

# ГАМИЛЬТОНОВО ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКА

А. О. Максимов\*

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
690041, Владивосток, Россия*

Поступила в редакцию 9 января 2007 г.

Дано гамильтоново описание динамики несферического пузырька в жидкости. Основное внимание уделено введению канонических переменных. Получен явный вид разложения оператора Дирихле – Неймана по степеням смещения стенки пузырька от равновесного положения. Найдены первые члены (второй, третьей и четвертой степеней) разложения гамильтониана по степеням канонических переменных, описывающие спектр и взаимодействие трех существенно различных мод: монополярных (пульсационных), дипольных (трансляционных) и поверхностных колебаний. Анализ кубической нелинейности проведен для задачи о генерации ряби Фарадея на стенке пузырька в акустическом поле. Исследована возможность реализации распадных процессов при взаимодействии поверхностных колебаний для первых (наблюдаемых в эксперименте) пятнадцати мод.

PACS: 47.55.dd, 47.10.Df, 43.25.Rq

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная динамика газового включения (пузырька) в слабвязкой жидкости, испытывающего воздействие акустического поля, являлась предметом интенсивных исследований в течение продолжительного времени. Целью большинства ранних работ было изучение поведения пузырька как источника звука. Для этой проблемы наибольший интерес представляли объемные пульсации. Поскольку искажения формы — поверхностные колебания — являются гораздо более слабым источником звука (по крайней мере в линейном приближении) и поведение сферически-симметричного пузырька проще анализировать, большинство теоретических работ по динамике газовых включений основывалось на этой модели. В то же время газовые пузырьки очень часто изначально являются несферическими или становятся таковыми в результате развития неустойчивостей. Поведение таких несферических пузырьков описано гораздо менее подробно [1].

Ключевым обстоятельством, определяющим преимущества использования гамильтонова формализма для описания динамики несферических пузырьков, является возможность представления нелиней-

ных граничных условий на поверхности пузырька с помощью функциональных производных от энергии. Этот формализм был предложен Захаровым [2] для описания поверхностных волн. Развитие этого подхода — установление связи между гамильтоновой структурой уравнений, симметрией и законами сохранения было осуществлено Бенджаменом и Олвером [3], и в настоящем исследовании мы прямо следуем данным работам.

## 2. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА

Рассмотрим газовый пузырек радиуса  $R_0$ , испытывающий воздействие акустической волны с давлением  $P_1(t)$ . Сжимаемость жидкости можно не учитывать, если радиус пузырька  $R_0$  много меньше длины акустической волны  $\lambda$ . В этом случае потенциал скорости  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость. Мы будем использовать сферическую систему координат  $(r, \vartheta, \alpha)$ . Задавая уравнение

\*E-mail: maksimov@poi.dvo.ru

поверхности пузырька,  $r = R_0 + \xi(\vartheta, \alpha, t)$ , мы можем записать кинематическое граничное условие в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) (r - R)_{r=R_0+\xi} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R_0+\xi} - \frac{1}{(R_0+\xi)^2} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)_{r=R_0+\xi} - \frac{1}{(R_0+\xi)^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)_{r=R_0+\xi}. \quad (2)$$

Динамическое граничное условие состоит в том, что разность давлений на межфазной поверхности определяется поверхностным натяжением. Так, если величины  $P_l$  и  $P_g$  описывают давление в жидкости и газе (в пузырьке), то

$$P_l = P_g - \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n}), \quad P_g = P_0 (V_0/V)^\gamma, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности пузырька,

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\mathfrak{K}} \left[ \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right],$$

$$\mathfrak{K} = \left[ 1 + \frac{1}{(R_0 + \xi)^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{1/2},$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\alpha$  — единичные векторы вдоль соответствующих осей. Мы используем политропный закон уравнения состояния газа в пузырьке,  $V, V_0$  — мгновенный и равновесный объемы пузырька,  $\gamma$  — индекс политропы,  $P_0$  — равновесное давление в пузырьке. Давление  $P_l$  в жидкости описывается уравнением Бернулли

$$P_l = -\rho_0 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right] + P_1(t),$$

где  $\rho_0$  — равновесная плотность,  $P_1(t) = P_\infty + P_{ext}(t)$  — внешнее давление,  $P_\infty$  и  $P_{ext}$  — соответственно постоянная и переменная составляющие давления.

Поведение нестационарных безвихревых потоков жидкости в пространственной области  $D$ , имеющей свободную границу  $S$ , может быть сведено к рассмотрению динамики поверхности [4–6]. В

этом формализме сама форма поверхности  $S$  и граничное значение потенциала на этой поверхности,  $\Phi = \varphi(r, \vartheta, \alpha, t)|_{r=R_0+\xi}$ , являются динамическими переменными, определяющими состояние системы. Это означает, что для каждого момента времени  $t$  функция  $\xi(\vartheta, \alpha, t)$  определяет область, заполненную жидкостью, а  $\Phi(\vartheta, \alpha, t)$  — распределение потенциала (скорости) в жидкости, поскольку  $\varphi(r, \vartheta, \alpha, t)$  является единственным решением внешней задачи Дирихле  $\varphi(r, \vartheta, \alpha)|_{r=R_0+\xi} = \Phi(\vartheta, \alpha, t)$  для уравнения Лапласа (1).

Уравнения (1)–(3) обладают гамильтоновой структурой с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= T + U + A, \quad U = V_{in} + V_s, \\ A &= P_1(t) (V - V_0), \\ T &= \rho_0 \int \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\mathbf{x}, \\ V_s &= \sigma \int \mathfrak{K} (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha, \\ V_{in} &= - \int P_g dV = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\gamma - 1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T$  — кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная энергия, являющаяся суммой внутренней энергии  $V_{in}$  и поверхностной энергии  $V_s$ , слагаемое  $A$  описывает работу, совершаемую внешним акустическим полем.

Гамильтонов формализм хорошо разработан для волн на плоской поверхности  $S$  [2, 3, 5], где канонически сопряженными переменными являются отклонение поверхности от равновесного положения,  $\xi(x, y, t)$ , и граничное значение потенциала  $\varphi(x, y, \xi(x, y, t), t) \equiv \Phi(x, y, t)$ . Соответствующие канонические уравнения движения имеют вид [2]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Phi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \xi},$$

где  $\delta/\delta \xi, \delta/\delta \Phi$  обозначают функциональные производные.

Однако потенциал  $\Phi(\vartheta, \alpha, t)$  и смещение  $\xi(\vartheta, \alpha, t)$  не являются сопряженными переменными в задаче о динамике пузырька. Это обстоятельство хорошо известно для чисто радиальных колебаний [7]. В этом случае уравнение (1) и кинематические и динамические граничные условия приводят к уравнению Рэлея, которое в нормированных переменных

$$\begin{aligned} u &= \frac{R}{R_0}, \quad \dot{u} = \frac{du}{d\tau}, \quad \tau = t\Omega_0, \\ \Omega_0^2 &= \frac{3\gamma P_0}{\rho_0 R_0^2}, \quad u_1 = \frac{P_\infty + P_{ext}}{P_0} \end{aligned}$$

может быть записано в виде

$$\ddot{u} = \frac{1}{u} \left[ -\frac{3}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{3\gamma} \left( \frac{1}{u^{3\gamma}} - u_1 \right) \right]. \quad (5)$$

Уравнение Рэлея в постоянном внешнем поле имеет интеграл движения — гамильтониан [7]

$$H = \frac{u^3 \dot{u}^2}{2} + \frac{1}{3\gamma} \left( \frac{1}{3(\gamma-1)u^{3(\gamma-1)}} + \frac{u^3 u_1}{3} \right) = \text{const.} \quad (6)$$

Переменной, сопряженной нормированному радиусу  $u$  пузырька, является полный радиальный импульс жидкости [7]  $\Pi = u^3 \dot{u}$ . Потенциал для чисто радиальных колебаний имеет вид

$$\varphi = -\frac{\partial R}{\partial t} \frac{R^2}{r}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Таким образом, сопряженная переменная может быть выражена в терминах граничного значения потенциала

$$\Pi = u^3 \dot{u} = -\frac{u^2 \Phi}{\Omega_0 R_0^2}. \quad (7)$$

Это выражение подсказывает форму сопряженной переменной для гамильтониана (4). Так, если в качестве «импульса» использовать переменную  $\Pi = -\rho_0 (R_0 + \xi)^2 \Phi(\vartheta, \alpha, t)$ , то канонические уравнения движения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Pi}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \xi} \quad (8)$$

совпадают с кинематическим и динамическим граничными условиями. Вывод этих формул приведен в Приложении А. Конечно, выбор канонических переменных неоднозначен и зависит от особенностей анализируемой проблемы. Так, для поверхности  $S$ , близкой к сферической, функции  $-\rho_0 \Phi(\vartheta, \alpha, t)$ ,  $[R_0 + \xi(\vartheta, \alpha, t)]^3/3$  [6] или  $\xi(1 + \xi/2R_0)$ ,  $-\rho_0 \Phi(\vartheta, \alpha, t)(1 + \xi/R_0)$  [8] также могут быть использованы в качестве сопряженных переменных. Тем не менее выбор отклонения  $\xi(\vartheta, \alpha, t)$  от равновесной формы в качестве одной из канонических переменных является предпочтительным для анализа искажений формы пузырька, в частности описания ряби Фарадея, поскольку обеспечивает прямое сравнение с подавляющим большинством полученных ранее результатов.

К сожалению, гамильтониан  $H$  не может быть записан в замкнутом виде как функционал  $\Pi$  и  $\xi$ ,

однако он допускает представление в виде ряда по «координатам»  $\xi$  и «импульсам»  $\Pi$

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

Выражение для кинетической энергии может быть преобразовано к виду

$$T = \frac{\rho_0}{2} \int \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} = \frac{\rho_0}{2} \int [\text{div}(\varphi \nabla \varphi) - \varphi \nabla^2 \varphi] d\mathbf{r} = -\frac{\rho_0}{2} \int \Phi \Phi_{(n)} \mathfrak{R}(R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha, \quad (9)$$

где  $\Phi_{(n)} = (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)_{r=R_0+\xi}$ . Заметим, что все входящие в интеграл функции, за исключением нормальной производной  $\Phi_{(n)}$ , зависят только от двумерных координат  $(\vartheta, \alpha)$ . Поскольку  $\varphi$  является гармонической функцией, нормальная производная  $\Phi_{(n)}$  связана со значением потенциала  $\varphi$  на границе.

Эта связь может быть установлена с помощью оператора Дирихле–Неймана  $\hat{\mathcal{J}}(\xi)$ , который сопоставляет каждому граничному значению гармонической функции значение ее нормальной производной на границе, умноженное на метрический сомножитель [9]

$$\hat{\mathcal{J}}(\xi) [\Phi(\vartheta, \alpha, t)] = \mathfrak{R} \Phi_{(n)} = \left[ \Phi_{(r)} - \frac{\Phi_{(\vartheta)} \xi_{\vartheta}}{(R_0 + \xi)^2} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi_{(\alpha)} \xi_{\alpha}}{(R_0 + \xi)^2} \right]. \quad (10)$$

Очевидно, что этот оператор — линейный по отношению к  $\Phi$ , однако он является нелинейным и, более того, нелокальным по отношению к переменной  $\xi$ , которая задает границу жидкой области  $S$ .

Важным свойством оператора  $\hat{\mathcal{J}}(\xi)$  является то, что он вычисляем. В работе [10] показано, что оператор Дирихле–Неймана аналитически зависит от  $\xi$  и поэтому оператор  $\hat{\mathcal{J}}(\xi)$  может быть записан в виде сходящегося ряда Тэйлора. Это разложение в ряд Тэйлора по степеням смещения поверхности удобно использовать для описания слабонелинейной динамики поверхностных волн, так как в этом случае следует учесть только несколько первых членов разложения (как правило, до третьего порядка по  $\xi(\vartheta, \alpha, t)$  включительно). Разложение в ряд Тэйлора оператора Дирихле–Неймана  $\hat{\mathcal{J}}(\xi)$  на поверхности несферического пузырька с точностью до  $O(\xi^3)$  включительно может быть получено по аналогии со случаем волн на плоской поверхности (см. Приложение Б):

$$\hat{\mathcal{J}}(\xi) [\Phi(\vartheta, \alpha, t)] = \frac{1}{R_0} \left\{ -\hat{D}\Phi + s\hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi - \hat{D}(s\hat{D}\Phi) - \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \frac{\partial s}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \frac{\partial s}{\partial\alpha} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}s^2\hat{D}(\hat{D} + 1)(\hat{D} + 2)\Phi + s\frac{\partial}{\partial\vartheta}s\frac{\partial}{\partial\vartheta} [(\hat{D} + 2)\Phi] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}s\frac{\partial}{\partial\alpha}s\frac{\partial}{\partial\alpha} [(\hat{D} + 2)\Phi] + \frac{1}{2}\hat{D} [s^2\hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi] + \right. \\ \left. + s\hat{D}(\hat{D} + 1)(s\hat{D}\Phi) - \hat{D} [s\hat{D}(s\hat{D}\Phi)] - \frac{\partial s}{\partial\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (s\hat{D}\Phi) - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial s}{\partial\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha} (s\hat{D}\Phi) \right\}, \quad (11)$$

где  $s \equiv \xi/R_0$ , а

$$\hat{D} = \frac{1}{2} + \sqrt{\hat{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{4}}$$

— линейный оператор, выражающийся через квадрат углового момента  $\hat{\mathbf{I}}^2$ . Действие оператора  $\hat{D}$  на произвольную функцию  $u(\vartheta, \alpha)$  определяется следующим образом:

$$\hat{D}u(\vartheta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (l+1)u_{lm}Y_{lm}(\vartheta, \alpha),$$

где

$$u_{lm} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta Y_{lm}^*(\vartheta, \alpha) u(\vartheta, \alpha),$$

а  $Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$  — сферическая функция. Оператор  $\hat{D}$  яв-

ляется аналогом линейного интегрального оператора в задаче о волнах на плоской поверхности

$$\hat{D}u(x, y) = \iint dk_x dk_y \sqrt{k_x^2 + k_y^2} u(k_x, k_y) \times \\ \times \exp [i(k_x x + k_y y)].$$

Подставляя это разложение оператора Дирихле–Неймана в выражение для кинетической энергии и сохраняя члены нулевого, первого и второго порядков по  $\xi/R_0$ , получаем

$$T = -\frac{\rho_0}{2} \int \Phi \Phi_{(n)} \Re (R_0 + \xi)^2 \sin\vartheta d\vartheta d\alpha \approx \\ \approx T_0 + T_1 + T_2,$$

где

$$T_0 = -\frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi \hat{\mathcal{J}}_0(\Phi) \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = \\ = \frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi \hat{D}(\Phi) \sin\vartheta d\vartheta d\alpha, \quad (12)$$

$$T_1 = -\frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi [\hat{\mathcal{J}}_1(\Phi) + 2s\hat{\mathcal{J}}_0(\Phi)] \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = \\ = \frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi \left[ -s\hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi + \hat{D}(s\hat{D}\Phi) + \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \frac{\partial s}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \frac{\partial s}{\partial\alpha} + 2s\hat{D}\Phi \right] \sin\vartheta d\vartheta d\alpha, \quad (13)$$

$$T_2 = -\frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi [\hat{\mathcal{J}}_2(\Phi) + 2s\hat{\mathcal{J}}_1(\Phi) + s^2\hat{\mathcal{J}}_0(\Phi)] \sin\vartheta d\vartheta d\alpha = \frac{\rho_0 R_0}{2} \int \Phi \left\{ -\frac{1}{2}s^2\hat{D}(\hat{D} + 1)(\hat{D} + 2)\Phi + s\frac{\partial}{\partial\vartheta}s\frac{\partial}{\partial\vartheta} \times \right. \\ \times [(\hat{D} + 2)\Phi] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}s\frac{\partial}{\partial\alpha}s\frac{\partial}{\partial\alpha} [(\hat{D} + 2)\Phi] + \frac{1}{2}\hat{D} [s^2\hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi] + s\hat{D}(\hat{D} + 1)(s\hat{D}\Phi) - \\ \left. - \hat{D} [s\hat{D}(s\hat{D}\Phi)] - \frac{\partial s}{\partial\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (s\hat{D}\Phi) - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial s}{\partial\alpha} \frac{\partial}{\partial\alpha} (s\hat{D}\Phi) - 2s^2\hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi + 2s\hat{D}(s\hat{D}\Phi) + \right. \\ \left. + 2s\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \frac{\partial s}{\partial\vartheta} + \frac{2}{\sin^2\vartheta}s\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \frac{\partial s}{\partial\alpha} + s^2\hat{D}\Phi \right\} \sin\vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (14)$$

Учет членов более высокого порядка не вызывает принципиальных сложностей, но большинство эффектов, связанных с возбуждением ряби Фарадея на поверхности пузырька, может быть объяснено в рам-

ках настоящего подхода, т. е. при рассмотрении нелинейных членов до третьего порядка включительно.

Нелинейные вклады (13) и (14) в кинетическую энергию могут быть преобразованы к виду

$$T_1 = \frac{\rho_0 R_0}{2} \int s \left[ (\hat{D}\Phi)^2 - (\nabla_s \Phi)^2 \right] \sin \vartheta d\vartheta d\alpha, \quad (15)$$

$$T_2 = \frac{\rho_0 R_0}{2} \int s \hat{D}(\Phi) \left[ \hat{D}(s\hat{D}\Phi) + s\nabla_s^2 \Phi - s\hat{D}\Phi \right] \sin \vartheta d\vartheta d\alpha,$$

допускающему непосредственное сопоставление с выражением для вклада поверхностных волн на плоской поверхности [11]. Выше мы ввели следующее обозначение для поверхностного градиента:

$$\nabla_s \equiv \mathbf{e}_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Подставляя потенциал, выраженный через каноническую переменную,

$$\Phi(\vartheta, \alpha, t) = -\Pi \left[ \rho_0 (R_0 + \xi)^2 \right]^{-1},$$

получим искомую форму гамильтониана в виде ряда по каноническим переменным:

$$H_0 = \frac{1}{2\rho_0 R_0^3} \int \Pi \hat{D}(\Pi) \sin \vartheta d\vartheta d\alpha + 6\pi\gamma \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) R_0^3 \bar{s}^2 -$$

$$- \frac{\sigma R_0^2}{2} \int s (\nabla_s^2 s) \sin \vartheta d\vartheta d\alpha - 4\pi\sigma R_0^2 \bar{s}^2 + 4\pi P_{ext} R_0^3 \bar{s}, \quad (16)$$

$$H_1 = \frac{1}{2\rho_0 R_0^3} \int s \left[ (\hat{D}(\Pi))^2 - (\nabla_s \Pi)^2 - 4\Pi \hat{D}(\Pi) \right] \sin \vartheta d\vartheta d\alpha +$$

$$+ 12\pi\gamma R_0^3 \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \bar{s} \left[ \bar{s}^2 - \frac{1}{2}(\gamma + 1)\bar{s}^2 \right] - \frac{8\pi\sigma R_0^2}{3} \bar{s}^3 + 4\pi P_{ext} R_0^3 \bar{s}^2, \quad (17)$$

$$H_2 = \frac{1}{2\rho_0 R_0^3} \int \left\{ s \hat{D}(\Pi) \left[ \hat{D}(s\hat{D}(\Pi)) + s\nabla_s^2(\Pi) \right] + s \left[ 4\nabla_s(\Pi) \cdot \nabla_s(s\Pi) - 4\hat{D}(\Pi)\hat{D}(s\Pi) - s(\hat{D}(\Pi))^2 \right] + \right.$$

$$+ 2s \left[ 3s\Pi\hat{D}(\Pi) + 2\Pi\hat{D}(s\Pi) \right] \left. \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha + 4\pi\gamma R_0^3 \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \times$$

$$\times \left[ \bar{s} \bar{s}^3 + \frac{3}{2}(\bar{s}^2)^2 - \frac{9}{2}(\gamma + 1)\bar{s}^2 \bar{s}^2 + \frac{9}{8}(\gamma + 1)(\gamma + 2)\bar{s}^4 \right] -$$

$$- \frac{\sigma R_0^2}{8} \int \left[ \nabla_s^2 \left( \frac{s^2}{2} \right) - s(\nabla_s^2 s) \right]^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha + \frac{4\pi}{3} P_{ext} R_0^3 \bar{s}^3, \quad (18)$$

где мы ввели обозначение  $\bar{A} \equiv (4\pi)^{-1} \int A \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ . Отметим, что для чисто радиальных колебаний выражения (16)–(18) переходят в первые три члена разложения гамильтониана (6).

Используя явный вид гамильтониана (16)–(18), можно найти структуру канонических уравнений (8):

$$\dot{s} = \frac{1}{\rho_0 R_0^4} \left\{ \hat{D}(\Pi) + \hat{D}(s\hat{D}(\Pi)) + \nabla_s \cdot s\nabla_s \Pi - 2s\hat{D}(\Pi) - 2\hat{D}(s\Pi) + \hat{D} \left[ s\hat{D}(s\hat{D}(\Pi)) + \frac{1}{2}s^2\nabla_s^2 \Pi \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\nabla_s^2 (s^2\hat{D}(\Pi)) - 2\nabla_s \cdot s\nabla_s (s\Pi) - 2s\nabla_s \cdot s\nabla_s \Pi - \hat{D}(s^2\hat{D}(\Pi)) + 3s^2\hat{D}(\Pi) + 3\hat{D}(s^2\Pi) + 4s\hat{D}(s\Pi) \right\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi} = & -\frac{1}{\rho_0 R_0^3} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \hat{D}(\Pi) \right)^2 - (\nabla_s \Pi)^2 \right] - 2\Pi \hat{D}(\Pi) + 2[\nabla_s \Pi \cdot \nabla_s (s\Pi) - \Pi \nabla_s \cdot s \nabla_s \Pi] + \right. \\
& + \hat{D}(\Pi) \left[ \hat{D}(s\hat{D}(\Pi)) + s \nabla_s^2 \Pi \right] - 2s \left[ \hat{D}(\Pi) \hat{D}(s\Pi) + \Pi \hat{D}(s\hat{D}(\Pi)) \right] - 2s \left( \hat{D}(\Pi) \right)^2 + 3s\Pi \hat{D}(\Pi) + 3\Pi \hat{D}(s\Pi) \left. \right\} - \\
& - 3\gamma \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) R_0^2 \left\{ \bar{s} + \left[ \bar{s}^2 - \frac{3}{2}(\gamma+1)\bar{s}^2 + 2\bar{s}s \right] + \frac{1}{3} \left[ \bar{s}^3 + 3s^2 \bar{s} + 3s\bar{s}^2 - 9(\gamma+1)s(\bar{s}^2 + \bar{s}^2) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{9}{2}(\gamma+1)(\gamma+2)\bar{s}^3 \right] \right\} + \sigma R_0^2 \left\{ (\nabla_s^2 + 2)s + 2s^2 + s \left( \nabla_s^2 \frac{s^2}{2} - s \nabla_s^2 s \right) - \left( \nabla_s^2 \frac{s^2}{2} - s \nabla_s^2 s \right) \nabla_s^2 s - \right. \\
& \left. - \nabla_s^2 \left[ s \left( \nabla_s^2 \frac{s^2}{2} - s \nabla_s^2 s \right) \right] \right\} - P_{ext} R_0^2 (1+2s+s^2). \quad (20)
\end{aligned}$$

Эволюция во времени, описываемая уравнениями (8) или их редуцированной формой (19), (20), сохраняет ряд физических величин. Теорема Нётер утверждает, что каждая однопараметрическая группа симметрии для вариационной задачи определяет закон сохранения, которому удовлетворяет решение соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа. Олвер [12] установил связь между симметриями и законами сохранения для гидродинамических гамильтоновых систем. Динамические симметрии были выявлены в ряде уравнений, описывающих кавитационные явления [4, 13–15]. В частности, в работе [15] приведена полная группа симметрии рассматриваемой задачи. Ниже мы укажем физически очевидные проявления симметрий.

Инварианты, связанные с пространственной симметрией задачи о динамике газового пузырька в однородном поле, а именно с трансляциями и вращениями, представляют собой компоненты количества движения (импульс Кельвина) и момент количества движения [4]. Импульс Кельвина может быть выражен в виде следующего поверхностного интеграла:

$$\mathbf{K} = -\rho_0 \iint_S \Phi \mathbf{n} dS = -\rho_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Pi \left( \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \sin \vartheta d\vartheta d\alpha, \quad (21)$$

а соответствующий момент количества движения имеет вид

$$\mathbf{L} = -\rho_0 \iint_S \Phi \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS = \rho_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Pi \left( -\mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{L}$  являются постоянными векторами

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \rho_0 \frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{v} dV = \rho_0 \frac{d}{dt} \iiint_V \nabla \varphi dV = -\rho_0 \frac{d}{dt} \iint_S \Phi \mathbf{n} dS - \rho_0 \iint_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{n} dS = \\
= \iint_S [P_g - P_1(t) - \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n})] \mathbf{n} dS = 0, \quad (23)
\end{aligned}$$

так как для произвольной замкнутой поверхности

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{n} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha (R_0 + \xi)^2 \left( \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) = \\
= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta d\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (R_0 + \xi)^2 \mathbf{e}_\alpha \right) \right] = 0, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha (R_0 + \xi)^2 \left( \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \times \\ &\times \left[ \frac{\mathfrak{R}^2 + 1}{\mathfrak{R} (R_0 + \xi)} - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) \right] = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta d\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta \mathfrak{R} \mathbf{e}_\vartheta \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (R_0 + \xi)^2 \mathfrak{R} \mathbf{e}_\alpha \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогичным образом для  $\mathbf{L}$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \rho_0 \frac{d}{dt} \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = -\rho_0 \frac{d}{dt} \iiint_V \nabla \times (\varphi \mathbf{r}) dV = -\rho_0 \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} \Phi dS = \\ &= -\rho_0 \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dS = \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} [P_g - P_1(t) - \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n})] dS = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Выше мы использовали следующие тождества:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha (R_0 + \xi)^3 \left[ \mathbf{e}_r \times \left( \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta d\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (R_0 + \xi)^3 \mathbf{e}_\vartheta \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta (R_0 + \xi)^3 \mathbf{e}_\alpha \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \iint_S [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] (\nabla \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n} dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha (R_0 + \xi)^3 \left[ \mathbf{e}_r \times \left( \mathbf{e}_r - \frac{1}{R_0 + \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{(R_0 + \xi) \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\mathfrak{R}^2 + 1}{\mathfrak{R} (R_0 + \xi)} - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) \right] = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\vartheta d\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (R_0 + \xi)^2 \mathfrak{R} \mathbf{e}_\vartheta \right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta \mathfrak{R} \mathbf{e}_\alpha \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Другим очевидным свойством симметрии уравнений (1)–(3) и (8) является изменение уровня потенциала — добавление любого числа к  $\varphi$  (и к  $\Phi$ ) не меняет состояние системы. Как было показано Бенджаменом [4], в этом случае закон сохранения воспроизводит простое кинематическое тождество

$$\frac{dV}{dt} = \iint_{S_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = -4\pi A_0, \quad (29)$$

где  $A_0$  — коэффициент при монополюльной составляющей в разложении  $\varphi$  в дальней зоне.

Отметим, что законы сохранения могут быть получены с использованием следующих соотношений:

$$\{\mathbf{K}, H\} = 0, \quad \{\mathbf{L}, H\} = 0,$$

где скобка Пуассона между двумя функционалами  $F$  и  $H$  определяется следующим образом:

$$\{F, H\} = \int \left( \frac{\delta F}{\delta \xi} \frac{\delta H}{\delta \Pi} - \frac{\delta F}{\delta \Pi} \frac{\delta H}{\delta \xi} \right) \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.$$

### 3. НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ

Гамильтониан (16) в отсутствие внешних сил представляет собой билинейную форму по переменным  $\Pi$  и  $\xi$ , диагонализация которой решает проблему устойчивости газового включения по отношению к малым возмущениям. Для решения этой задачи представим канонические переменные в виде рядов по сферическим гармоникам:

$$\begin{aligned} \xi(\vartheta, \alpha, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \xi_{lm}(t) Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \\ \Pi(\vartheta, \alpha, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \Pi_{lm}(t) Y_{lm}(\vartheta, \alpha), \\ Y_{lm}(\vartheta, \alpha) &= (-1)^m \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\alpha}, \end{aligned} \tag{30}$$

где  $P_l^m$  — присоединенная функция Лежандра первого рода. Отметим, что  $Y_{l-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$  ( $m \geq 0$ ). Сферические гармоники нормированы таким образом

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{lm}^* Y_{lm} = 1,$$

что  $\xi_{00} = \bar{\xi} \sqrt{4\pi}$ . Смещение и потенциал являются вещественными функциями  $\xi = \xi^*$ ,  $\Pi = \Pi^*$  (здесь звездочка обозначает комплексное сопряжение), что приводит к определенным соотношениям между компонентами разложения:  $\xi_{lm} = (-1)^m \xi_{l-m}^*$ ,  $\Pi_{lm} = (-1)^m \Pi_{l-m}^*$ .

Переход к компонентам разложения можно рассматривать как каноническое преобразование, при этом уравнения (8) принимают вид

$$\frac{\partial \xi_{lm}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Pi_{lm}^*}, \quad \frac{\partial \Pi_{lm}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \xi_{lm}^*}. \tag{31}$$

Уравнения для малых возмущений получаются в результате варьирования гамильтониана  $H_0$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ \frac{1}{\rho_0 R_0^3} (l+1) \Pi_{lm}^* \Pi_{lm} + 3\gamma \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) R_0 \xi_{00}^* \xi_{00} \delta_{l0} + \sigma (l+2)(l-1) \xi_{lm}^* \xi_{lm} \right]. \tag{32}$$

Анализ этих уравнений демонстрирует наличие следующих мод: объемных — монопольных пульсаций ( $l = 0$ ) с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho_0 R_0^2} \left( P_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right)},$$

дипольных ( $l = 1$ ) — трансляционных движений, осцилляций формы ( $l \geq 2$ ), которые имеют вид поверхностных капиллярных волн, распространяющихся по поверхности пузырька с частотой

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 R_0^3} (l+1)(l+2)(l-1)}.$$

С помощью преобразований монопольной ( $l = 0$ ) и поверхностных ( $l \geq 2$ ) компонент,

$$\begin{aligned} \xi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{-1/2} (a_{00} + a_{00}^*), \\ \Pi_{00} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} (a_{00} - a_{00}^*), \\ a_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} \xi_{00} - i (\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{-1/2} \Pi_{00} \right], \end{aligned} \tag{33}$$



$$\begin{aligned} \xi_{lm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_l}{l+1} \right)^{-1/2} [a_{lm} + (-1)^m a_{l-m}^*], \\ \Pi_{lm} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_l}{l+1} \right)^{1/2} [a_{lm} - (-1)^m a_{l-m}^*], \\ a_{lm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_l}{l+1} \right)^{1/2} \xi_{lm} - i \left( \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_l}{l+1} \right)^{-1/2} \Pi_{lm} \right], \end{aligned} \quad (34)$$

может быть осуществлена диагонализация квадратичного гамильтониана ( $l \geq 2$ ):

$$H_0 = \omega_0 a_{00}^* a_{00} + \sum_{m=-1}^{m=1} \frac{\Pi_{1m}^* \Pi_{1m}}{\rho_0 R_0^3} + \sum_{l=2}^{\infty} \omega_l \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm}^* a_{lm}. \quad (35)$$

Переходя к анализу нелинейных эффектов, следует разделить вклад этих существенно различных мод. Кубический гамильтониан (17) при этом приобретает следующую структуру:

$$H_1 = H_{mmm} + H_{sss} + H_{mdd} + H_{mss} + H_{dds} + H_{dss}, \quad (36)$$

где  $H_{mmm}$  описывает самовоздействие монопольной моды,

$$\begin{aligned} H_{mmm} &= \frac{1}{8\sqrt{2}\pi} \frac{\omega_0}{(\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} R_0} \times \\ &\times \left\{ \left( 2 - \gamma - \frac{1}{9} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) [a_{00} a_{00} a_{00} + a_{00}^* a_{00}^* a_{00}^*] - \left( 4 + \gamma + \frac{1}{9} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) [a_{00}^* a_{00} a_{00} + a_{00} a_{00}^* a_{00}^*] \right\}, \end{aligned} \quad (37)$$

член  $H_{sss}$  ответствен за взаимодействие поверхностных мод,

$$\begin{aligned} H_{sss} &= \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \sum_{l_3=2}^{\infty} \sum_{m_3=-l_3}^{l_3} -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{R_0} \left( \frac{\omega_{l_2} \omega_{l_3} (l_1+1)}{\rho_0 R_0^3 \omega_{l_1} (l_2+1) (l_3+1)} \right)^{1/2} \langle Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} \rangle \times \\ &\times \left\{ [(a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3} + a_{l_1 -m_1}^* a_{l_2 -m_2}^* a_{l_3 -m_3}^*) + (-1)^{m_1} (a_{l_1 m_1} a_{l_2 -m_2}^* a_{l_3 -m_3}^* + a_{l_1 -m_1}^* a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3})] \times \right. \\ &\times \left[ (l_2+1)(l_3+1) - \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - (l_1+1)l_1] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) + \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{18} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right] - \\ &- [(-1)^{m_2} (a_{l_1 m_1} a_{l_2 -m_2}^* a_{l_3 m_3} + a_{l_1 -m_1}^* a_{l_2 m_2} a_{l_3 -m_3}^*) + (-1)^{m_3} (a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 -m_3}^* + a_{l_1 -m_1}^* a_{l_2 -m_2}^* a_{l_3 m_3})] \times \\ &\left. \times \left[ (l_2+1)(l_3+1) - \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - (l_1+1)l_1] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) - \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{18} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Вклад взаимодействующих дипольных мод пропорционален матричному элементу

$$\langle Y_{1m_1} Y_{1m_2} Y_{1m_3} \rangle \equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha Y_{1m_1}(\vartheta, \alpha) Y_{1m_2}(\vartheta, \alpha) Y_{1m_3}(\vartheta, \alpha),$$

который в силу закона сохранения четности обращается в нуль для всех нечетных  $p = l_1 + l_2 + l_3$ . Следующие члены в формуле (36) ответственны за взаимодействие монопольной и двух дипольных мод,

$$\begin{aligned} H_{mdd} &= \sum_{m=-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{\omega_0}{(\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} R_0} \times \\ &\times \left\{ a_{00} \left[ -\frac{\Pi_{1m} (3\Pi_{1m}^* + 2i\rho_0 R_0^3 \omega_0 \xi_{1m})}{\rho_0 R_0^3 \omega_0} + \rho_0 R_0^3 \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) \xi_{1m}^* \xi_{1m} \right] + \text{c.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

а также монопольной и двух поверхностных мод,

$$\begin{aligned}
H_{mss} = & \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_0}{(\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} R_0} \times \\
& \times \left\{ (a_{00} a_{l-m} a_{lm} + a_{00}^* a_{l-m}^* a_{lm}^*) (-1)^m \left[ 3 \frac{\omega_l}{\omega_0} + (2l+6) + 2(l+1) \frac{\omega_0}{\omega_l} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) \right] + \right. \\
& + (a_{00} a_{lm} a_{lm}^* + a_{00}^* a_{lm} a_{lm}^*) \left[ -6 \frac{\omega_l}{\omega_0} + 4(l+1) \frac{\omega_0}{\omega_l} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) \right] + \\
& \left. + (-1)^m (a_{00} a_{lm}^* a_{l-m}^* + a_{00}^* a_{lm} a_{l-m}) \left[ 3 \frac{\omega_l}{\omega_0} - (2l+6) + 2(l+1) \frac{\omega_0}{\omega_l} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \right) \right] \right\}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Отметим, что ортогональность сферических гармоник исключает процессы, в которых две монополярные моды могут взаимодействовать с одной дипольной или одной поверхностной модой, поэтому следующим в формуле (36) стоит член, описывающий взаимодействие двух дипольных и одной поверхностной моды. Правила отбора при вычислении соответствующих матричных элементов позволяют взаимодействовать в этом процессе только моде с  $l = 2$ :

$$\begin{aligned}
H_{dds} = & \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{m_2=-1}^1 \sum_{m_3=-2}^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega_0}{(\rho_0 R_0^3 \omega_0)^{1/2} R_0} \langle Y_{1m_1} Y_{1m_2} Y_{2m_3} \rangle \times \\
& \times \left\{ a_{2m_3} \left[ -\frac{14}{3} i \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{1/2} \xi_{1m_1} \Pi_{1m_2} - 3 \frac{\Pi_{1m_1} \Pi_{1m_2}}{\rho_0 R_0^3 \omega_0} \left( \frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^{1/2} - \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_0}{6} \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{3/2} \xi_{1m_1} \xi_{1m_2} \right] + \right. \\
& \left. + (-1)^{m_3} a_{2-m_3}^* \left[ \frac{14}{3} i \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{1/2} \xi_{1m_1} \Pi_{1m_2} - 3 \frac{\Pi_{1m_1} \Pi_{1m_2}}{\rho_0 R_0^3 \omega_0} \left( \frac{\omega_0}{\omega_2} \right)^{1/2} - \frac{\rho_0 R_0^3 \omega_0}{6} \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{3/2} \xi_{1m_1} \xi_{1m_2} \right] \right\}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Взаимодействие одной дипольной и двух поверхностных мод учитывается членом

$$\begin{aligned}
H_{dss} = & \sum_{m_1=-1}^1 \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} \sum_{l_3=2}^{\infty} \sum_{m_3=-l_3}^{l_3} \frac{1}{4R_0} \left( \frac{\omega_{l_2} \omega_{l_3}}{(l_2+1)(l_3+1)} \right)^{1/2} \langle Y_{1m_1} Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} \rangle \left\{ a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3} \times \right. \\
& \times \left[ -\xi_{1m_1} \left( (l_2+1)(l_3+1) - \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - 2] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) + \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right) + \right. \\
& + \frac{i(l_3+1) \Pi_{1m_1}}{\rho_0 R_0^3 \omega_{l_2}} [(l_2+1)(l_2-2) - (l_3+1)l_3 - 10] + (-1)^{m_2} a_{l_2-m_2}^* a_{l_3 m_3} \left[ \xi_{1m_1} \left( (l_2+1)(l_3+1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - 2] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) - \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{i(l_3+1) \Pi_{1m_1}}{\rho_0 R_0^3 \omega_{l_2}} [(l_2+1)(l_2-2) - (l_3+1)l_3 - 10] \right] + (-1)^{m_3} a_{l_2 m_2} a_{l_3-m_3}^* \left[ \xi_{1m_1} \left( (l_2+1)(l_3+1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - 2] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) - \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{i(l_3+1) \Pi_{1m_1}}{\rho_0 R_0^3 \omega_{l_2}} [(l_2+1)(l_2-2) - (l_3+1)l_3 - 10] \right] + (-1)^{m_2+m_3} a_{l_2-m_2}^* a_{l_3-m_3}^* \left[ -\xi_{1m_1} \left( (l_2+1)(l_3+1) - \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} [(l_2+1)l_2 + (l_3+1)l_3 - 2] - 2(l_2+1) - 2(l_3+1) - \frac{(l_2+1)(l_3+1)}{6} \frac{\omega_2^2}{\omega_{l_2} \omega_{l_3}} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{i(l_3+1) \Pi_{1m_1}}{\rho_0 R_0^3 \omega_{l_3}} [(l_2+1)(l_2-2) - (l_3+1)l_3 - 10] \right] \right\}. \quad (42)
\end{aligned}$$

Правила отбора позволяют участвовать в этих процессах только поверхностным волнам, номера которых различаются на единицу. Матричные элементы, входящие в приведенный выше гамильтониан, выражаются через  $3j$ -символы Вигнера [16]:

$$\langle Y_{l_1 m_1} Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} \rangle = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Мы не приводим явный вид гамильтониана  $H_2$  четвертого порядка (см. (18)), выраженного через нормальные координаты (33), (34), ввиду его громоздкости. Цель настоящей работы состоит в развитии приближенной модели для описания слабонелинейных поверхностных волн на поверхности пузырька. Ниже мы ограничимся рассмотрением доминирующей нелинейности третьего порядка.

#### 4. РЯБЬ ФАРАДЕЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ПУЗЫРЬКА

Неустойчивости, приводящие к формированию регулярных структур, наблюдаются во многих нелинейных распределенных системах. Когда слой жидкости со свободной поверхностью подвергается вертикальным вибрациям, на его поверхности возникает рябь Фарадея — параметрически возбужденная система поверхностных волн [17]. Подобные структуры возникают на стенке пузырька в акустическом поле в результате бифуркаций чисто радиальных колебаний [18]. Эти структуры регистрируются как оптическими, так и акустическими методами, однако до настоящего времени не дана ни их классификация, ни условия возникновения.

Интерес к этому эффекту обусловлен проблемой формирования потоков жидкости на малых масштабах в микроэлектромеханических системах. Результаты недавних экспериментальных исследований продемонстрировали возможность использовать пузырек в качестве привода для вращения микротора [19], эффективной генерации микропотоков, интенсивности которых достаточна для лизиса визикул [20, 21].

В настоящее время зарегистрировано появление поверхностных мод ( $l = 2-15$ ) на включениях размером от нескольких микрометров до нескольких миллиметров. Большинство экспериментов проводилось на пузырьках, закрепленных на стенке, проволочке, нити или стеклянной палочке. Конечно, динамика закрепленного пузырька отличается от поведения свободного пузырька [22, 23], но если область контакта мала по сравнению с общей площадью пузырька, то такое влияние относительно невелико. Наличие контакта приводит к подавлению трансляционных движений — дипольной моды. Поэтому при интерпретации экспериментов учитываются только монополюсные и поверхностные искажения (слагаемые  $H_0$ ,  $H_{mmm}$ ,  $H_{mss}$  и  $H_{sss}$  в гамильтоновом описании).

Наиболее легко рябь Фарадея наблюдается в

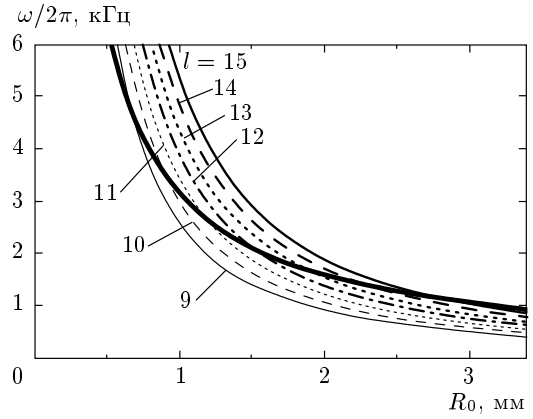


Рис. 1. Графическое представление условий параметрического резонанса  $\omega_0(R_0) = 2\omega_l(R_0)$  между монополюсной и поверхностными модами для наиболее хорошо изученного интервала частот и размеров пузырьков

условиях двойного резонанса, когда частота внешнего поля совпадает с частотой собственных (монополюсных) колебаний,  $\omega \approx \omega_0$ , которая, в свою очередь, близка к удвоенной частоте поверхностной моды,  $\omega_0 \approx 2\omega_l$ . Резонансное условие  $\omega_0(R_0) = 2\omega_l(R_0)$  может реализоваться только при определенных значениях равновесного радиуса. На рис. 1 графически представлены условия такого резонанса в наиболее изученном диапазоне частот и размеров пузырьков [24].

Большинство исследователей этой задачи [1, 25–34], за исключением авторов работ [35, 36], использовали упрощенную модель осесимметричных колебаний. Но даже в тех работах, где учитывался весь набор вырожденных мод, практически не исследованным оставался вопрос о распадном характере спектра поверхностных мод: в каких из процессов, описываемых гамильтонианом  $H_{sss}$ , может выполняться условие резонанса

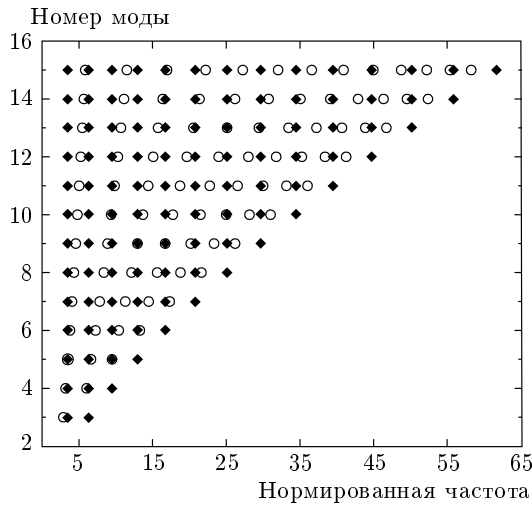
$$\omega_{l_3} = \omega_{l_1} + \omega_{l_2}, \tag{44}$$

и, если такие процессы реализуются, то допускают ли их правила отбора, т. е. отличен ли от нуля в этом случае матричный элемент  $\langle Y_{l_1 m_1}^* Y_{l_2 m_2} Y_{l_3 m_3} \rangle$ ?

Условие (44) для нормированных частот

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 R_0^3}} \tilde{\omega}_l, \quad \tilde{\omega}_l \equiv \sqrt{(l+1)(l+2)(l-1)}$$

можно записать в виде



**Рис. 2.** Условия реализации распадного процесса  $\omega_{l_3} = \omega_{l_1} + \omega_{l_2}$ . Для каждого значения  $l_3$  от 15 до 3 проводится ось частот, на которой откладываются значения  $\sqrt{(l_3 + 1)(l_3 + 2)(l_3 - 1)} - \sqrt{(l_2 + 1)(l_2 + 2)(l_2 - 1)}$ , помеченные  $\circ$  ( $l_3$  фиксировано,  $l_2$  меняется от 2 до  $l_3 - 1$ ), и значения  $\sqrt{(l_1 + 1)(l_1 + 2)(l_1 - 1)}$ , обозначаемые  $\blacklozenge$  ( $l_1$  меняется от 2 до  $l_3$ ). Близость точек этих двух рядов отвечает реализации распадного процесса

$$\begin{aligned} \sqrt{(l_3 + 1)(l_3 + 2)(l_3 - 1)} = & \\ = \sqrt{(l_1 + 1)(l_1 + 2)(l_1 - 1)} + & \\ + \sqrt{(l_2 + 1)(l_2 + 2)(l_2 - 1)}. & \quad (45) \end{aligned}$$

Численное решение этого уравнения осуществлялось следующим образом: для каждого значения  $l_3$  от 15 до 3 вычислялась величина

$$\begin{aligned} \sqrt{(l_3 + 1)(l_3 + 2)(l_3 - 1)} - & \\ - \sqrt{(l_2 + 1)(l_2 + 2)(l_2 - 1)} & \end{aligned}$$

при фиксированном  $l_3$  и значениях  $l_2$ , изменяющихся от 2 до  $l_3 - 1$ . Эти значения наносились на ось частот (рис. 2). На каждую из получаемых таким образом осей наносились также значения  $\sqrt{(l_1 + 1)(l_1 + 2)(l_1 - 1)}$ , где величина  $l_1$  изменялась от 2 до  $l_3$ . Близость точек этих двух рядов как раз и соответствует условиям резонанса (44).

«Подозрительные» процессы, в которых расстройка мала и, соответственно, точки  $\circ$  и  $\blacklozenge$  близко расположены на оси, отбирались и из их числа исключались запрещенные правилами отбора. Результат заносился в таблицу. Для этих процессов вычис-

лялись нормированные частоты  $\tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_1$  и величина  $\Delta = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1$ .

В тройных процессах резонансная перекачка энергии эффективно осуществляется и в условиях, когда абсолютная величина расстройки хотя и не обращается в нуль, но принимает малые значения, меньшие коэффициента затухания волн [37]. Учет конечного времени жизни участвующих во взаимодействии волн можно качественно представить как «размазывание» их законов дисперсии. Очевидно, что когда затухание, определяющее величину этого расплывания, станет больше расстройки, процессы будут идти эффективно.

В последней колонке таблицы помещены нормированные значения затухания поверхностных волн, взятые из работы [38], для значений радиусов пузырьков, отвечающих условиям параметрического резонанса между монополюсной и поверхностными модами (см. рис. 1). Эти значения сравниваются с величинами нормированной расстройки, помещенными в последнюю колонку таблицы.

Как следует из приведенных данных, условия резонанса оказываются затрудненными только для одного процесса,  $(10) \rightarrow (2) + (8)$ , где в скобках указан номер моды. Кроме того, более глубокого анализа заслуживает процесс  $(4) \rightarrow (2) + (2)$ . Оценивая ситуацию в целом, можно отметить, что моды с низшими номерами  $l$  не могут участвовать в распадных процессах. Исключение составляет мода с  $l = 4$ , эффективность распада которой требует дополнительного исследования. Начиная с  $l = 9$ , распадные процессы становятся возможными, однако их эффективность меняется с ростом номера моды, поскольку обязательным партнером в таких процессах выступает самая низкочастотная мода, допускаемая правилами отбора ( $l = 3$ ), что приводит к численной малости амплитуды соответствующих процессов, пропорциональной отношению частот.

Влияние межмодового взаимодействия поверхностных волн на процесс параметрической генерации ряби Фарадея было зарегистрировано в экспериментах [39]. При повышении частоты и амплитуды акустического поля на поверхности микронного пузырька реализовывались структуры, отвечающие не последовательности резонансов  $(4) \rightarrow (3) \rightarrow (2)$ , а более сложному процессу, характеризующемуся перемежаемостью, причем необычный характер возбуждения демонстрировала именно мода  $l = 4$ . Как было показано выше, она является единственной из мод с низшими номерами, которая может участвовать в тройных процессах.

Номер моды $l_3$	Тип распадного процесса	$\tilde{\omega}_{l_3}$	$\tilde{\omega}_{l_1}$	$\tilde{\omega}_{l_2}$	$\Delta$	$ \Delta /\omega_{l_3}$	$\gamma_{l_3}/\omega_{l_3}$
15	(15) $\rightarrow$ (3) + (14)	61.709	55.857	6.325	-0.473	0.0076	0.023
14	(14) $\rightarrow$ (3) + (13)	55.857	50.200	6.325	-0.668	0.012	0.026
13	(13) $\rightarrow$ (3) + (12)	50.200	44.744	6.325	-0.869	0.017	0.028
12	(12) $\rightarrow$ (3) + (11)	44.744	39.497	6.325	-1.078	0.025	0.031
	(12) $\rightarrow$ (4) + (10)	44.744	34.467	9.487	0.790	0.018	0.031
11	(11) $\rightarrow$ (4) + (9)	39.497	29.665	9.487	0.355	0.009	0.034
10	(10) $\rightarrow$ (2) + (8)	34.467	25.100	3.464	5.903	0.170	0.038
	(10) $\rightarrow$ (4) + (8)	34.467	25.100	9.487	-0.12	0.0035	0.038
	(10) $\rightarrow$ (5) + (7)	34.467	20.785	12.961	0.721	0.020	0.038
9	(9) $\rightarrow$ (4) + (7)	29.665	20.785	9.487	-0.607	0.020	0.042
8	не реализуется	—	—	—	—	—	—
7	не реализуется	—	—	—	—	—	—
6	не реализуется	—	—	—	—	—	—
5	не реализуется	—	—	—	—	—	—
4	(4) $\rightarrow$ (2) + (2)	9.487	3.464	3.464	2.560	0.270	0.100
3	не реализуется	—	—	—	—	—	—

5. ВЫВОДЫ

Установление гамильтоновой структуры уравнений, описывающих динамику газового включения, позволяет свести исходную краевую задачу к системе нелинейных динамических уравнений для амплитуд взаимодействующих мод. Нахождение явного вида канонических переменных значительно упрощает и стандартизует теорию возмущений. Получен явный вид оператора Дирихле–Неймана с точностью до членов третьего порядка. С его помощью построено разложение гамильтониана по степеням канонических переменных. В качестве приложения рассмотрена задача генерации ряби Фарадея на стенке пузырька. Исследован распадный характер искажений формы пузырька для первых (наблюдаемых в эксперименте) пятнадцати мод. Приведенный пример, естественно, не исчерпывает всех возможных приложений, а является только первым шагом на этом пути.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16412).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для того чтобы установить гамильтонову структуру уравнений, описывающих динамику пузырька, следует вычислить вариационные производные  $H_{\Pi} = \delta H / \delta \Pi$  и  $H_{\xi} = \delta H / \delta \xi$ . При вычислении этих величин мы следуем работе [3] и используем традиционное определение вариаций:

$$\left( \dot{\xi}, H_{\xi} \right) = \left[ \frac{d}{dg} H \left( \xi + g\dot{\xi}, \Pi \right) \right]_{g=0}, \tag{A.1}$$

$$\left( \dot{\Pi}, H_{\Pi} \right) = \left[ \frac{d}{dg} H \left( \xi, \Pi + g\dot{\Pi} \right) \right]_{g=0},$$

где  $(\dots, \dots)$  обозначает внутреннее произведение в пространстве  $L^2$ . При определении значения потенциала и его производных на изменяющейся поверхности  $S$  пузырька используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi(r, \vartheta, \alpha, t)|_{r=R_0+\xi}; \\ \Phi_{(r)} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_0+\xi}, \quad \Phi_{(\vartheta)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{r=R_0+\xi}, \\ \Phi_{(\alpha)} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \Big|_{r=R_0+\xi}, \quad \Phi_{(t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=R_0+\xi}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Отметим, что

$$\Phi_t \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_{(t)} + \Phi_{(r)} \xi_t \tag{A.3}$$

и подобные формулы справедливы для  $\Phi_{\vartheta}$  и  $\Phi_{\alpha}$ . Приведем также явный вид нормальной производной:

$$\Phi_{(n)} = (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi)|_{r=R_0+\xi} = \mathfrak{R}^{-1} \left[ \Phi_{(r)} - \frac{\Phi_{(\vartheta)} \xi_{\vartheta}}{(R_0 + \xi)^2} - \frac{\Phi_{(\alpha)} \xi_{\alpha}}{(R_0 + \xi)^2 \sin^2 \vartheta} \right],$$

где  $\xi_{\vartheta} = \partial \xi / \partial \vartheta$ ,  $\xi_{\alpha} = \partial \xi / \partial \alpha$ , и введем обозначение

$$q^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2.$$

Вычисление вариационной производной от кинетической энергии, которая определяется выражением (9), дает

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d}{dg} T(\xi + g\dot{\xi}, \Pi) \right]_{g=0} &= (\dot{\xi}, T_{\xi}) = -\frac{\rho_0}{2} \int \dot{\xi} q^2 (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha - \\ &\quad - \rho_0 \int \left[ \frac{d}{dg} \varphi \right]_{g=0}^S \Phi_{(n)} \mathfrak{R} (R_0 + \xi)^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d}{dg} \varphi \right]_{g=0}^S &= \left[ \frac{d}{dg} \Phi \right]_{g=0} - \Phi_{(r)} \dot{\xi}, \\ \left[ \frac{d}{dg} \Phi \right]_{g=0} &= - \left[ \frac{d}{dg} \frac{\Pi}{\rho_0 (R_0 + \xi + g\dot{\xi})^2} \right]_{g=0} = \frac{2\dot{\xi}\Pi}{\rho_0 (R_0 + \xi)^3},\end{aligned}$$

мы получаем

$$T_{\xi} = -\frac{\rho_0}{2} q^2 (R_0 + \xi)^2 - \rho_0 \mathfrak{R} (R_0 + \xi)^2 \Phi_{(n)} \left( \frac{2\Pi}{\rho_0 (R_0 + \xi)^3} - \Phi_{(r)} \right).$$

Вычисление вариаций от внутренней энергии  $V_{in}$ , поверхностной энергии  $V_s$  и работы  $A$  приводит к следующим выражениям:

$$\left[ \frac{d}{dg} V_{in}(\xi + g\dot{\xi}, \Pi) \right]_{g=0} = -P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\gamma} \left[ \frac{d}{dg} V(\xi + g\dot{\xi}, \Pi) \right]_{g=0} = -P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\gamma} \left( (R_0 + \xi)^2, \dot{\xi} \right),$$

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d}{dg} V_s(\xi + g\dot{\xi}, \Pi) \right]_{g=0} &= \sigma \int \left\{ 2\mathfrak{R} (R_0 + \xi) - \left[ \frac{1}{(R_0 + \xi) \mathfrak{R}} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{(R_0 + \xi) \mathfrak{R} \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right) \right] \right\} \dot{\xi} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha = \sigma \left( (R_0 + \xi)^2 (\nabla \cdot \mathbf{n}), \dot{\xi} \right),\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{d}{dg} A \right]_{g=0} = (P_\infty + P_{ext}) \left[ \frac{d}{dg} V(\xi + g\dot{\xi}, \Pi) \right]_{g=0} = (P_\infty + P_{ext}) \left( (R_0 + \xi)^2, \dot{\xi} \right).$$

В результате вариационная производная от всего гамильтониана принимает вид

$$H_\xi = (R_0 + \xi)^2 \left[ -\frac{\rho_0 q^2}{2} - \rho_0 \mathfrak{R} \Phi_{(n)} \left( \frac{2\Pi}{\rho_0 (R_0 + \xi)^3} - \Phi_{(r)} \right) - P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma + \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}) + (P_\infty + P_{ext}) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Прямое вычисление производной от «импульса» дает

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\rho_0 \left[ 2 \frac{\partial \xi}{\partial t} (R_0 + \xi) \Phi + (R_0 + \xi)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right].$$

Используя интеграл Бернулли, кинематическое граничное условие (2) и соотношение (A.3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\rho_0 \left[ 2 \mathfrak{R} \Phi_{(n)} (R_0 + \xi) \Phi + (R_0 + \xi)^2 (\Phi_{(t)} + \Phi_{(r)} \xi_t) \right] = (R_0 + \xi)^2 \left\{ -\rho_0 \mathfrak{R} \Phi_{(n)} \left[ \frac{2\Phi}{R_0 + \xi} + \Phi_{(r)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\rho_0 q^2}{2} + P_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma - \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}) - (P_\infty + P_{ext}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

что есть не что иное, как  $-H_\xi$ .

Сравним теперь правую часть кинематического граничного условия (2) и вариационную производную гамильтониана по  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dg} H(\xi, \Pi + g\dot{\Pi}) \right]_{g=0} = (\dot{\Pi}, T_\Pi) = \rho_0 \int (\nabla \varphi \cdot \nabla \left[ \frac{d}{dg} \varphi \right])_{g=0} d\mathbf{r} = -\rho_0 \left( \mathfrak{R} (R_0 + \xi)^2 \Phi_{(n)}, \left( \frac{d}{dg} \varphi \right)_{g=0}^S \right) = \\ = -\rho_0 \left( \mathfrak{R} (R_0 + \xi)^2 \Phi_{(n)}, -\frac{\dot{\Pi}}{\rho_0 (R_0 + \xi)^2} \right) = (\mathfrak{R} \Phi_{(n)}, \dot{\Pi}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем  $\partial \xi / \partial t = H_\Pi$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

При вычислении оператора Дирихле–Неймана будем следовать работе [9], в которой строится разложение результата воздействия оператора Дирихле–Неймана на определенные (базисные) функции. В рассматриваемом случае в качестве базисных выбираются следующие элементарные решения уравнения Лапласа:

$$\varphi_{el}(r, \vartheta, \alpha) = (R_0/r)^{l+1} Y_{lm}(\vartheta, \alpha). \quad (\text{B.1})$$

Первый шаг состоит в подстановке этой функции в определение  $\hat{\mathcal{J}}$  (10):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}(\xi)[\varphi_{el}] = -(l+1) \frac{1}{R_0} \left( \frac{R_0}{R_0 + \xi} \right)^{l+2} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2} \left( \frac{R_0}{R_0 + \xi} \right)^{l+1} \frac{\partial Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi(\vartheta, \alpha)}{\partial \vartheta} - \\ - \frac{1}{(R_0 + \xi)^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{R_0}{R_0 + \xi} \right)^{l+1} \frac{\partial Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi(\vartheta, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Введем малый параметр  $\epsilon \propto s = \xi/R_0$  и разложим оператор Дирихле–Неймана и пробную функцию (B.1) по степеням этого параметра:

$$\hat{\mathcal{J}}(\xi)[\varphi_{el}] = \frac{1}{R_0} \left[ -(l+1)(1+s)Y_{lm} - \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l+2+k)!}{(l+2)!k!} s^k,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}} [s^{l+1} Y_{lm}] &= \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p \hat{\mathcal{J}}_p \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l+k)!}{(l)!k!} s^k Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = \\ &= \frac{1}{R_0} \left[ -(l+1)(1+s)Y_{lm} - \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(l+2+k)!}{(l+2)!k!} s^k. \quad (\text{Б.3}) \end{aligned}$$

В нулевом порядке по  $\epsilon$  получаем

$$\hat{\mathcal{J}}_0(\xi) [\varphi_{el}] = -\frac{l+1}{R_0} Y_{lm} = -\frac{1}{R_0} \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\hat{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{4}} \right] Y_{lm},$$

где

$$\hat{\mathbf{I}}^2 \equiv - \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right]$$

— оператор квадрата углового момента. Воспользуемся тем, что граничное значение потенциала  $\Phi$  может быть представлено в виде ряда по сферическим гармоникам,  $\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{\Phi}_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$ , и введем следующий оператор:

$$\begin{aligned} \hat{D} [\Phi] &\equiv -R_0 \hat{\mathcal{J}}_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{\Phi}_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{\Phi}_{lm} R_0 \hat{\mathcal{J}}_0 [Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{\Phi}_{lm} \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\hat{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{4}} \right] Y_{lm} = \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{\hat{\mathbf{I}}^2 + \frac{1}{4}} \right] \Phi. \end{aligned}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях  $\epsilon$  в (Б.3), получим рекуррентные соотношения, позволяющие выразить  $n$ -й член разложения оператора Дирихле–Неймана через операторы более низкого порядка:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_n [Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] &= \frac{1}{R_0} \left\{ -(l+1)(-1)^n \frac{(l+1+n)!}{(l+1)!n!} s^n Y_{lm} - (-1)^{n-1} \frac{(l+1+n)!}{(l+2)!(n-1)!} s^{n-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right] \right\} - \sum_{p=0}^{n-1} \epsilon^p \hat{\mathcal{J}}_p \left[ (-1)^{n-p} \frac{(l+1+n-p)!}{(l+1)!(n-p)!} s^{n-p} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Используя определение оператора  $\hat{D}$  и тот факт, что функция  $\Phi$  представима в виде ряда по сферическим гармоникам, получаем искомый результат — первые три члена разложения оператора Дирихле–Неймана:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_1 [Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] &= \frac{1}{R_0} \left[ (l+1)(l+2)sY_{lm} - \left( \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) \right] - \hat{\mathcal{J}}_0 [-(l+1)sY_{lm}] = \\ &= \frac{1}{R_0} \left[ s\hat{D}(\hat{D}+1)Y_{lm} - \left( \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) - \hat{D} (s\hat{D}Y_{lm}) \right], \\ \hat{\mathcal{J}}_1 [\Phi] &= \frac{1}{R_0} \left[ s\hat{D}(\hat{D}+1)\Phi - \hat{D} (s\hat{D}\Phi) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_2 [Y_{lm}(\vartheta, \alpha)] &= \frac{1}{R_0} \left[ -\frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{2} s^2 Y_{lm} + (l+3)s \left( \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \alpha} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \right) \right] - \\ &- \hat{\mathcal{J}}_0 \left[ \frac{(l+1)(l+2)}{2} s^2 Y_{lm} \right] - \hat{\mathcal{J}}_1 [-(l+1)sY_{lm}] = \frac{1}{R_0} \left\{ -\frac{1}{2} s^2 \hat{D}(\hat{D}+1)(\hat{D}+2)Y_{lm} + \right. \\ &\quad \left. + s \left[ \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( (\hat{D}+2)Y_{lm} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (\hat{D}+2)Y_{lm} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{D} (s^2 \hat{D}(\hat{D}+1)Y_{lm}) + s\hat{D}(\hat{D}+1) (s\hat{D}Y_{lm}) - \hat{D} (s\hat{D} (s\hat{D}Y_{lm})) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (s\hat{D}Y_{lm}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (s\hat{D}Y_{lm}) \right] \right\}, \end{aligned}$$



$$\hat{J}_2[\Phi] = \frac{1}{R_0} \left\{ -\frac{1}{2} s^2 \hat{D}(\hat{D} + 1)(\hat{D} + 2)\Phi + s \left[ \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( (\hat{D} + 2)\Phi \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( (\hat{D} + 2)\Phi \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \hat{D} \left( s^2 \hat{D}(\hat{D} + 1)\Phi \right) + s \hat{D}(\hat{D} + 1) \left( s \hat{D}\Phi \right) - \hat{D} \left( s \hat{D} \left( s \hat{D}\Phi \right) \right) - \left[ \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( s \hat{D}\Phi \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial s}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( s \hat{D}\Phi \right) \right] \right\}.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Feng and L. Leal, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **29**, 201 (1997).
2. В. Е. Захаров, ПМТФ (2), 86 (1968).
3. Т. В. Benjamin and P. J. Olver, *J. Fluid Mech.* **125**, 137 (1982).
4. Т. В. Benjamin, *J. Fluid Mech.* **181**, 349 (1987).
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
6. V. P. Ruban and J. J. Rasmussen, *Phys. Rev. E* **68**, 056301 (2003).
7. P. Smereka, B. Binar, and S. Banerjee, *Phys. Fluids* **30**, 3342 (1987).
8. P. Panayotaros, *Physica D* **130**, 273 (1999).
9. W. Craig and C. Sulem, *J. Comput. Phys.* **108**, 73 (1993).
10. R. Coifman and Y. Mayer, in *Pseudodifferential Operators and Applications*, American Mathematical Society, New York (1985), p. 71.
11. A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 124501 (2004).
12. P. J. Olver, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **88**, 71 (1970).
13. А. О. Максимов, Акуст. ж. **48**, 805 (2002).
14. A. O. Maksimov, *Comm. Nonlin. Sci. Num. Sim.* **9**, 83 (2004).
15. А. О. Максимов, in *Innovations in Nonlinear Acoustics*, ed. by A. Atchley, V. Sparrow, and R. M. Keolian, American Institute of Physics (2006), p. 516.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
17. M. Faraday, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **121**, 319 (1831).
18. T. Benjamin and M. Strasberg, *J. Acoust. Soc. Amer.* **30**, 697 (1958).
19. X. L. Wang, D. Attinger, and F. Moraga, *Nanoscale and Microscale Thermophys. Eng.* **10**, 379 (2006).
20. P. Marmottant and S. Hilgenfeldt, *Nature* **423**, 153 (2003).
21. P. Marmottant and S. Hilgenfeldt, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **101**, 9523 (2004).
22. А. О. Максимов, *J. Sound and Vibr.* **283**, 915 (2005).
23. А. О. Максимов, Т. Г. Leighton, and P. A. Birkin, in *Innovations in Nonlinear Acoustics*, ed. by A. Atchley, V. Sparrow, and R. M. Keolian, American Institute of Physics, New York (2006), p. 512.
24. T. G. Leighton, *The Acoustic Bubble*, Academ. Press, London (1994).
25. D. Hsieh, *J. Acoust. Soc. Amer.* **56**, 392 (1974).
26. A. Francescutto and R. Nabergoj, *Acustica* **41**, 215 (1978).
27. M. Ceshia and R. Nabergoj, *Phys. Fluids* **221**, 140 (1978).
28. P. Hall and G. Seminara, *J. Fluid Mech.* **101**, 423 (1986).
29. M. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **201**, 543 (1989).
30. J. Ffowcs-Williams and Y. Guo, *J. Fluid Mech.* **224**, 507 (1991).
31. M. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **224**, 531 (1991).
32. C. Mei and X. Zhou, *Fluid Mech.* **229**, 229 (1991).
33. S. Yang, Z. Feng, and L. Leal, *Fluid Mech.* **247**, 417 (1993).
34. А. Максимов, *Ultrasonics* **35**, 79 (1997).
35. M. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **201**, 525 (1989).
36. А. О. Максимов, and Т. Г. Leighton, *ACUSTICA-Acta Acustica* **87**, 322 (2001).
37. S. Simons, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 401 (1963); **83**, 749 (1964).
38. M. Longuet-Higgins, *J. Acoust. Soc. Amer.* **91**, 531 (1991).
39. K. Yoshida and Y. Watanabe, in *Innovations in Nonlinear Acoustics*, ed. by A. Atchley, V. Sparrow, and R. M. Keolian, American Institute of Physics, New York (2006), p. 479.