, r_2, r_3) = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} + \frac{2(r_3 - r_2)}{3\mu},$$

в которых $\mu = E/K$ — отношение полных эллиптических интегралов $K = K(k)$, $E = E(k)$ первого и второго рода.

Согласно [31] усредненным следствием ОДУ (1.8) является система

$$R_j(r_j)'_x = 3[2r_j + x(r_j)'_x + 3t(r_j)'_t], \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

где

$$R_1(r_1, r_2, r_3) = 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + 4 \frac{r_1 - r_2}{1 - \mu} (3r_1 + r_2 + r_3),$$

$$R_2(r_1, r_2, r_3) = 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + 4 \frac{(r_2 - r_1)(1 - k^2)}{1 - \mu - k^2} (3r_2 + r_1 + r_3),$$

$$R_3(r_1, r_2, r_3) = 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + 4 \frac{r_3 - r_2}{\mu} (3r_3 + r_1 + r_2).$$

Из автомодельного характера корня (3.8) следует, что сшиваемые с ним при $\mu = 1$ (на переднем фронте БУВ) совместные решения систем (5.5) и (5.6) также будут автомодельны

$$r_j = t l_j(s), \quad s = x/t^2. \quad (5.7)$$

Кроме того, из условия сшивки на заднем фронте (т. е. при $\mu = 0$) с нулем вытекает (согласно работам [32, 33]), что нам нужны так называемые квазипростые совместные решения (5.5) и (5.6), выделяемые редукцией $r_3 = 0$. Утверждение о квазипростом характере возникающей БУВ полностью подтверждает рис. 2. В самом деле, максимум уиземовских колебаний задается величиной $r_3 + r_2 - r_1$, а их

минимум — величиной $r_3 + r_1 - r_2$. Из упоминавшегося выше симметричного характера колебаний $v(s, t)$ относительно оси $v = 0$, наблюдаемого на рис. 2, немедленно напрашивается вывод о справедливости равенства $r_3 = 0$.

При такой редукции автомодельная подстановка (5.7) системы (5.5) и (5.6) переводит в две совместных между собой системы ОДУ, исключение из которых производных $(l_j)'_s$ дает следующую систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} s - \frac{3(l_1^2 + l_2^2) + 2l_1l_2}{15} - \frac{l_1 + l_2}{3} &= \\ &= \frac{2(l_1 - l_2)}{3(1 - \mu)} \left[1 + \frac{2(3l_1 + l_2)}{5} \right] = \\ &= \frac{2(l_2 - l_1)(1 - k^2)}{3(1 - \mu - k^2)} \left[1 + \frac{2(3l_2 + l_1)}{5} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

По решению этой системы согласно формулам $v_{max} = -v_{min} = l_1 - l_2$ построены кривые на рис. 2, изображающие границы зоны узеловских колебаний.

5.4. С помощью формул (5.8) легко находятся положение заднего $s = s_b = -3/8$ и переднего $s = s_f = -5/36$ фронтов этой зоны.

Начнем с переднего фронта. Прямо из явных формул (5.8), соотношения $k^2 = (l_1 - l_2)/l_1$ и известных разложений полных эллиптических интегралов $E(k)$ и $K(k)$ при $k \rightarrow 1$ следует, что значение $l_f = l_1(s_f) = -1/2 - \sqrt{1/4 + s_f}$ удовлетворяет соотношению $l_f = -5/6$. Приведенное выше утверждение о законе движения переднего фронта теперь немедленно вытекает из формулы $s_f = l_f^2 + l_f$.

Из обычных соображений, изложенных еще в работе [25], следует, что для рассматриваемых автомодельных решений уравнений (5.5) имеет место связь

$$\begin{aligned} dx_b/dt = 2ts_b = tP_1(l_b, l_b, 0) &= \\ &= tP_2(l_b, l_b, 0) = 2tl_b \end{aligned} \quad (5.9)$$

положения заднего фронта $x_b(t) = s_b t^2$ с общим значением $l_b = l_1(s_b) = l_2(s_b)$ функций $l_1(s)$ и $l_2(s)$ в точке $s = s_b$. С другой стороны, явные формулы (5.8) позволяют легко вывести, что $s_b = 2l_b + 8l_b^2/3$. С учетом соотношения (5.9) и очевидного неравенства $s_b < s_f$ получаем, что $s_b = -3/8$.

Результаты численного моделирования, приводимые на рис. 2, согласуются с точными вычислениями данного раздела.

5.5. Замены (5.2) уравнение КдВ (1.7) и ОДУ (1.8) переводят в уравнение

$$tv'_t + \frac{v''''_{sss}}{t^5} + (v - 2s)v'_s + v = 0 \quad (5.10)$$

и, соответственно, ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{v''''_{sssss}}{t^{10}} + \frac{5v''''_{sss}v}{3t^5} + \frac{10v''_{ss}v'_s}{3t^5} + \frac{v''''_{sss}}{2t^5} + \\ + \frac{(5v^2 + 3v - s)v'_s}{6} - \frac{v}{3} = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Линеаризация второго из этих уравнений на нулевом фоне дает сингулярно возмущенное линейное ОДУ $t^{-10}q''''''_{sssss} + t^{-5}q''''_{sss}/2 - sq'_s/6 = q/3$, асимптотика которого при $t \rightarrow \infty$ определяется с помощью экспонент вида

$$\exp(t^{5/2}\Phi(s)), \quad (5.12)$$

$(\Phi'_s)^2 = -1/4 \pm \sqrt{s/6 + 1/16}$. Из последнего выражения следует, что при переходе слева направо через точку $s = s_b = -3/8$ функции Φ'_s становятся чисто мнимыми.

Таким образом, формирование данной БУВ в окрестности точки заднего фронта сродни мягкому режиму возникновения автоколебаний в результате типичной бифуркации Хопфа, когда амплитуда зарождающейся структуры «пропорциональна квадратному корню из закритичности» [34, § 6] (в согласии с справедливостью при $s \rightarrow s_b$ разложений

$$\begin{aligned} l_1(s) &= -\frac{3}{8} - \frac{3}{\sqrt{2}}(s - s_b)^{1/2} + \dots, \\ l_2(s) &= -\frac{3}{8} + \frac{3}{\sqrt{2}}(s - s_b)^{1/2} + \dots, \end{aligned}$$

следующих из явных формул (5.8)). Гладкий анзац, описывающий этот мягкий режим формирования БУВ в окрестности заднего фронта, получается согласно построению, приведенному в работе [35]. Данный анзац определяется посредством того самого сепаратрисного решения второго уравнения Пенлеве из статьи Хастингса и Маклеода [29], о котором шла речь в конце разд. 5.2.

Закончим этот раздел замечанием, что рассмотрение экспонент вида (5.12), задающих асимптотики при $t \rightarrow \infty$ совместных решений линеаризаций уравнений (5.10) и (5.11) на фоне функции $-1/2 - \sqrt{1/4 + s_f}$, выделяет среди прочих точку $s = s_f = -5/36$: именно при переходе через эту точку происходит смена знака вещественной функции $\Phi(s)$.

6. СПЕЦИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1.9)

6.1. Описываемые ниже автомодельные решения уравнений Уизема уже рассматривались Гуревичем,

Крыловым и Мазуром [33] и чуть позже Кудашевым и Шариповым [36]. Эти решения задаются формулами

$$s + \frac{3(l_2^2 + l_3^2) + 2l_2l_3}{15} - \frac{l_1 + l_2}{3} = \frac{2l_2(1 - k^2)}{3(1 - \mu - k^2)} \left[1 - \frac{2(3l_2 + l_3)}{5} \right] = \frac{2(l_3 - l_2)}{3\mu} \left[1 - \frac{2(3l_3 + l_2)}{5} \right], \quad (6.1)$$

которые, заметим, из усредненных следствий уравнений (1.7) и (1.9) выводятся так же просто, как выше были выведены формулы (5.8). (Квазипростая редукция $l_1 = 0$ согласно высказанным в работах [32, 33] общим соображениям, накладываемся исходя из требования сшивки на переднем фронте с нулем.) Из этих формул легко находим значения $s_b = -3/4$ и $s_f = 5/24$ для положений заднего и, соответственно, переднего из фронтов БУВ, описываемой формулой (6.1). Первая из этих формул была указана в работе [33], а вторая — в работе [36]. В точке $s = s_b$ происходит сшивка БУВ с корнем $1/2 + \sqrt{1/4 - s}$, а в точке $s = s_f$ она сшивается с нулем.

6.2. Несмотря на качественное сходство поведения анализируемых в предыдущем и этом разделе совместных решений уравнений КдВ (1.7) с ОДУ (1.8) и (1.9), в их свойствах имеются и заметные различия. Например, в окрестности заднего фронта $s = s_b = -3/4$ соответствующие квазипростые решения уравнения Уизема, заданные согласно формулам (6.1), разлагаются в ряды

$$l_2(s) = \frac{s - s_b}{3} + \dots, \quad l_3(s) = \frac{3}{2} - \frac{s - s_b}{2} + \dots$$

Это означает, что как и в случае рассмотренной в работе [25] задачи о распаде начального разрыва, амплитуда колебаний возникающей БУВ на ее заднем фронте обращается в нуль по линейному закону.

Различие проявляется, в частности, и в асимптотиках при $t \rightarrow -\infty$ в окрестности прямой $x = 0$. Главный член такой асимптотики изучаемого здесь специального решения в главном порядке также задается автомодельным решением уравнения КдВ (1.7) вида (5.3), где функция $G(\nu)$ удовлетворяет ОДУ третьего порядка (5.4). Только в отличие от ситуации, рассмотренной в разд. 5.3, эта функция стремится к ν при $\nu \rightarrow \infty$ и стремится к нулю при $\nu \rightarrow -\infty$. Это решение также рассматривалось Гуревичем и Питаевским. Данное автомодельное решение было использовано ими для учета влияния дисперсии на второй из слабых разрывов

(в терминологии работы [28, § 4, Гл. V] — типа А), возникающих при эволюции в рамках модели КдВ волны разрежения, которая порождена скачком в начальном условии. На основании численных экспериментов Гуревич и Питаевский сделали вывод, что при $\nu \rightarrow -\infty$ данное решение $G(\nu)$ стремится к нулю монотонно и что, убывая при $\nu \rightarrow \infty$, разность $G(\nu) - \nu$ быстро осциллирует, так что $G'(\nu) - 1$ к нулю уже не стремится.

Такое решение ОДУ (5.4) действительно существует. Формулой $G(\nu) = \nu + g^2(\nu)$ это автомодельное решение выражается через гладкое вырожденное решение второго уравнения Пенлеве $g''_{\nu\nu} = -(g^3 + \nu g)/6$, исследованное Белоградским [37]. Из выписанных в работе [37] формул вытекает, что при $\nu \rightarrow -\infty$ справедлива асимптотика $G(\nu) \approx 3/(2\nu^2)$ и что при $\nu \rightarrow \infty$

$$G(\nu) - \nu = g^2(\nu) \approx \frac{2\sqrt{6} \ln 2}{\pi\sqrt{\nu}} \times \sin^2 \left(\frac{2\nu^{3/2}}{3\sqrt{6}} + \frac{\ln 2 \ln(\nu^3/6)}{4\pi} + \frac{3(\ln 2)^2}{2\pi} - \frac{\pi}{4} - \arg \left(\Gamma \left(\frac{i \ln 2}{2\pi} \right) \right) \right), \quad (6.2)$$

где Γ — стандартная гамма-функция Эйлера.

С помощью стандартной процедуры уничтожения секулярных членов легко выводится, что при $t \rightarrow -\infty$ и $x < 0$ асимптотика совместного решения ОДУ (1.9) и уравнения КдВ (1.7), согласующаяся с асимптотикой (6.2), имеет вид

$$u = u_0(t, x) + \frac{\sqrt{6} \ln 2}{\pi\sqrt{u_0(t, x)}} \times \left[\frac{1}{2u_0(t, x) - t} - \frac{3 \cos \Phi(t, x)}{2u_0(t, x) - 3t} \right] + \dots, \quad (6.3)$$

главный член которого $u_0(t, x)$ задан формулой (3.9), а быстрая переменная $\Phi(t, x)$ имеет вид

$$\Phi(t, x) = -\frac{4}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} u_0^{3/2}(t, x) \left(u_0(t, x) - \frac{5t}{6} \right) - \frac{\ln 2}{\pi} \ln \left| u_0^{3/2}(t, x) \left(u_0(t, x) - \frac{3t}{2} \right) \right| + \frac{\ln 2 \ln 24}{2\pi} - \frac{\pi}{2} + 2 \arg \Gamma \left(\frac{i \ln 2}{2\pi} \right).$$

Этот же ряд задает асимптотику данного совместного решения уравнений (1.7), (1.9) при $x \rightarrow -\infty$, а также при $t \rightarrow \infty$ и $x < -3t^2/4$ (видно, что на заднем фронте $x = -3t^2/4$ зоны

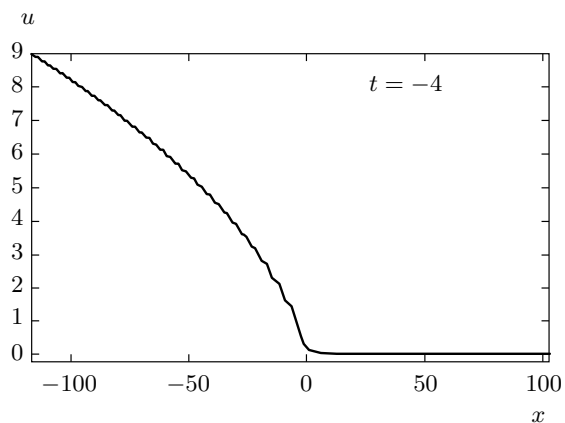


Рис. 3. Совместное решение уравнения КдВ (1.7) и ОДУ (1.9) в переменных x, u при $t = -4$

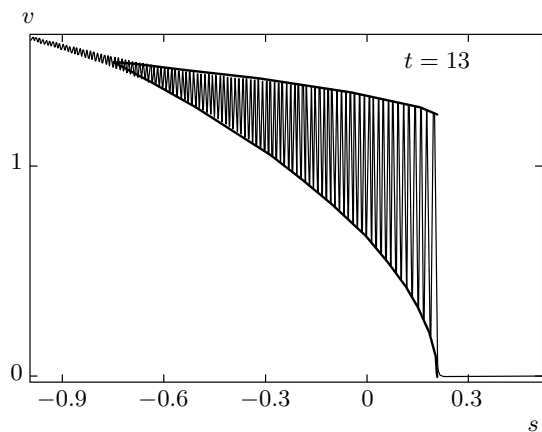


Рис. 4. Совместное решение уравнения КдВ (1.7) и ОДУ (1.9) в переменных s, v при $t = 13$. Огибающая: функции $l_3(s) \pm l_2(s)$, определенные по формулам (6.1)

уиземовских колебаний, о которых шла речь в предыдущем разделе, асимптотика (6.3) теряет свою пригодность ввиду справедливости равенства $2u_0(t, -3t^2/4) = 3t$.

6.3. Поведение совместного решения уравнения КдВ (1.7) и ОДУ (1.9), которое при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю и которое обладает описанными в предыдущем подразделе асимптотиками, было промоделировано нами численно. Результаты этого моделирования частично представлены на рис. 3 и 4. Они хорошо согласуются с описанными выше асимптотиками этого совместного решения. В частности, видно, что при $t \rightarrow \infty$ в поведении $u(t, x)$ возникает область незатухающих колебаний, границы которой описы-

ваются автомодельными решениями уравнений Уизема, о которых шла речь в разд. 6.1.

Несмотря на этот факт, преждевременно делать окончательный вывод о том, что для описываемых целей нужно именно данное совместное решение уравнений (1.7) и (1.9). Проблема состоит в малоамплитудной, затухающей при $t \rightarrow \infty$ быстро осциллирующей добавке к $u_0(t, x)$, описываемой асимптотикой (6.3). Не совсем на данный момент понятно, как такая добавка согласуется с доказанной в работе [24] теоремой существования при больших значениях решения уравнения КдВ, в широком ряде случаев сглаживающих слабые разрывы до момента ГК (степенная асимптотика x/t при $x \rightarrow -\infty$ этого решения уравнения (1.7) из работы [24] дифференцируема).

Пока же, на наш взгляд, нельзя исключать, что нужны иные совместные решения (1.7) и (1.9), асимптотика которых при $t \rightarrow \infty$ в области $-3t^2/4 < x < < 5t^2/4$ также задается посредством квазипростых решений уравнений Уизема из работ [33, 36], описанных в разд. 6.1.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

7.1. С помощью симметричных решений уравнения КдВ описывается зарождение БУВ, которое происходит в малой окрестности (ее размеры стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$) точки ГК системы уравнений идеальной гидродинамики. Вопросы о времени существования возникающих БУВ (например, об актуальности некоторого класса нелинейностей эффектов, подобных явлению неустойчивости солитонов и последующему коллапсу, проанализированному в работах [38, 39]) требуют отдельного изучения.

Мы же завершаем статью обсуждением ряда свойств рассмотренных в статье симметричных решений уравнения КдВ, имеющих общее значение для класса аналогов СФВК, удовлетворяющих интегрируемым уравнениям.

7.2. Кудашев [20] предложил вариант выбора подходящих симметрий, альтернативный использованному в разд. 4.2. Применительно к аналогам СФВК, удовлетворяющих уравнениям КдВ (1.7), и асимптотики которых задаются корнями уравнения $x - tu + G(u) = 0$, в формулировке из работы [20] предлагается подходящие ОДУ искать в виде суммы ($u^{(n)}$ — n -я производная u по x) $1 - tu'_x + K(u, u'_x, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) = 0$ стационарных частей симметрии Галилея

$$u'_{\tau_g} = 1 - tu'_x \tag{7.1}$$

уравнения (1.7) и его «автономной» симметрии $u'_{\tau_n} = K(u, u'_x, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$, определяемой условием $K'_u(u, u'_x, 0, \dots, 0) = G'(u)u'_x$. (По крайней мере для всех многочленов $G(u)$ такие симметрии найдутся.)

Этот вариант, когда в асимптотиках нелинейных аналогов СФВК, удовлетворяющих интегрируемым уравнениям, нелинейность доминирует над дисперсией (диссипацией), представляется более естественным, чем вариант правил выбора симметрий из работы [17]. Но из рассуждений, приведенных в разд. 7.3, следует, что подход, предложенный в работе [20], применим не всегда.

7.3. Уравнение КдВ (1.7) совместно также с ОДУ

$$u'''_{xxx} + uu'_x \pm \frac{1 - tu'_x}{2} = 0, \quad (7.2)$$

представляющими собой комбинацию правой части уравнения КдВ и стационарной части его классической симметрии Галилея (7.1). Все решения ОДУ (7.2) с соответствующим знаком удовлетворяют также ОДУ (1.8) или (1.9), что неслучайно — из левых частей ОДУ (7.2) левые части этих ОДУ пятого порядка получаются применением оператора рекурсии [6] $L = 3D_x^2 + 2u + u'_x(D_x)^{-1}$. Легко видеть также, что бездисперсионному пределу $u^2 = \pm(x - tu) + \text{const}$ первого уравнения Пенлеве $2u''_{xx} + u^2 = \pm(x - tu) + \text{const}$ в главном порядке удовлетворяют корни квадратных уравнений (3.7). Однако решения первого уравнения Пенлеве имеют бесконечное число полюсов на вещественной оси [40]. Поэтому для описания влияния малой дисперсии на трансформации слабых разрывов в ударные волны они не годятся.

Это свойство совместных решений уравнения КдВ (1.7) с ОДУ (1.8) и (1.9) аналогично описанному в [23] симметричному свойству решения (1.5) уравнения Бюргерса (1.6). Данное свойство показывает, в частности, что предложенный Кудашевым в работе [20] вариант использования симметрий интегрируемых уравнений для анализа их специальных решений—аналогов СФВК нуждается в уточнении: надо отказаться от неперемного использования симметрии Галилея, но нужные симметрии все же искать так, чтобы отбрасывание в их стационарных частях высших производных давало уравнения, которым приближенно удовлетворяют главные члены асимптотик соответствующих аналогов СФВК [10, 23].

7.4. Вообще, из работы [23] и сказанного выше в данном Заключении становится ясно, что множеству специальных функций той или иной ката-

строфы, удовлетворяющих интегрируемому уравнению, соответствует не только стационарная часть $R(t, x_1, \dots, x_n, W) = 0$ его какой-то конкретной симметрии. Данному множеству надо сопоставлять и ОДУ $L^m K(x_1, x_2, \dots, x_n, W) = 0$, определяемые всеми целочисленными степенями оператора рекурсии L для этого интегрируемого уравнения. Только что сказанное касается обоих вариантов выбора симметрий. В самом деле, понятно, что наряду с каким-то конкретным линейным ОДУ его решения удовлетворяют продифференцированным и интегральным следствиям данного ОДУ. И если говорить о множестве специальных решений интегрируемого уравнения, отвечающих данной катастрофе, то при использовании подхода из работы [17] надо иметь в виду и все стационарные части симметрий, являющиеся «нелинейными» обобщениями этих следствий.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ-2215.2008.1, РФФИ (09-01-92436-КЭ_а, 10-01-91222-Ст_а), МК-581.2009.1 и DFG project GZ: TA 289/4-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
2. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
3. S. V. Zakharov and A. M. I'in, *Funct. Differ. Equat.* **8**, 257 (2001).
4. С. В. Захаров, А. М. Ильин, *Матем. сб.* **192**, 3 (2001).
5. С. В. Захаров, *ЖВМ и МФ* **44**, 536 (2004).
6. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, Москва (1989).
7. Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, Москва (1981).
8. А. Б. Шварцбург, *Геометрическая оптика в нелинейной теории волн*, Наука, Москва (1976).
9. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, *Письма в ЖЭТФ* **62**, 358 (1995).
10. В. Р. Кудашев, Б. И. Сулейманов, *ПММ* **65**, 456 (2001).
11. Р. Гилмор, *Прикладная теория катастроф*, ч. 1, Мир, Москва (1984).

12. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, Москва (1987).
13. Л. В. Овсянников, в *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*, под ред. Л. В. Овсянникова и В. Н. Монахова, Наука, Новосибирск (1985).
14. А. В. Китаев, Записки ЛОМИ **187**, 53 (1991).
15. Б. И. Сулейманов, Записки ЛОМИ **187**, 110 (1991).
16. Б. И. Сулейманов, Матем. заметки **52**, 102 (1992).
17. Б. И. Сулейманов, И. Т. Хабибуллин, ТМФ **97**, 213 (1993).
18. Б. И. Сулейманов, ТМФ **98**, 198 (1994).
19. Б. И. Сулейманов, ЖЭТФ **105**, 1089 (1994).
20. В. Р. Кудашев, в сб. *Интегрируемость в динамических системах*, Ин-т математики с ВЦ, Уфа (1994), с. 70.
21. A. V. Kitaev, J. Math. Phys. **35**, (1994).
22. М. В. Федорюк, *Асимптотика: Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1987).
23. Б. И. Сулейманов, в сб. *Труды Института Математики с ВЦ УНЦ РАН*, вып. 1 (2008), с. 192.
24. А. В. Фаминский, Матем. заметки **83**, 119 (2008).
25. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **65**, 590 (1973).
26. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. А. М. Леонтовича и А. Б. Михайловского, Атомиздат, Москва (1980), вып. 10, с. 61.
27. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, в *Труды 12-й международной конференции по явлениям в ионизированных газах*, т. 1, Эндховен (1975), с. 273.
28. В. Е. Захаров, С. П. Новиков, С. В. Манаков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
29. S. P. Hastings and J. V. McLeod, Archive for Rat. Mech. and Analysis **73**, 31 (1980).
30. G. B. Whitam, Proc. Roy. Soc. A **283**, 238 (1965).
31. В. Р. Кудашев, С. Е. Шарапов, ТМФ **87**, 40 (1991).
32. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, ЖЭТФ **92**, 1684 (1987).
33. А. В. Гуревич, А. Л. Крылов, В. П. Мазур, ЖЭТФ **95**, 1674 (1989).
34. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, Москва (1990).
35. V. Kudashev and B. Suleimanov, Phys. Lett. A **221**, 204 (1996).
36. В. Р. Кудашев, С. Е. Шарапов, ТМФ **85**, 205 (1990).
37. А. Н. Белогрудов, Дифф. уравн. **33**, 587 (1997).
38. E. A. Kuznetsov, Phys. Lett. A **101**, 204 (1983).
39. R. Blaha, E. A. Kuznetsov, E. W. Ladike, and K. H. Spatchek, in *Nonlinear World, Proc. of IV Workshop Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Vol. 1, ed. by V. G. Bar'yukhtar et al., Singapur (1990), p. 10.
40. Д. А. Барташевич, Дифф. уравн. **9**, 942 (1973).