

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАТУХАЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*И. Л. Майков**, *Л. В. Директор***

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 декабря 2007 г.

Для адекватного описания динамики капли вязкой жидкости при больших начальных возмущениях ее формы за счет воздействия внешних полей разработана численная модель нелинейных колебаний с использованием адаптивных сеток. Проведено сравнение результатов расчетов процесса колебаний капли в невесомости и на горизонтальной поверхности в поле силы тяжести с имеющимися расчетными и экспериментальными данными.

PACS: 47.10.ad, 47.11.Df, 47.55.D-

1. ВВЕДЕНИЕ

Технологические процессы, так или иначе связанные с динамикой капли жидкости, имеют весьма широкое распространение. Такие процессы характерны для поведения капель жидкого топлива в потоках горячего газа в ракетных двигателях и двигателях внутреннего сгорания, при взаимодействии капель с поверхностью в струйных теплообменных устройствах и струйных принтерах, в технологиях окраски поверхностей и производства защитных пленок [1–3]. Большой интерес к задачам динамики капель проявляется исследователями теплофизических свойств жидкости динамическими методами [4]. Одной из серьезных проблем, связанных с этими процессами, является задача адекватного описания поведения капли жидкости при больших начальных возмущениях ее формы за счет воздействия внешних полей и при соударении капли с поверхностью или с другой каплей и разработка эффективных численных алгоритмов и процедур для практических расчетов.

Численные методы решения задач с подвижными границами можно условно разбить на три класса: с подвижными сетками — лагранжевы методы [5, 6], с неподвижной границей области — эйлеровы методы [7, 8] и эйлерово-лагранжевы методы [9, 10]. Лагранжевы методы имеют два основных преимуще-

ства: явно отслеживаются положение и форма границы раздела фаз и имеется возможность точного задания граничных условий. Основные недостатки лагранжевых методов заключаются в сильном искажении вычислительной сетки и появлении в связи с этим областей с неоднозначным решением (нарушение топологии), что ведет к уменьшению точности и требует дополнительных корректирующих процедур. Так как эйлеровы методы основаны на фиксированной сетке, граница раздела фаз не может быть явно определена (не совпадает с сеткой) и использование таких методов требует разработки соответствующих дополнительных процедур, позволяющих определять положение границы раздела фаз и модифицировать граничные условия.

Третья группа методов явно отслеживает положение и форму подвижной границы на неподвижной сетке с помощью частиц-маркеров или переменных шагов по времени [9]. Как и в некоторых эйлеровых методах, поверхностные силы на границе представляются как объемные и вводятся в уравнение движения. Предполагается, что граница раздела фаз имеет конечную толщину и изменение физических свойств при переходе от одной среды к другой происходит внутри границы. Эти методы, сочетающие преимущества и лагранжевых, и эйлеровых методов, имеют существенные недостатки — больший объем вычислений и не всегда приемлемую точность.

*E-mail: maikov_i@mail.ru

**E-mail: director@oivtran.ru

В целом можно сказать следующее: нет универсальных методов (включая методы дискретизации и методы решения дискретных уравнений), позволяющих эффективно решать все классы задач, связанных с динамикой капли.

В работе представлены математическая модель колебаний капли вязкой несжимаемой жидкости и численный метод решения задачи с использованием адаптивных сеток. При разработке численного метода авторы руководствовались принципом создания эффективного численного алгоритма для расчета колебаний формы капли с большой начальной амплитудой.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Течение несжимаемой вязкой жидкости с постоянными свойствами в поле силы тяжести описывается уравнениями Навье – Стокса в сферической системе координат с симметрией по азимутальному углу.

Запишем уравнения непрерывности и движения в безразмерном виде, используя в качестве характерных величин для координат, времени, компонент скоростей и давления соответственно значения R , $\sqrt{R^3 \rho / \sigma}$, $\sqrt{\sigma / R \rho}$, $\mu \sqrt{\sigma / R^3 \rho}$, где R — радиус невозмущенной сферической капли, ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(ru \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \sin \theta) = 0, \quad (1)$$

а уравнения движения —

$$\left[\frac{\partial(r^2 u \sin \theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(ru \sin \theta)u + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \sin \theta)u \right] \times \\ \times \frac{1}{\text{Oh}} = -r \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2 \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{\sin \theta} + \\ + r^2 \sin^2 \theta \frac{\text{Bo}}{\text{Oh}}, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial(r^2 v \sin \theta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho r u \sin \theta)v + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v \sin \theta)v \right] \times \\ \times \frac{1}{\text{Oh}} = -r^2 \sin \theta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} \right) + 2v \sin \theta - \\ - 2 \sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + u \text{ctg} \theta \right) - \\ - r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\text{Bo}}{\text{Oh}}, \quad (3)$$

где u и v — безразмерные тангенциальная и радиальная компоненты вектора скорости жидкости, p — безразмерное давление, t — безразмерное время, θ , r — безразмерные координаты, $\text{Oh} = \mu / \sqrt{\sigma \rho R}$ — число Оха (Ohnesorge) и $\text{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$ — число Бонда, соответственно представляющие отношения вязких и гравитационных сил к капиллярным силам, g — ускорение свободного падения.

При $\text{Bo} = 0$ система (1)–(3) описывает колебания капли в невесомости.

Уравнения (1)–(3) можно представить в обобщенной дивергентной форме в криволинейной системе координат как

$$\frac{\partial J \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ J \left[\check{U} \varphi - \Gamma^\varphi \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ J \left[\check{V} \varphi - \Gamma^\varphi \left(\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] \right\} = S^\varphi, \quad (4)$$

где φ обозначает компоненты вектора скорости жидкости u и v (для уравнения непрерывности $\varphi = 1$).

В уравнении (4) якобиан J и метрические коэффициенты преобразования α , β , γ вычисляются по формулам

$$J = \frac{r^2 \sin \theta}{\xi_\theta \eta_r - \eta_\theta \xi_r}, \quad \alpha = \xi_\theta^2 + \xi_r^2, \quad (5) \\ \beta = \xi_\theta \eta_\theta + \xi_r \eta_r, \quad \gamma = \eta_\theta^2 + \eta_r^2,$$

где r и θ относятся к первоначальной сферической системе координат, ξ , η — подвижная криволинейная система координат, $\psi_x = \partial \psi / \partial x$ ($\psi = \xi, \eta$; $x = \theta, r$). Производная по времени вычисляется в фиксированной точке в подвижной системе координат.

Контрвариантные компоненты скорости движения жидкости и сетки определяются соответственно как

$$U = u \xi_\theta + v \xi_r, \quad V = u \eta_\theta + v \eta_r, \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} U^S &= - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \xi_\theta + \frac{\partial r}{\partial t} \xi_r \right), \\ V^S &= - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \eta_\theta + \frac{\partial r}{\partial t} \eta_r \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Используя уравнения (6), (7), можно получить относительные скорости

$$\check{U} = U + U^S, \quad \check{V} = V + V^S. \quad (8)$$

Коэффициент обобщенной диффузии в уравнении (4) определяется как

$$\Gamma^\varphi = \begin{cases} 0, & \varphi = 1, \\ \text{Oh}, & \varphi = u, v. \end{cases} \quad (9)$$

Правые части уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned} S^u &= J \left(-\xi_\theta \frac{\partial p}{\partial \theta} - \eta_\theta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{2\partial v}{r^2 \partial \theta} - \right. \\ &\quad \left. - \text{Oh} \frac{u}{r^2 \sin^2 \theta} + \text{Bo} \sin \theta \right), \\ S^v &= J \left[-\xi_r \frac{\partial p}{\partial \theta} - \eta_r \frac{\partial p}{\partial \eta} + \text{Oh} \frac{2v}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + u \text{ctg} \theta \right) - \text{Bo} \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

На свободной поверхности задаются следующие условия:

$$\begin{aligned} n_r^2 \sigma_{rr} + n_\theta^2 \sigma_{\theta\theta} + 2n_r n_\theta \sigma_{r\theta} &= p + \frac{\text{div} \mathbf{n}}{\text{Oh}}, \\ n_r \tau_r \sigma_{rr} + n_\theta \tau_\theta \sigma_{\theta\theta} + (n_r \tau_\theta + \tau_r n_\theta) \sigma_{r\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ — компоненты тензора вязких напряжений, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности, n_r , n_θ — его компоненты, τ_r , τ_θ — компоненты касательного единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$.

Уравнение поверхности запишется в виде

$$F(\theta, r, t) = r - \frac{1}{k(\theta, t)} = 0, \quad (12)$$

где $k(\theta, t)$ — функция, описывающая форму капли.

Кинематическое условие, задающее изменение формы капли, имеет вид

$$\frac{d(F(\theta, r, t))}{dt} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (4) (или система (1)–(3)) дополняется начальными и дополнительными граничными условиями в зависимости от постановки задачи.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного решения уравнений используем преобразование, переводящее границу капли в сферу единичного радиуса. Для случая $\text{Bo} = 0$ (колебания капли в невесомости) используем преобразование координат, показанное на рис. 1. Начало системы координат находится в центре тяжести капли. В преобразованной системе координат капля имеет форму сферы с единичным радиусом.

Для случая колебаний капли на плоской поверхности используем преобразование координат, показанное на рис. 2. Начало системы координат находится в точке касания капли и горизонтальной поверхности. В преобразованной системе координат капля будет иметь форму полусферы с единичным радиусом.

В обоих случаях преобразование координат переводит физическую область (θ, r) в область (ξ, η) :

$$\xi = \theta, \quad \eta = rk(\xi, t). \quad (14)$$

С учетом соотношений (14) можно получить явные выражения для якобиана и метрических коэффициентов преобразования уравнения (4).

Дискретные аналоги уравнения (4) получают с помощью интегроинтерполяционного метода (методом баланса) на сдвинутой сетке на пятиточечном шаблоне ($P, M = E, W, N, S$ — узловые точки пятиточечного шаблона) (рис. 3) и представляются в виде

$$a_P^\varphi \varphi_P = \sum_{E, W, N, S} a_M^\varphi \varphi_M + b_\xi^\varphi \frac{\delta p}{\delta \xi} + b_\eta^\varphi \frac{\delta p}{\delta \eta} + s^\varphi, \quad (15)$$

где $a_M^\varphi = D_m A(|\text{Pe}_m|) + \max(-F_m, 0)$, $m = e, w, n, s$ — точки, определяющие пределы интегрирования, $\text{Pe}_m = F_m/D_m$ — сеточное число Пекле,

$$F_j = J \check{U}_j \delta \eta, \quad F_i = J \check{V}_i \delta \xi,$$

$$D_j = \frac{(J \alpha \Gamma^\varphi)_j}{\delta \xi}, \quad D_i = \frac{(J \alpha \Gamma^\varphi)_i}{\delta \eta}$$

для $j = e, w$ и $i = n, s$. В качестве функции $A(|\text{Pe}|)$ выбираем степенную функцию.

Правая часть уравнения (15) дополнительно включает в себя члены, связанные с аппроксимацией производной по времени, и члены, возникающие при переходе к другой системе координат. Коэффициенты при градиентах давления равны

$$\begin{aligned} b_\xi^u &= -J_u \xi_\theta \delta \xi \delta \eta, & b_\eta^u &= -J_u \eta_\theta \delta \xi \delta \eta, \\ b_\xi^v &= -J_v \xi_r \delta \xi \delta \eta. \end{aligned} \quad (16)$$

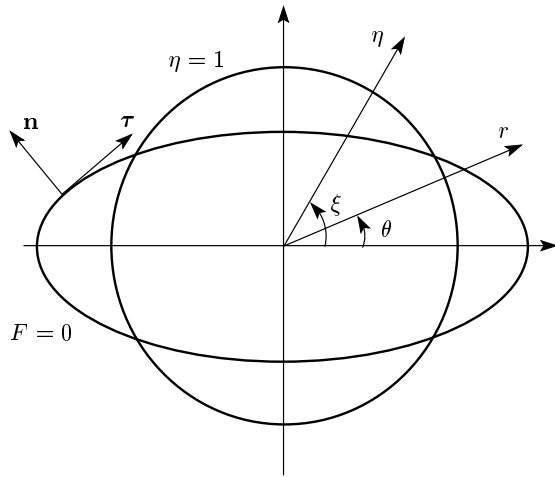


Рис. 1. Преобразование координат ($\text{Bo} = 0$): исходная система координат (θ, r) ; преобразованная система координат (ξ, η) ; $F = 0$ — уравнение поверхности в координатах (θ, r) ; $\eta = 1$ — уравнение поверхности в координатах (ξ, η)

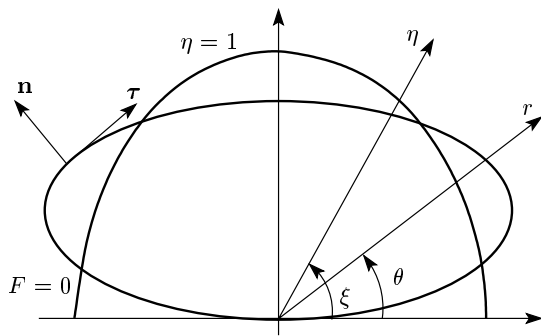


Рис. 2. Преобразование координат в случае колебаний капли на плоской поверхности (обозначения те же, что и на рис. 1)

Аппроксимация уравнения непрерывности (1) приводит к уравнению

$$[(JU)_e - (JU)_w] \delta\eta + [(JV)_n - (JV)_s] \delta\xi = 0. \quad (17)$$

Дискретное уравнение (15) запишем в виде

$$u^i = \tilde{u}^i - \alpha_{ij} \Delta_{\xi^i} p, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где u^1 и u^2 — компоненты скорости u и v , ξ^1 и ξ^2 — координаты ξ и η ,

$$\tilde{u}^i = \sum_{E,W,N,S} \frac{a_M^i}{a_P^i} u_M^i + \frac{s^i}{a_P^i}, \quad \alpha_{ij} = \frac{b_{\xi^i}^i}{a_P^i}.$$

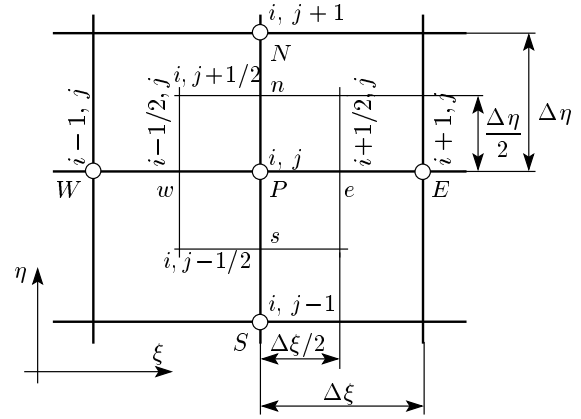


Рис. 3. Основная сетка в системе координат (ξ, η) для переменных p, ρ и условные обозначения. Сетка для u получается сдвигом на $\Delta\xi/2$ по оси ξ , сетка для v — сдвигом на $\Delta\eta$ по оси η

С учетом соотношений (6) контрвариантные компоненты скоростей можно представить в виде

$$\beta_{ki} u^i = U^k = \tilde{U}^k - \beta_{ki} \alpha_{ij} \Delta_{\xi^i} p, \quad (19)$$

$$\tilde{U}^k = \beta_{ki} \tilde{u}^i,$$

где β_{ki} — метрические коэффициенты, определяемые соотношениями (5), Δ_{ξ^i} — дифференциальный оператор.

Метод решения состоит из двух шагов: «предиктор» и «корректор».

На шаге «предиктор» давление, полученное на временном шаге t^n , используется для получения скоростей из уравнения (18):

$$u_{(1)}^i = \tilde{u}_{(1)}^i - \alpha_{ij} \Delta_{\xi^i} p^n. \quad (20)$$

Контрвариантные компоненты скоростей определяются из соотношений (19):

$$U_{(1)}^k = \beta_{ki} u_{(1)}^i. \quad (21)$$

На шаге «корректор» определяем новые компоненты скоростей $U_{(2)}^k$,

$$U_{(2)}^k = \tilde{U}_{(1)}^k - \beta_{ki} \alpha_{ij} \Delta_{\xi^i} (p_{(1)} - p^n), \quad (22)$$

при условии, что поле $U_{(2)}^k$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\Delta_{\xi^i} (JU_{(2)}^k) = 0. \quad (23)$$

Уравнение для нового поля давления $p_{(1)}$ имеет вид

$$\Delta_{\xi^i} (J\beta_{ki} \alpha_{ij} \Delta_{\xi^i} (p_{(1)} - p^n)) = \Delta_{\xi^i} (JU_{(1)}^k). \quad (24)$$

Таблица 1. Период t_1 первого колебания

Oh = 0.1			Oh = 0.01			Ссылки
$f_0 = 0.01$	$f_0 = 0.5$	$f_0 = 0.9$	$f_0 = 0.01$	$f_0 = 0.5$	$f_0 = 0.9$	
2.2570	—	—	2.2218	—	—	[12]
2.2904	2.4436	2.6604	2.2257	2.4805	2.9049	[13]
2.2900	2.4242	2.6400	2.2200	2.4800	2.9300	[14]
—	—	—	2.2232	—	—	[15]
2.3109	2.4529	2.6298	2.2269	2.4604	2.8853	Настоящая работа

Таблица 2. Отношение a/b полуосей эллипсоида в момент времени t_1

Oh = 0.1			Oh = 0.01			Ссылки
$f_0 = 0.01$	$f_0 = 0.5$	$f_0 = 0.9$	$f_0 = 0.01$	$f_0 = 0.5$	$f_0 = 0.9$	
1.0049	—	—	1.0135	—	—	[12]
1.0061	1.2908	1.4343	1.0136	1.7622	2.3307	[13]
1.0061	1.2876	1.4320	1.0135	1.7596	2.3043	[14]
1.0058	1.2782	1.4287	1.0132	1.7475	2.2879	Настоящая работа

Шаг корректора повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие (23).

Вся процедура предиктор–корректор повторяется до достижения заданной точности уравнений непрерывности и движения. Граничные условия (11) совместно с уравнением непрерывности используются для определения значений давления и скоростей на границе. Форма капли рассчитывается из уравнения (12). Алгоритм вычислений переменных (u, v, p, k) на одном временном шаге представляется следующей схемой:

- 1) задаются форма капли, поля скоростей и давления, вычисляются метрические коэффициенты;
- 2) вычисляются коэффициенты уравнений движения и решается уравнение (20);
- 3) решается уравнение (24) для поля давления;
- 4) вычисляются компоненты скорости по уравнению (22); возврат к п. 2, если не выполняется условие (23);
- 5) после вычисления новой формы капли и метрических коэффициентов возвращаемся к п. 1.

Итерационная процедура дополняется двумя корректирующими процедурами, обеспечивающими постоянство объема капли и выполнение условия $\check{U} = 0$ и $\check{V} = 0$ на границе капли. Дискретные уравнения решались методом прогонки [11].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проверки адекватности разработанной численной модели рассматривалась задача колебаний капли в невесомости. Начальное возмущение формы капли задавалось сферической функцией второго порядка

$$k = \frac{1}{\gamma [1 + f_0 P_2(\cos \theta)]},$$

где $P_2(\cos \theta)$ — полином Лежандра второго порядка, f_0 — амплитуда первоначального возмущения, $\gamma = [35/(35 + 21f_0^2 + 2f_0^3)]^{1/3}$.

Результаты расчетов для различных исходных данных представлены в табл. 1 и 2. В численных расчетах использовалось преобразование координат, показанное на рис. 1. Все вычисления проводились на сетке с разбиением 40×40 , шаг по времени составлял $\Delta t = 0.0005$. Анализ чувствительности результатов к количеству точек разбиения показал, что дальнейшее увеличение числа точек не приводит к увеличению точности (при переходе от сетки 40×40 к сетке 60×60 разброс по значениям периода и амплитуды колебаний составлял менее 0.5%). Была выявлена слабая чувствительность результатов к шагу по времени, который изменялся от 0.0005 до

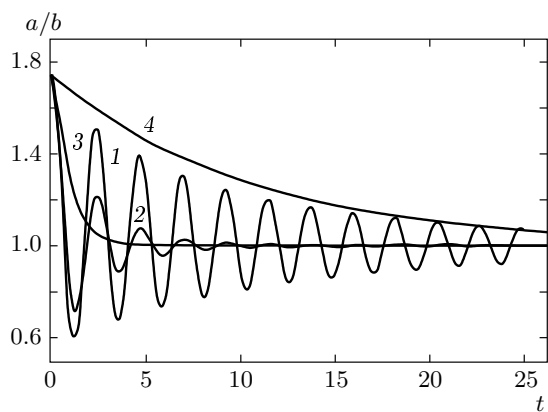


Рис. 4. Режимы колебаний для $f_0 = 0.4$ при различных числах Oh : $Oh = 0.01$ (1), 0.1 (2), 1 (3), 10 (4)

0.00001. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов. В целом наблюдается некоторое уменьшение периода и амплитуды колебаний по сравнению с данными других авторов. По-видимому, это является следствием того, что разработанная численная модель обладает большей искусственной вязкостью по сравнению с моделями, основанными на методе конечных элементов [13, 14].

Режимы колебаний при различных числах Oh представлены на рис. 4. При $Oh > 1$ колебания имеют аperiодический характер и жидкость с течением времени стремится принять равновесную сферическую форму. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами работ [13, 14].

Разработанная численная модель при $Bo \neq 0$ позволяет моделировать колебания капли в поле силы тяжести. Рассматривалась задача колебаний капли, возникающих в результате ее падения с некоторой высоты h на горизонтальную поверхность. При моделировании предполагалось, что в начальный момент времени капля имеет сферическую форму, касается поверхности в одной точке и все точки капли имеют скорость центра масс V_c . В отличие от колебаний в невесомости, уравнения модели дополняются граничными условиями на горизонтальной поверхности (нулевые значения компонент скорости) и значением угла смачивания в точке контакта. В работе предполагалось, что значение угла смачивания остается постоянным, и координата точки контакта вычислялась соответствующей экстраполяцией свободной поверхности.

Результаты моделирования и кадры скоростной видеосъемки (1000 кадров в секунду) затухающих

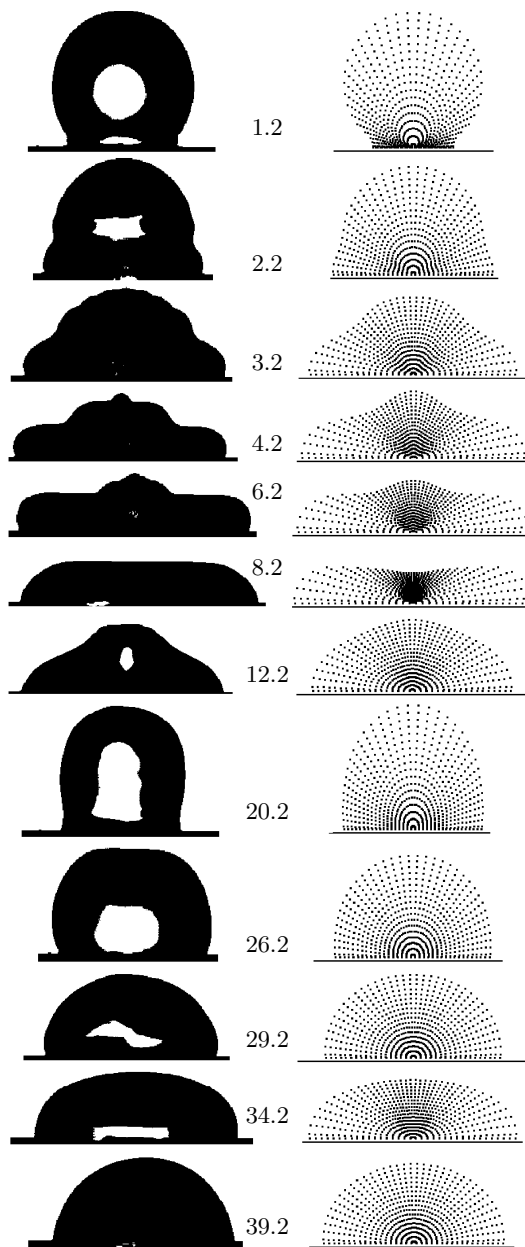


Рис. 5. Кадры скоростной видеосъемки (слева) и расчетная форма капли (справа) в различные моменты времени τ , указанного около кадров в миллисекундах

колебаний капли дистиллированной воды, падающей из капилляра на плоскую фторопластовую поверхность [16], представлены на рис. 5. Точки, отображающие расчетную форму капли, соответствуют расчетной сетке.

Расстояние от конца капилляра до плоской поверхности составляло 18 мм, радиус сферы эквивалентного объема капли — 1.5 мм. При числен-

ных расчетах использовалось преобразование координат, показанное на рис. 2. Безразмерные критерии $Oh = 0.003$ и $Bo = 0.31$ соответствуют следующим значениям теплофизических свойств жидкости: плотность $\rho = 1000$ кг/м³, коэффициент динамической вязкости $\mu = 0.001$ кг/м·с, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.073$ Н/м. Скорость центра масс $V_c = 0.55$ м/с.

При $\tau = 1.2$ мс форма капли является практически сферической. В дальнейшем до времени $\tau = 8.2$ мс идет процесс растекания капли. До $\tau = 4.2$ мс происходит интенсивное изменение формы за счет горизонтального течения жидкости под действием инерционных сил. Далее движение капли в горизонтальном направлении замедляется за счет сил трения и поверхностных сил и форма капли остается практически постоянной за исключением центральной части, где продолжается движение жидкости вертикально вниз под действием силы тяжести ($\tau = 6.2$ мс, $\tau = 8.2$ мс). В дальнейшем центральная часть капли практически останавливается и на ее поверхности возникают колебания малой амплитуды с более высокой частотой (рябь). Далее происходит движение капли за счет накопленной поверхностной энергии в обратном направлении с уменьшением площади соприкосновения ($\tau = 12.2$ мс, $\tau = 20.2$ мс) и т. д. При $\tau > 39.2$ мс площадь соприкосновения остается постоянной и наблюдаются линейные колебания малой амплитуды; решение для периода колебаний переходит в соотношение Рэлея [18].

Результаты моделирования как по фазам и амплитудам колебаний, так и по форме капли хорошо согласуются с полученными в эксперименте.

5. ВЫВОДЫ

Разработанная численная модель нелинейных колебаний капли вязкой жидкости адекватно описывает процессы как свободных (в невесомости), так и вынужденных (с учетом внешних сил) колебаний. Проведенные расчеты показали эффективность алгоритма, в котором осуществляется аналитическое преобразование области и не требуется дополнительно на каждом временном шаге вычислять координаты сетки и метрические коэффициенты. Кроме того, использованное преобразование не нарушает геометрического закона сохранения, что позволяет не решать отдельно уравнение для изменения якобиана преобразования в подвижной системе координат. За счет аналитического преобразования системы координат осуществляется выполнение усло-

вия равенства скорости жидкости и скорости поверхности капли на ее границе (условие «непротекания» жидкости). Результаты расчетов колебаний капли на плоской несмачиваемой поверхности показали возможность как качественного, так и количественного описания процесса колебаний. Разумные времена счета и удовлетворительная точность позволяют использовать разработанный алгоритм при решении обратных задач (например, определение теплофизических свойств жидкости динамическими методами [17]). Введение дополнительно скалярного уравнения энергии позволит решать задачи в неизоэнергических условиях и с наличием фазовых переходов (например, задача Стефана, испарение и затвердевание капли и т. д.), а также гидродинамические задачи, связанные со слиянием и разрушением капель.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.-M. Ho and Y.-C. Tai, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **30**, 579 (1998).
2. M. Francois and W. Shyy, *Progr. Aerospace Sci.* **38**, 275 (2002).
3. N. Ghigier and R. D. Reitz, *Atomization Sprays* **9**, 31 (1999).
4. P.-F. Paradis, T. Ishikawa, and S. Yoda, *Int. J. Thermophys.* **24**, 1121 (2003).
5. J. M. Floryan and H. Rasmussen, *Appl. Mech. Rev.* **42**, 323 (1989).
6. E. D. Wilkes, S. D. Phillips, and A. Basaran, *Phys. Fluids* **11**, 3577 (1999).
7. D. B. Kothe and R. C. Mjolsness, *AIAA J.* **30**, 2694 (1992).
8. C. W. Hirt and B. D. Nichols, *J. Comp. Phys.* **39**, 201 (1981).
9. W. Shyy., H. S. Udaykumar, M. M. Rao et al., *Computational Fluid Dynamics with Moving Boundary*, Taylor & Francis, Washington (1996).
10. S. O. Unverdi and G. Tryggvason, *J. Comp. Phys.* **100**, 25 (1992).
11. С. Патанкар, *Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости*, Энергоиздат, Москва (1984).

12. A. Prosperetti, J. Fluid Mech. **100**, 333 (1980).
13. O. A. Basaran, J. Fluid Mech. **241**, 169 (1992).
14. S. Meradji, T. P. Lyubimova, D. V. Lyubimov et al., Cryst. Res. Technol. **36**, 729 (2001).
15. F. Mashayek and N. Ashgriz, Phys. Fluids **10**, 1071 (1998).
16. Л. Б. Директор, И. Л. Майков, А. А. Серeda, в сб. *Теплофизические свойства веществ (жидкие металлы, сплавы и наносистемы)*, Труды II Международного семинара, Нальчик, Кабардино-Балкарский государственный университет (2006), с. 67.
17. I. Egry, J. Non-Cryst. Sol. **250–252**, 63 (1999).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2003).