

СТАТИСТИКА ДИСКРЕТНОГО ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ НА «БОКОВЫХ» РЕЗОНАНСАХ МОЛЛОУ

*Г. П. Мирошниченко**

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 3 июня 2008 г.

Предложен метод генерации в одномодовом резонаторе условных однофотонных состояний высокой чистоты в процессе последовательного дискретного фотодетектирования. Накачка резонатора осуществляется полем резонансной флуоресценции от одного атома-источника, возбуждаемого внешним классическим полем. Резонатор настраивается на крыло спектра (боковой пик) резонансной флуоресценции Моллоу. Найдено такое соотношение параметров детектора, при котором по факту обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии можно сделать однозначный вывод о том, что в резонаторе сформировано чистое однофотонное состояние. В работе получена формула для априорной вероятности таких событий, изучен характер распада условного состояния, исследована зависимость заселенности однофотонного состояния моды от отстройки и от скорости релаксации.

PACS: 42.50.-p, 42.50.Dv

1. ВВЕДЕНИЕ

Новое направление в способах обработки, передачи и хранения информации — квантовые информационные технологии — основано на управлении квантовой единицей информации (кубитом). Единичные фотоны (кванты света), распространяющиеся в оптических системах, могут быть использованы в качестве кубитов [1]. Для получения единичных фотонов предлагаются способы генерирования неклассического антигруппированного света, из которого можно извлечь фотоны в виде гауссовых временных пакетов в заданном временном интервале [2, 3]. Логические операции с такими «летающими» кубитами проводятся в информационных оптических схемах с фазовыми гейтами [4]. Изучаются способы создания неклассических состояний моды электромагнитного поля, в частности, фоковских состояний в высокодобротном резонаторе [5]. Возможность построения квантового процессора на однофотонных состояниях обсуждается в работе [1]. В настоящей работе показано, что из сформированного в резонаторе под действием резонансной флуо-

ресценции поля можно генерировать условные однофотонные состояния квантованной моды в процессе последовательного дискретного фотодетектирования. Теория спектра резонансной флуоресценции развита в работе Моллоу [6], где спектр рассчитан в полуклассическом приближении с помощью корреляционной функции дипольного момента. Последовательно квантовая теория фотодетектирования на основе фотоэлектрического эффекта была развита в работе [7]. Согласно [7], цикл фотодетектирования состоит из интервала времени взаимодействия квантовой системы (в квантовую систему включают моды поля излучения и атом-источник поля) с детектором, мгновенного акта фотоионизации свободного фотоионизационного состояния и интервала свободного, с выключенным детектором, развития квантовой системы (интервал приготовления детектора в основном состоянии). Временная длительность цикла случайна. В работе [7] обоснованы приближения, позволяющие выразить совместную точечную плотность вероятности актов фотоионизации через соответствующую временную корреляционную функцию Глаубера зависящих от времени (в представлении свободного, без источников, поля) полевых опе-

*E-mail: gpmirosh@psem.net

раторов рождения и уничтожения. Главное приближение работы [7] — расчет операторов развития совместной матрицы плотности атома, поля и детектора в линейном приближении по взаимодействию детектора и поля. Теория дискретного фотодетектирования дана в работах [8–11]. В этом методе присутствуют все этапы детектирования, описанные Келли и Клейнером [7]. Состояние моды резонатора тестируется с помощью пролетающего через резонатор потока невозбужденных (на входе) атомов. Каждый атом является квантовым зондом, «собирающим» информацию о квантованной моде. В отличие от [7], в данной работе не использована теория возмущений для расчета оператора развития. На выходе из резонатора с помощью селективных к энергетическому состоянию атома детекторов (ионизационные камеры) снимается статистика вылетов атома в возбужденном или основном состоянии. Эта статистическая информация косвенным образом связана с числовыми характеристиками резонаторной моды. Характер этой связи зависит от «настройки» (выбора параметров) детектора. В работе исследована одна такая «настройка» детектора, когда по факту обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии можно сделать однозначный вывод о том, что в резонаторе сформировано чистое однофотонное состояние. В работе получена формула для априорной вероятности таких событий и изучен характер распада этого условного однофотонного состояния.

2. РЕЗОНАНСНАЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИЯ В ОДНОМОДОВОМ РЕЗОНАТОРЕ

Согласно работе Моллоу [6], резонансная флуоресценция, имеющая характерный трехгорбый спектр частот, возбуждается сильным классическим резонансным с атомным переходом электромагнитным полем. Слегка изменим постановку задачи. Поместим двухуровневый атом (источник) в одномодовый резонатор и возбудим резонансную флуоресценцию внешним классическим резонансным полем. Часть фотонов резонансной флуоресценции захватывается резонатором, возбуждая колебания квантованной резонаторной моды. Запишем уравнение Лиувилля для матрицы плотности $\rho_{AM}(t)$ квантовой системы «двухуровневый атом и резонаторная мода» в следующем виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho_{AM}(t) = [H_{AM}, \rho_{AM}(t)] - i\Gamma \rho_{AM}(t). \quad (1)$$

Здесь гамильтониан квантовой системы H_{AM} в резонансном приближении имеет вид

$$H_{AM} = F(\sigma_A^- + \sigma_A^+) + \varepsilon a^\dagger a + \kappa(a^\dagger \sigma_A^- + a \sigma_A^+). \quad (2)$$

Здесь

$$\sigma_A^- = |0\rangle_{AA}\langle 1|, \quad \sigma_A^+ = |1\rangle_{AA}\langle 0|$$

— атомные операторы уничтожения и рождения атомного возбуждения, $|0\rangle_A, |1\rangle_A$ — атомный базис основного и возбужденного уровней, a^\dagger, a — операторы уничтожения и рождения фотона в резонаторе. Символом «†» отмечен эрмитовосопреженный оператор. Параметры гамильтониана имеют размерность частоты: F — половина частоты Раби возбуждающего классического поля, ε — отстройка частоты моды от частоты атомного перехода, κ — параметр взаимодействия квантованной моды и атома (однофотонная частота Раби). Классическое поле настроено в точный резонанс с атомным переходом. Здесь Γ имеет смысл супероператора релаксации [12], учитывающего спонтанный распад возбужденного атомного уровня (не полностью учтенный в гамильтониане H_{AM}) и затухание резонаторной моды из-за конечной добротности резонатора.

Изучим уровень возбуждения $N_{AM}^{(st)}(\varepsilon)$ (среднее число фотонов) резонаторной моды в зависимости от отстройки ε резонатора от частоты перехода между уровнями атома-источника в установившемся (без измерений) состоянии $\rho_{AM}^{(st)}$ уравнения (1). Здесь обозначено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{AM}(t) = \rho_{AM}^{(st)}.$$

Для этой цели приближенно найдем $\rho_{AM}^{(st)}$ и усредним оператор числа фотонов $a^\dagger a$:

$$N_{AM}^{(st)}(\varepsilon) = \text{Sp}_{A,M}(a^\dagger a \rho_{AM}^{(st)}). \quad (3)$$

Для упрощения предположим, что температура среды равна нулю, тогда собственная матрица $\rho^{(\gamma)}$ супероператора релаксации Γ для нулевого собственного числа может быть записана в виде

$$\Gamma \rho^{(\gamma)} = 0, \quad \rho^{(\gamma)} = |0\rangle_{AA}\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|.$$

Здесь введено обозначение для собственных векторов оператора числа фотонов (базис Фока)

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнение для $\rho_{AM}^{(st)}$ имеет вид

$$i [H_{AM}, \rho_{AM}^{(st)}] + \Gamma \rho_{AM}^{(st)} = i [H_{AM}, \rho_{AM}^{(st)}] + \Gamma (\rho_{AM}^{(st)} - \rho^{(\gamma)}) = 0. \quad (4)$$

Предположим, что минимальное (не равное 0) собственное число супероператора Γ порядка (или меньше) характерных собственных частот гамильтониана H_{AM} , а остальные собственные числа велики. Решим секулярную задачу, заменив Γ в уравнении (4) его минимальным собственным числом γ (приближение одного времени релаксации, [13]). Такая замена оправдана тем обстоятельством, что в разность $\rho_{AM}^{(st)} - \rho^{(\gamma)}$ в (4) главный вклад (при решении секулярной задачи) дает собственная матрица супероператора Γ для минимального собственного числа. Окончательно приближенное уравнение для $\rho_{AM}^{(st)}$ имеет вид

$$i [H_{AM}, \rho_{AM}^{(st)}] + \gamma \rho_{AM}^{(st)} = \gamma \rho^{(\gamma)}. \quad (5)$$

Введем обозначение собственного базиса гамильтониана H_{AM} как

$$H_{AM} |\varphi_{n,\alpha}\rangle = E_{n,\alpha} |\varphi_{n,\alpha}\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha = 0, 1. \quad (6)$$

В базисе (6) решение (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{n,\alpha} | \rho_{AM}^{(st)} | \varphi_{m,\beta} \rangle &= \\ &= \langle \varphi_{n,\alpha} | \rho^{(\gamma)} | \varphi_{m,\beta} \rangle \frac{\gamma}{\gamma + i(E_{n,\alpha} - E_{m,\beta})}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) следует, что при $\gamma \gg E_{n,\alpha}$ выполнено соотношение $\rho_{AM}^{(st)}$, в противоположном случае при $\gamma \ll E_{n,\alpha}$ получаем $[H_{AM}, \rho_{AM}^{(st)}] \approx 0$, т.е. матрица $\rho_{AM}^{(st)}$ диагональна в базисе (6). На рис. 1 (кривая 1) представлен рассчитанный по формулам (3), (7) уровень возбуждения $N_{AM}^{(st)}$ в состоянии $\rho_{AM}^{(st)}$ в зависимости от отстройки ε при следующем выборе параметров расчета:

$$F = 2, \quad \kappa = 0.3, \quad \gamma = 0.01. \quad (8)$$

Все переменные и параметры задачи имеют размерность частоты либо времени. Вычисления проводились с безразмерными параметрами. Это означает, что в качестве единицы времени должен быть выбран характерный (для используемых атомов и резонатора) временной интервал, а в качестве единицы частоты следует выбрать соответствующую обратную величину. На кривой 1 рис. 1 видны пики возбуждения, отвечающие многофотонным (промежуточным) резонансам, для которых отстройки ε_m вычисляются по формуле

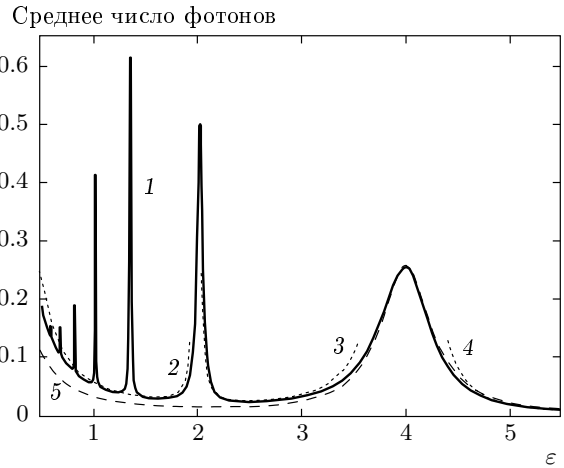


Рис. 1. Уровень возбуждения одномодового резонатора полем резонансной флуоресценции от атомисточника, помещенного в резонатор. Атомы-зонды отсутствуют в резонаторе. Кривая 1 — уровень возбуждения (среднее число фотонов) в зависимости от отстройки ε резонаторной моды от частоты перехода атома-источника; точный расчет по формуле (3). Кривые 2, 3, 4 — расчет уровня возбуждения по приближенной, полученной во втором порядке теории возмущений, формуле (12). Кривая 5 — крыло спектра резонансной флуоресценции Моллоу (работа [6]), расчет по формуле (13). Параметры расчета приводятся в тексте статьи

$$\varepsilon_m = 2F/m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Пики возбуждения находятся на крыле линии резонансной флуоресценции. Для выбранного условия возбуждения в резонаторе в среднем обнаруживаются несколько сотых долей фотона в крыле резонансов. Другими словами, состояние моды близко к состоянию вакуума. Получим приближенную формулу для $N_{AM}^{(st)}(\varepsilon)$, выбрав следующее соотношение параметров:

$$\varepsilon, F \gg \kappa \quad (9)$$

(резонатор настроен на крыло спектра резонансной флуоресценции). Уровень возбуждения резонатора можно рассчитать, решив задачу (6) до второго порядка теории возмущений по параметрам κ/ε , κ/F . Приведем некоторые собственные функции (6), полученные в первом порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{0,\alpha}\rangle &= |0\rangle|\tilde{\alpha}\rangle_A + \frac{\kappa}{2}|1\rangle \times \\
 &\times \left(\frac{1}{2F - (-1)^{\alpha}\varepsilon} |\widetilde{1-\alpha}\rangle_A - (-1)^{\alpha} \frac{1}{\varepsilon} |\tilde{\alpha}\rangle_A \right), \\
 |\varphi_{1,\alpha}\rangle &= |1\rangle|\tilde{\alpha}\rangle_A + \frac{\kappa}{2}|0\rangle \times \\
 &\times \left((-1)^{\alpha} \frac{1}{\varepsilon} |\tilde{\alpha}\rangle_A - \frac{1}{2F + (-1)^{\alpha}\varepsilon} |\widetilde{1-\alpha}\rangle_A \right) + \\
 &+ \frac{\kappa}{\sqrt{2}}|2\rangle \times \\
 &\times \left(\frac{1}{2F - (-1)^{\alpha}\varepsilon} |\widetilde{1-\alpha}\rangle_A - (-1)^{\alpha} \frac{1}{\varepsilon} |\tilde{\alpha}\rangle_A \right), \\
 &\alpha = 0, 1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Результаты второго порядка не приводятся из-за громоздкости. Здесь символом «волна» отмечены атомные функции, собственные для оператора $\sigma_A^- + \sigma_A^+$:

$$(\sigma_A^- + \sigma_A^+) |\tilde{\alpha}\rangle_A = (-1)^{\alpha} |\tilde{\alpha}\rangle_A, \quad \alpha = 0, 1. \tag{11}$$

Используя (10), (7) для (3), получаем приближенное выражение для уровня возбуждения во втором порядке по κ/ε , κ/F при малых γ ($\gamma \ll \kappa, \varepsilon, F$):

$$\begin{aligned}
 N_{AM}^{(st)}(\varepsilon) &= \frac{\kappa^2}{2\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^4 + 16F^4}{(4F^2 - \varepsilon^2)^2} + \\
 &+ \frac{\kappa^4 F^2}{4\varepsilon^4 (2F - \varepsilon)^2} \left(1 + 8 \frac{2F^2 + \varepsilon^2}{(2F + \varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon F}{(\varepsilon - F)^2} \right). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Формула справедлива в крыле линии возбуждения. На рис. 1 (кривые 2, 3, 4) представлен уровень возбуждения $N_{AM}^{(st)}(\varepsilon)$ (3), рассчитанный по приближенной формуле (12). Крылья однофотонного $\varepsilon \approx 2F$ и двухфотонного $\varepsilon \approx F$ резонансов достаточно хорошо описываются формулой (12). Для описания центральной области резонансов требуется исправление формулы (12) с помощью решения соответствующей секулярной задачи. Это не сложно сделать, но при этом формулы становятся более громоздкими. Для описания многофотонных пиков требуются более высокие, чем второй, порядки теории возмущений. В центре линии $\varepsilon \approx 0$ происходит сгущение резонансов. Центр линии резонансной флуоресценции не описывается теорией возмущений. На рис. 1 (кривая 5) представлено крыло известного спектра резонансной флуоресценции Моллоу [6]. В работе [6] спектр рассчитан в полуклассическом приближении как спектр корреляционной функции дипольного момента. График спектра Моллоу $K(\varepsilon)$ построен по формуле

$$\begin{aligned}
 K(\varepsilon) &= I_0 \left(\frac{12\kappa^2}{9\varepsilon^2 + 4\kappa^2} + \right. \\
 &\left. + \frac{\kappa^2}{(\varepsilon - 2F)^2 + \kappa^2} + \frac{\kappa^2}{(\varepsilon + 2F)^2 + \kappa^2} \right). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь I_0 — нормировочная константа, выбранная так, чтобы максимумы однофотонных пиков совпали. В формуле Моллоу скорость спонтанной релаксации заменена на $4\kappa/3$. Многофотонные резонансы в спектре Моллоу отсутствуют. Эти резонансы связаны с квантованием моды резонатора.

3. ДИСКРЕТНОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ФОТОНОВ РЕЗОНАТОРА

Опишем процесс дискретного фотодетектирования резонаторных фотонов, которые появляются в резонаторе благодаря возбуждению атомной резонансной флуоресценции внешним, постоянно действующим резонансным классическим полем. Информацию о фотонах резонатора будем получать с помощью разреженного потока невозбужденных (на входе в резонатор) атомов-зондов. Предположим, что поток атомов калиброван по скоростям, так что атомы взаимодействуют с модой резонатора в течение определенного времени τ и следуют друг за другом через интервал времени $T + \tau$, где T — случайный, но достаточно большой интервал времени, когда атомы-зонды отсутствуют в резонаторе. Цикл детектирования разобьем на два этапа. На первом этапе, длительность которого T , атом-зонд подлетает к резонатору, поле в резонаторе, созданное на предыдущем цикле детектирования, развивается в течение времени T под действием возбуждаемого атома-источника и процессов релаксации согласно уравнению (1). На этом этапе атом-зонд отсутствует в резонаторе. Решение уравнения (1) (в приближении одного времени релаксации) на интервале $0 \leq t \leq T$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \rho_{AM}(t) &= \rho_{AM}^{(st)} + \exp(-\gamma t) \exp(-iH_{AM}t) \times \\
 &\times \left(\rho_{AM}(0) - \rho_{AM}^{(st)} \right) \exp(iH_{AM}t). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь $\rho_{AM}(0)$ — начальная матрица плотности атома-источника и моды.

По окончании первого этапа атом-зонд появляется в резонаторе и начинается второй этап детектирования — взаимодействие атома-зонда с модой резонатора в течение короткого времени τ . Гамильтониан взаимодействия квантованной моды, ато-

ма-источника и атома-зонда (в резонансном представлении) имеет вид

$$H_{AMD} = H_{AM} + \nu(a^\dagger \sigma_D^- + a \sigma_D^+). \quad (15)$$

Здесь ν — параметр взаимодействия квантованной моды и атома-зонда,

$$\sigma_D^- = |0\rangle_{DD}\langle 1|, \quad \sigma_D^+ = |1\rangle_{DD}\langle 0|$$

— операторы уничтожения и рождения возбуждения на детекторе, $|0\rangle_D, |1\rangle_D$ — векторы основного и возбужденного уровней атома-зонда. В формуле (15) предполагается точный резонанс частот квантованной моды резонатора и перехода между уровнями атома-детектора. Решение уравнения Лиувилля для матрицы плотности трех взаимодействующих подсистем «двухуровневый атом-источник, резонаторная мода, двухуровневый атом-детектор» в приближении одного времени релаксации на интервале $T \leq t \leq \tau + T$ имеет вид

$$\rho_{AMD}(t) = \rho_{AMD}^{(st)} + \exp(-\gamma t) \exp(-iH_{AMD}t) \times \\ \times \left(\rho_{AMD}(T) - \rho_{AMD}^{(st)} \right) \exp(iH_{AMD}t). \quad (16)$$

Здесь

$$\rho_{AMD}(T) = \rho_{AM}(T) \otimes |0\rangle_{DD}\langle 0|$$

— начальная (на этапе взаимодействия с детектором) матрица плотности невозбужденного атома-зонда, атома-источника и моды, $\rho_{AMD}^{(st)}$ — установившаяся матрица плотности, найти которую можно по формулам, аналогичным (5)–(7), где для решения задачи следует использовать полный гамильтониан (15). Совершим дальнейшее упрощение задачи, сделав следующие предположения:

1. $\tau \ll T,$
2. $\gamma \ll \kappa \ll F \ll \nu,$
3. $\gamma\tau, \kappa\tau, F\tau \ll 1.$

Первое предположение означает, что внутри резонатора не могут появиться два и более атомов-зондов. Второе предположение дает возможность упростить выражение (16), записав

$$\rho_{AMD}(t) = \rho_{AMD}^{(st)} (1 - \exp(-\gamma t)) + \\ + \exp(-\gamma t) \exp(-iH_{AMD}t) \times \\ \times \rho_{AMD}(T) \exp(iH_{AMD}t). \quad (18)$$

Благодаря второму и третьему предположениям можно пренебречь изменением состояния атома-источника за время взаимодействия детектора и моды и приближенно записать (18) на интервале $T \leq t \leq \tau + T$ в виде

$$\rho_{AMD}(t) = \exp(-iH_{MD}t) \rho_{AMD}(T) \exp(iH_{MD}t).$$

Здесь гамильтониан взаимодействия моды и детектора равен

$$H_{MD} = \varepsilon a^\dagger a + \nu (a^\dagger \sigma_D^- + a \sigma_D^+).$$

После резонатора атом-зонд попадает в ионизационную камеру и цикл фотодетектирования заканчивается измерением энергетического состояния зонда.

Дополнительная информация о состоянии вылетевшего из резонатора очередного зондирующего атома может быть использована для расщепления полного ансамбля квантовой системы «атом-источник и резонаторная мода» на подансамбли, обусловленные результатом измерения. Будем предполагать, что ионизационные камеры идеальны, т. е. детектируют каждый попавший в них атом. Введем случайную переменную ξ , принимающую два значения: $\xi = 0, 1$. Значение $\xi = 0$ соответствует событию, когда атом обнаружен в нижнем состоянии, $\xi = 1$ — в верхнем состоянии. Априорная вероятность P_ξ каждого события ξ в момент $\tau + T$ вылета атома (перед измерением) рассчитывается по формуле

$$P_\xi = \text{Sp}_{AM} \left(M_\xi(\tau) \rho_{AM}(T) M_\xi^\dagger(\tau) \right). \quad (19)$$

Здесь введены обозначения операторов-трансформеров $M_\xi(\tau), M_\xi^\dagger(\tau)$ [14], действующих на редуцированную матрицу плотности квантовой системы $\rho_{AM}(T)$ (14) в момент $t = T$ (момент влета атома-зонда в резонатор):

$$M_\xi(\tau) = {}_D \langle \xi | \exp(-iH_{MD}\tau) | 0 \rangle_D, \quad \xi = 0, 1. \quad (20)$$

В результате их действия получаем условную редуцированную матрицу плотности подансамбля квантовой системы, $\rho_{AM}(T + \tau|\xi)$, в момент $T + \tau$, обусловленную результатом измерения (случайная переменная ξ принимает одно из двух возможных значений):

$$\rho_{AM}(T + \tau|\xi) = \frac{M_\xi(\tau) \rho_{AM}(T) M_\xi^\dagger(\tau)}{P_\xi}.$$

Редуцированная матрица плотности для полного ансамбля квантовой системы после вылета атома-зонда из резонатора вычисляется по формуле (формула полной вероятности)

$$\rho_{AM}(T + \tau) = P_0 \rho_{AM}(T + \tau|0) + P_1 \rho_{AM}(T + \tau|1).$$

Процесс квантовых измерений повторяется циклически. Условную редуцированную матрицу плотности в начале ℓ -го цикла далее для краткости обозначим

через $\rho_C(\ell)$. Матрицы $\rho_C(\ell + 1)$ и $\rho_C(\ell)$ связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \rho_{AM}(T) &= \rho_{AM}^{(st)} + \exp(-\gamma T) \exp(-iH_{AM}T) \times \\ &\times \left(\rho_C(\ell) - \rho_{AM}^{(st)} \right) \exp(iH_{AM}T), \\ P_\xi &= \text{Sp}_{A,M} \left(M_\xi(\tau) \rho_{AM}(T) M_\xi^\dagger(\tau) \right), \\ \rho_C(\ell + 1) &= \frac{M_\xi(\tau) \rho_{AM}(T) M_\xi^\dagger(\tau)}{P_\xi}, \\ &\ell = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Редуцированную матрицу плотности полного ансамбля (результаты последовательных квантовых измерений не учитываются) в начале ℓ -го цикла далее для краткости обозначим через $\rho_W(\ell)$. Матрицы $\rho_W(\ell + 1)$ и $\rho_W(\ell)$ связаны рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} \rho_{AM}(T) &= \rho_{AM}^{(st)} + \exp(-\gamma T) \exp(-iH_{AM}T) \times \\ &\times \left(\rho_W(\ell) - \rho_{AM}^{(st)} \right) \exp(iH_{AM}T), \\ \rho_W(\ell + 1) &= M_0(\tau) \rho_{AM}(T) M_0^\dagger(\tau) + \\ &+ M_1(\tau) \rho_{AM}(T) M_1^\dagger(\tau). \end{aligned}$$

Редуцированная матрица плотности полного ансамбля под действием атомов-зондов после достаточного числа циклов стремится к стационарной матрице $\rho_W^{(st)}$:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_W(\ell) = \rho_W^{(st)}.$$

Для этого требуется не менее

$$N_{ex} = ((T + \tau)\gamma)^{-1}$$

пролетов атомов-зондов. Параметр N_{ex} имеет смысл числа пролетов атомов за время релаксации квантовой системы.

4. «НАСТРОЙКА» ДЕТЕКТОРА ФОТОНОВ

Выходной сигнал дискретного детектора фотонов представляет собой последовательность импульсов тока в ионизационной камере. Каждый импульс свидетельствует об обнаружении атома-зонда в возбужденном или в основном состоянии. Эта косвенная информация должна быть расшифрована и связана с состоянием квантованной моды, непрерывно накачиваемой от атома-источника. В результате накачки в резонаторе могут возникать разные распределения фотонов. В зависимости от соотношения параметров атом-зонд может по-разному реагировать

на статистику внутривибронных фотонов. Найдем соотношение параметров, при котором вылетающий из резонатора атом несет информацию об однофотонном состоянии поля резонатора. Для получения этого соотношения запишем явные выражения для трансформеров (20):

$$\begin{aligned} M_0(\tau) &= \exp(i\varepsilon(0.5 - a^\dagger a)\tau) \times \\ &\times \left(\cos(\tau\nu\Theta) - i\frac{\varepsilon}{2\nu} \frac{\sin(\tau\nu\Theta)}{\Theta} \right), \\ M_1(\tau) &= -i \exp(-i\varepsilon(0.5 + a^\dagger a)\tau) a \frac{\sin(\tau\nu\Theta)}{\Theta}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение для оператора Θ :

$$\Theta = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2\nu}\right)^2 + a^\dagger a}.$$

Выберем длительность взаимодействия τ , параметр взаимодействия атома-зонда и моды ν , а также отстройку ε , исходя из условия

$$\sin \sqrt{(\varepsilon\tau/2)^2 + (\tau\nu)^2} = 0.$$

Параметр ν выбираем по формуле (минимальное значение)

$$\tau\nu = \sqrt{\pi^2 - (\varepsilon\tau/2)^2}. \quad (22)$$

Остальные параметры должны удовлетворять условиям (17). Изучим режим работы фотодетектора, при котором время T свободного (без атомов-зондов) развития достаточно велико:

$$\gamma T \gg 1, \quad (23)$$

настолько, чтобы по окончании этого времени на первом этапе детектирования редуцированная атомно-полевая матрица плотности пришла в стационарное состояние,

$$\rho_{AM}(T) \approx \rho_{AM}^{(st)}. \quad (24)$$

В результате редуцированная матрица плотности полного ансамбля квантовой системы с учетом взаимодействия с атомами-зондами также будет стационарной и равной

$$\rho_W^{(st)} = M_0(\tau) \rho_{AM}^{(st)} M_0^\dagger(\tau) + M_1(\tau) \rho_{AM}^{(st)} M_1^\dagger(\tau). \quad (25)$$

Рассмотрим влияние атомов-зондов на уровень возбуждения резонатора. На рис. 2 представлена кривая 2 зависимости среднего числа фотонов в резонаторе для полного ансамбля $N_W^{(st)}(\varepsilon)$ в состоянии $\rho_W^{(st)}$ (25) от отстройки:

$$N_W^{(st)}(\varepsilon) = \text{Sp}_{A,M}(a^\dagger a \rho_W^{(st)}).$$

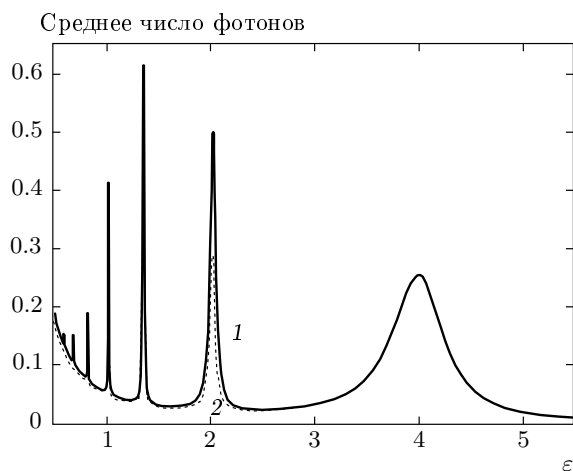


Рис. 2. Сравнение уровней возбуждения одномодового резонатора полем резонансной флуоресценции от атома-источника, помещенного в резонатор. Кривая 1 — уровень возбуждения (среднее число фотонов) в зависимости от отстройки ε резонаторной моды от частоты перехода атома-источника при условии, что атомы-зонды в резонаторе отсутствуют. Точный расчет по формуле (3). Кривая 2 — уровень возбуждения (среднее число фотонов) в зависимости от отстройки ε при зондировании резонатора невозбужденными (на входе) атомами-зондами. Установившийся полный ансамбль. Расчет по формуле (25). Атомы-зонды формируют дополнительный канал релаксации. Параметры расчета приводятся в тексте

Для сравнения на рис. 2 (кривая 1) приведен уровень возбуждения $N_{AM}^{(st)}(\varepsilon)$. Если информация о результатах измерения состояния вылетающих атомов не учитывается, то взаимодействие с атомами-зондами приводит к дополнительной релаксации, уменьшающей уровень возбуждения резонатора. Расчет кривой 2 выполнен при выборе параметров (8), (22) и при

$$\tau = 0.02. \tag{26}$$

Выбор параметров (8), (26) согласуется с условиями (17), (23). Невозбужденный атом-зонд, влетающий в резонатор, взаимодействует с модой, которая накачивается от источника. Это взаимодействие приводит к перераспределению энергии по моде и изменению среднего числа фотонов в резонаторе. Среднее число фотонов в резонаторе для полного ансамбля мало. Как следствие, можно предположить, что вылетающие атомы-зонды будут часто обнаруживаться в основном (не возбужденном) состоянии.

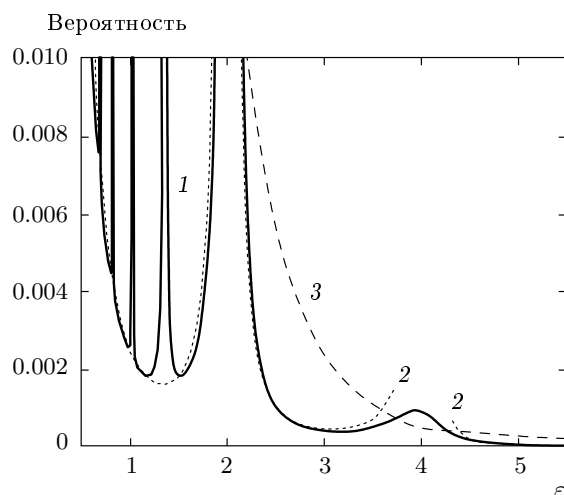


Рис. 3. Вероятность обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии в ионизационной камере. Кривая 1 — точный расчет вероятности по формуле (27) в зависимости от отстройки ε резонаторной моды от частоты перехода атома-источника. Кривая 2 — расчет вероятности по приближенной формуле (28). Кривая 3 — расчет отклонения заселенности условного однофотонного состояния резонатора от единицы (сразу после момента измерения) в зависимости от отстройки ε по формуле (30). Параметры расчета указаны в тексте

Цель работы — изучение статистики противоположных событий, а именно, обнаружений атомов-зондов в возбужденном состоянии. Априорная вероятность таких событий P_1 (21) в выбранном режиме работы (23) рассчитывается по формуле

$$P_1 = \text{Sp}_{A,M} \left(M_1(\tau) \rho_{AM}^{(st)} M_1^\dagger(\tau) \right). \tag{27}$$

На рис. 3 (кривая 1) приведена зависимость P_1 от отстройки ε при наборе параметров (8), (22), (26). Кривая зависимости не монотонна, наблюдается резкий всплеск вероятности в областях резонансов. Используем приближенные решения (10), (11) и с помощью (27) получим приближенную формулу для оценки априорной вероятности P_1 во втором порядке теории возмущений по параметрам (9) при выборе (22)–(24), (26):

$$P_1 = \frac{\kappa^4 F^2}{\varepsilon^4 (2F - \varepsilon)^2} \left(1 + 8 \frac{2F^2 + \varepsilon^2}{(2F + \varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon F}{(\varepsilon - F)^2} \right) \times \frac{\nu^2}{\varepsilon^2 + 8\nu^2} \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + 8\nu^2} \right). \tag{28}$$

На рис. 3 (кривая 2) представлена зависимость P_1 от ε , рассчитанная по формуле (28). Формула неплот-

хо описывает крылья одно- и двухфотонного резонансов. Для описания резонансов более высокой кратности необходимы формулы теории возмущений для порядков более высоких, чем второй.

5. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ОДНОФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ РЕЗОНАТОРНОЙ МОДЫ

С помощью рекуррентных соотношений (21) можно смоделировать реализации случайных результатов последовательных квантовых измерений состояний вылетающих из резонатора атомов-зондов. Реализация представляет собой дихотомический случайный процесс, когда случайная переменная ξ принимает два возможных значения: 0 или 1. С помощью данной реализации можно рассчитать редуцированную матрицу плотности $\rho_C(\ell+1)$ в конце ℓ -го, начале $(\ell+1)$ -го цикла фотодетектирования. В рассматриваемом приближении (23), (24) в конце любого цикла возможны две различные условные редуцированные матрицы плотности квантовой системы. Случайно, с вероятностью P_1 (27) можно получить матрицу плотности $\rho_C^{(1)}$ (случайная переменная $\xi = 1$):

$$\rho_C^{(1)} = \frac{M_1(\tau)\rho_{AM}^{(st)}M_1^\dagger(\tau)}{P_1}. \quad (29)$$

С вероятностью $P_0 = 1 - P_1$ можно получить матрицу $\rho_C^{(0)}$ (случайная переменная $\xi = 0$):

$$\rho_C^{(0)} = \frac{M_0(\tau)\rho_{AM}^{(st)}M_0^\dagger(\tau)}{P_0}.$$

В приближении (23), (24) вероятность P_1 не зависит от предыстории и для значения отстройки $\varepsilon = 3.7$ приблизительно равна $P_1 \approx 0.001$ (по рис. 3 или по формуле (28)). Тогда по формуле Бернулли среднее число событий $\xi = 1$ из $N = 2000$ попыток равно $NP_1 \approx 2$. Такое число событий наблюдалось в численном эксперименте, где выбиралось время $T = 1000$.

Исследуем свойства условного состояния квантовой системы $\rho_C^{(1)}$, получаемого в резонаторе сразу после обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии в ионизационной камере. Редуцируем матрицу $\rho_C^{(1)}$ по состояниям атома и получим состояние моды резонатора $\rho_M^{(1)}$:

$$\rho_M^{(1)} = \text{Sp}_A \left(\rho_C^{(1)} \right).$$

Заселенность однофотонного состояния в $\rho_M^{(1)}$ рассчитывается по формуле

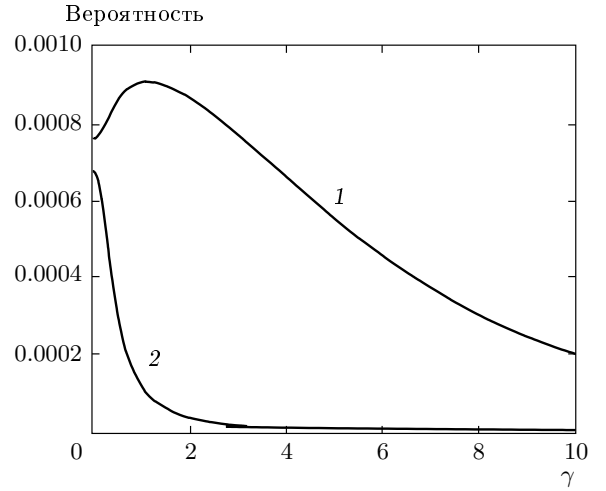


Рис. 4. Вероятность обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии в ионизационной камере (2, расчет по формуле (27)) и отклонение заселенности условного однофотонного состояния резонатора от единицы (сразу после момента измерения) (1, расчет по формуле (30)) в зависимости от скорости релаксации γ квантовой системы. Параметры расчета указаны в тексте

$$\left(\rho_M^{(1)} \right)_{1,1} = \frac{\langle 1 | M_1(\tau) \text{Sp}_A \left(\rho_{AM}^{(st)} \right) M_1^\dagger(\tau) | 1 \rangle}{\sum_{n=1} \langle n | M_1(\tau) \text{Sp}_A \left(\rho_{AM}^{(st)} \right) M_1^\dagger(\tau) | n \rangle}. \quad (30)$$

На рис. 3 (кривая 3) представлена зависимость отклонения заселенности однофотонного состояния от единицы $1 - \left(\rho_M^{(1)} \right)_{1,1}$ сразу после момента обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии в зависимости от отстройки резонатора ε для набора параметров расчета (8), (22), (26). Начиная с $\varepsilon \approx 2$ отклонение заселенности $1 - \left(\rho_M^{(1)} \right)_{1,1}$ переходит в стационарный режим и принимает значение, близкое к нулю. Например, при $\varepsilon = 3.7$ имеем $1 - \left(\rho_M^{(1)} \right)_{1,1} = 0.000766$. В этот момент в резонаторе сформировано практически чистое однофотонное состояние. На рис. 4 изучается зависимость отклонения заселенности однофотонного состояния от единицы $1 - \left(\rho_M^{(1)} \right)_{1,1}$ (кривая 1) и вероятности обнаружить атом-зонд в возбужденном состоянии P_1 (кривая 2) в зависимости от скорости релаксации γ . Графики построены при фиксированных параметрах $F = 2$, $\kappa = 0.3$, $\tau = 0.02$, $\varepsilon = 3.7$ и при условии (22). Как следует из рис. 4, с ростом γ повышается чистота однофотонного состояния, но и рез-

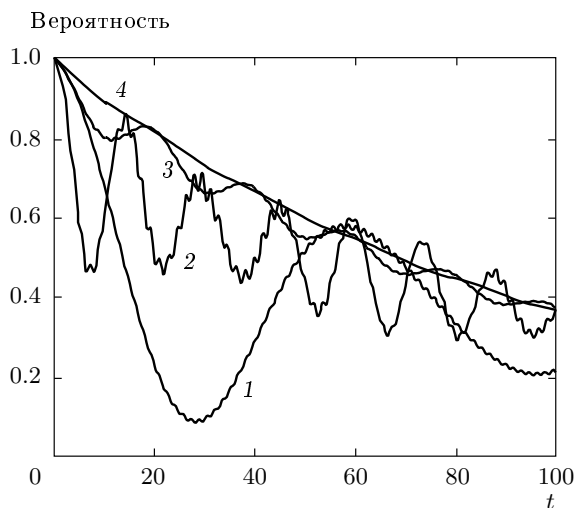


Рис. 5. Убывание во времени заселенности однофотонного состояния от момента измерения при разных значениях параметров $\varepsilon = 4$ (1), 3.7 (2, 3, 4), $\kappa = 0.1$ (1, 3), 0.3 (2), 0.03 (4). Расчет выполнен по формуле (14). Остальные параметры расчета указаны в тексте

ко падает вероятность P_1 обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии. Так например, для $\gamma = 10$ имеем $1 - \left(\rho_M^{(1)}\right)_{1,1} = 0.0002$, $P_1 = 5 \cdot 10^{-8}$. На рис. 5 представлены графики убывания заселенности однофотонного состояния во времени, начиная от момента обнаружения атома-зонда в возбужденном состоянии при разных значениях параметров ε , κ . Расчет выполнен по формуле (14), где в качестве начального состояния выбрана матрица плотности (29). Использовались следующие параметры расчета: $\tau = 0.02$, $F = 2$, $\gamma = 0.01$. Сто единиц времени на оси абсцисс соответствует времени релаксации $1/\gamma$. Как следует из рис. 5, процесс релаксации имеет осцилляционный характер. Медленные осцилляции объясняются перекачкой энергии между квантованной модой и атомом-источником. На медленные осцилляции наложены быстрые осцилляции на частоте Раби взаимодействия атома-зонда с классическим накачивающим полем F . Затухание заселенности однофотонного состояния определяется скоростью релаксации γ . Отстройки ε для рис. 5 выбраны в области однофотонного крыла линии резонансной флуоресценции (боковой пик спектра Моллоу). Частоту осцилляций заселенности однофотонного состояния можно найти по теории возмущений при выполнении соотношения (9). В условиях применимости теории возмущений эта частота совпадает с частотой

перехода между квантовыми уровнями системы «мода + атом-источник», для которых собственные функции гамильтониана H_{AM} (2) найдены и обозначены как $|\varphi_{0,0}\rangle$ и $|\varphi_{1,1}\rangle$ (10). Разность частот Ω соответствующих уровней равна

$$\Omega = |2F - \varepsilon| \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon - 2F} \right)^2 \right), \quad (31)$$

$$\frac{\kappa}{2} \ll |\varepsilon - 2F|,$$

$$\Omega = \kappa, \quad \frac{\kappa}{2} \gg |\varepsilon - 2F|. \quad (32)$$

В условиях резонанса (32) (кривая 1) заселенность осциллирует с малой частотой, но большой амплитудой. При отстройке от резонанса (31) амплитуда осцилляций уменьшается, а частота осцилляций возрастает. В пределе малого взаимодействия атома и моды (кривая 4) осцилляции исчезают, и заселенность уменьшается по экспоненциальному закону с показателем γ .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Под непрерывным действием накачки в резонаторе создается стационарное слабо возбужденное состояние квантованной моды. Предложенный метод позволяет с помощью косвенных квантовых измерений обнаружить условное (обусловленное результатом измерения) однофотонное состояние моды. В данной работе накачка резонатора осуществляется полем резонансной флуоресценции от одного атома-источника, возбуждаемого внешним классическим полем. Резонатор настраивается на крыло спектра (боковой пик) резонансной флуоресценции Моллоу. Поле в резонаторе тестируется с помощью пролетающих через резонатор невозбужденных атомов. Вылетающие из резонатора атомы анализируются с помощью селективных к энергетическому состоянию атома ионизационных камер. Как показано в работе, параметры детектора можно выбрать так, что в момент получения информации о возбужденном состоянии атома-зонда можно однозначно сделать вывод о состоянии моды резонатора. Условная редуцированная матрица плотности моды будет соответствовать чистому фоксовскому однофотонному состоянию. Сделан ряд предположений, упрощающих анализ задачи. Процесс фотодетектирования предполагается идеальным, т. е. энергетическое состояние каждого вылетающего из резонатора атома

определяется однозначно. Неидеальность не изменит «чистоту» однофотонного состояния, но уменьшит вероятность его наблюдения. Учет неидеальности выполнен в работе [11]. Предположение нулевой температуры хорошо оправдывается, так как современный эксперимент можно выполнять при температуре резонатора 0.1 К [15]. Это соответствует среднему числу термических фотонов в резонаторе $3 \cdot 10^{-5}$ при частоте фотона 20 ГГц, что пренебрежимо мало по сравнению с числом фотонов, созданных в резонаторе резонансной флуоресценцией. Время жизни фотона на той же частоте при добротности резонатора порядка 10^{11} составит несколько секунд. В предлагаемом методе необходимо строго стабилизировать интервал времени τ от начала взаимодействия моды и атома-зонда до момента получения отсчета. Время взаимодействия τ должно быть зафиксировано с относительной погрешностью, определяемой долями процента. Оценим время ΔT на одно событие (создание однофотонного состояния в резонаторе). Число попыток (пролетов атомов-зондов) оценивается как $1/P_1$. Длительность одного пролета порядка $1/\gamma$. Тогда $\Delta T \approx 1/\gamma P_1$. Полагая, что $\gamma \approx 10^5 \text{ с}^{-1}$, и учитывая, что согласно рис. 4 $P_1 \approx 2 \cdot 10^{-4}$, получаем $\Delta T \approx 0.05 \text{ с}$. Как показывает рис. 3, вероятность P_1 может меняться в широких пределах, например, вблизи двухфотонного резонанса (при использованном наборе параметров это соответствует $\varepsilon \approx 2$), вследствие этого, время ΔT также может существенно отличаться от приведенной оценки. Отметим некоторую парадоксальность приведенного эффекта, когда условное однофотонное состояние поля резонатора, в котором до измерения в среднем находится сотая доля фотона, обнаруживается при вылете из резонатора атома-зонда в возбужденном состоянии. Подобный эффект увеличения среднего числа фотонов в моде для условных распределений, создаваемых при действии понижающих операторов, отмечался в работах [16, 17] для суперпуассоновского распределения числа фотонов в моде (до измерения). В работе [18] этот эффект получен при изучении скорости накачки одноатомного лазера и назван эффектом сверхнакачки. В работе [11] этот эффект отмечен в связи с особенностью дискретного фотодетектирования, когда с увеличением числа обнаруженных в возбужденном состоянии атомов-зондов предсказывается рост среднего числа фотонов в резонаторе, в присутствии релаксационного процесса. Отмеченное в указанных выше работах свойство условных распределений может быть рационально объяснено малой вероятностью таких событий, перенормировкой редуцированной матрицы, получен-

ной после действия понижающих операторов, перераспределением чисел фотонов между подансамблями, обусловленными результатом измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. L. Chuang and Y. Yamamoto, *Phys. Rev.* **52**, 3489 (1995).
2. B. Darquie, *Science* **309**, 454 (2005).
3. J. Noh, *J. Korean Phys. Soc.* **44**, 271 (2004).
4. C. Ottaviani, S. Rebic, D. Vitali, and P. Tombesi, *Phys. Rev.* **73**, 010301(1) (2006).
5. S. Brattke, B. Varcoe, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3534 (2001).
6. B. R. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
7. P. L. Kelley and W. H. Kleiner, *Phys. Rev. A* **136**, 316 (1964).
8. N. Imoto, M. Ueda, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, 4127 (1990).
9. Y. Ben-Aryeh and C. Brif, arXiv:quant-ph/9504009.
10. A. V. Dodonov, S. S. Mizrahi, and V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quant. Semiclass. Opt.* **7**, 99 (2005).
11. Г. П. Мирошниченко, *ЖЭТФ* **131**, 829 (2007).
12. A. I. Maimistov, and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
13. R. Karplus and I. A. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 1020 (1948).
14. K. Kraus, *States, Effects, and Operations*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
15. J. Krause, M. O. Scully, T. Walther, and H. Walther, *Phys. Rev.* **39**, 1915 (1989).
16. M. Ueda, N. Imoto, and T. Ogawa, *Phys. Rev. A* **41**, 3891 (1990).
17. S. S. Mizrahi and V. V. Dodonov, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 8847 (2002).
18. Г. П. Мирошниченко, *Опт. и спектр.* **96**, 777 (2004).