

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. Филиппов^{a*}, А. Г. Загородний^b, А. И. Момот^c, А. Ф. Паль^a, А. Н. Старостин^a

^a Государственный научный центр Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований
142190, Троицк, Московская обл., Россия

^b Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Национальной академии наук Украины
03680, Киев, Украина

^c Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
01033, Киев, Украина

Поступила в редакцию 5 декабря 2006 г.

Проведены исследования взаимодействия двух макрочастиц в неравновесной плазме при повышенных давлениях. На основе асимптотической теории экранирования, которая приводит к двухэкспоненциальной зависимости потенциала макрочастицы от расстояния с разными постоянными экранирования, определена электростатическая энергия системы зарядов, связанных с двумя макрочастицами. Установлено, что зависимость электростатической энергии от межчастичного расстояния, как и в равновесной плазме, имеет минимум. Определена сила взаимодействия макрочастиц, которая оказалась несимметричной — при разных зарядах силы, действующие на первую и вторую макрочастицы, не равны друг другу. Это является следствием несимметричного разделения зарядов около макрочастиц с различающимися зарядами и указывает на непотенциальный характер силы взаимодействия в неравновесной плазме. В случае одинаковых макрочастиц или в равновесной плазме имеет место равенство сил, для этих случаев определена потенциальная энергия взаимодействия макрочастиц. Установлено, что при сильном сближении одноименно заряженных частиц с разными по величине зарядами между ними возможно притяжение. Получены соотношения для определения модифицированного параметра неидеальности в случае потенциала взаимодействия, состоящего из двух экспоненциальных членов с разными постоянными экранирования.

PACS: 52.27.Lw

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области физики пылевой плазмы сегодня вызывают большой фундаментальный и практический интерес [1–4]. Одним из самых важных и сложных вопросов в физике пылевой плазмы является определение силы взаимодействия заряженных пылевых частиц. В равновесных системах она определяется через свободную энергию [5, 6]. Но пылевая плазма является неравновесной, так называемой открытой системой, которая существует только при непрерывном подводе энергии извне. В такой плазме имеются ненулевые (в стационарном случае равные друг другу) потоки электронов

и ионов на пылевые частицы. В настоящей работе аналитически вычислена электростатическая энергия двух заряженных макрочастиц, находящихся в неравновесной плазме, созданной внешним источником ионизации, например, пучком быстрых электронов. Проведено сравнение аналитических вычислений с результатами численного моделирования. Установлено, что зависимость электростатической энергии от межчастичного расстояния имеет минимум, тем не менее рассмотрение силы взаимодействия на основе максвеллова тензора натяжений показало, что притяжение между частицами отсутствует.

Интерес к вопросу о характере взаимодействия макрочастиц и возможности притяжения двух одноименно заряженных частиц имеет давнюю историю

*E-mail: fav@triniti.ru

(см., например [7, 8]). Этот интерес сильно возрос после экспериментального наблюдения кристаллизации пылевых частиц [9–14]. Поиск возможных механизмов притяжения между формирующими кристаллическую структуру пылевыми частицами был начат в работе [15]. Впоследствии было установлено, что для формирования кристалла не обязательны силы притяжения между частицами [2], огромную роль в этом играют сила тяжести и электрические поля, неизбежно возникающие на границах плазмы и формирующие электростатическую ловушку для пылевых частиц. Далее поиск механизмов взаимодействия, приводящих к притяжению пылевых частиц, проводился как теоретически, так и экспериментально. Рассматривались возможные механизмы притяжения вследствие низкочастотных флуктуаций электрического поля плазмы [16], за счет взаимодействия из-за осцилляций ионов в ионном потоке [17], вследствие образования областей с пониженной и повышенной (ионный фокус) плотностью ионов за пылевой частицей вследствие сверхзвуковой скорости ионов в приэлектродном слое [18–22], за счет теневых эффектов (сила Лесажа), приводящих к асимметричным потокам ионов на пылевые частицы [23–25], за счет термофоретических сил, приводящих к притяжению пылевых частиц, имеющих меньшую газовой температуру поверхности [26], за счет эффектов поляризации пылевых частиц во внешнем поле [27–29], за счет коллективных эффектов [30] и т. д.

В экспериментах наблюдались явления, которые можно объяснить только притяжением макрочастиц [31, 32], в других экспериментах не обнаружено никакого притяжения [34, 33]. Поиск механизмов притяжения активно ведется и сегодня (см., например [35, 36]). Более подробное обсуждение данных вопросов можно найти в обзорах [1–4]. Нужно отметить, что все эти исследования в основном относятся к плазме низкого давления. В настоящей работе рассмотрено взаимодействие пылевых частиц при повышенных давлениях, когда процессы переноса электронов и ионов вблизи них могут быть описаны в диффузионно-дрейфовом приближении, а влияние потоков ионов и нейтральных атомов на взаимодействие макрочастиц на фоне электростатических сил пренебрежимо мало вследствие малости длины свободного пробега.

При рассмотрении взаимодействия заряженных частиц в средах с линейным откликом на воздействие электрического поля зарядов вводится понятие диэлектрической проницаемости среды. В средах с нелинейным откликом, к которым относится

и плазма, рассмотрение взаимодействия заметно усложняется. Особенно сложной эта задача становится в неравновесной многокомпонентной плазме. В настоящей работе впервые рассмотрена задача о взаимодействии макрочастиц, помещенных в неравновесную двухкомпонентную электрон-ионную плазму. Макрочастицы в плазме обычно заряжаются отрицательно вследствие большей подвижности электронов, и вокруг них формируется поляризационное облако, причем такое облако является неотъемлемой «тенью» любого заряженного тела в плазме. Поэтому в настоящей работе мы под взаимодействием двух макрочастиц в плазме подразумеваем не только парное кулоновское взаимодействие самих заряженных макрочастиц, но также их взаимодействие с зарядом облаков поляризации. Как известно, в равновесном случае это приводит к тому, что взаимодействие заряженных частиц описывается дебаевским потенциалом или потенциалом Юкавы. В неравновесном случае картина становится более сложной и из-за открытости системы (что в данной задаче, в первую очередь, проявляется через непрерывный обмен импульсом электронов и ионов с атомами нейтрального газа) сила взаимодействия, как будет показано ниже, становится непотенциальной.

2. ПОТЕНЦИАЛ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ С ВНЕШНИМ ИСТОЧНИКОМ ИОНИЗАЦИИ

Определим электростатическую энергию взаимодействия макрочастиц в плазме с однородным и постоянным источником ионизации плазмы. Для нахождения распределений потенциалов и объемных зарядов вокруг макрочастиц воспользуемся асимптотической теорией экранирования [37, 38]. Рассмотрим систему из двух макрочастиц с зарядами q_1 в точке \mathbf{r}_1 и q_2 в точке \mathbf{r}_2 (см. рис. 1). Обозначим через S_1, S_2 стоки соответственно на первую и вторую частицы. В дрейфово-диффузионном приближении уравнения, описывающие нестационарный процесс зарядки макрочастиц, имеют вид:

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla \Gamma_\sigma = Q_{ion} - \beta_{ei} n_e n_i - S_1^\sigma \delta(\mathbf{r}_1) - S_2^\sigma \delta(\mathbf{r}_2), \quad (1)$$

$$\sigma = e, i,$$

$$\Delta \phi = -4\pi \sum_\sigma e_\sigma n_\sigma - 4\pi e [q_1 \delta(\mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r}_2)], \quad (2)$$

где

$$\Gamma_\sigma = -\text{sign}(e_\sigma) \mu_\sigma n_\sigma \nabla \phi - \nabla (D_\sigma n_\sigma). \quad (3)$$

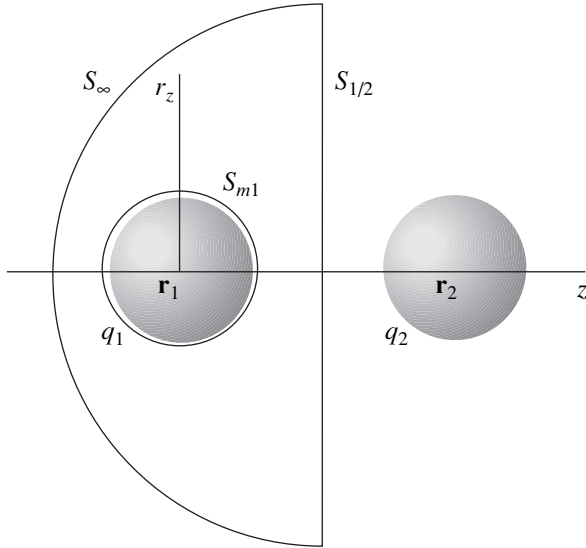


Рис. 1. Схема взаимодействия двух макрочастиц: $S_{1/2}$ — плоскость, перпендикулярная линии, соединяющей центры макрочастиц и делящая ее пополам, S_∞ — полусфера бесконечного радиуса, S_{m1} — поверхность, окружающая первую макрочастицу и вплотную прилегающая к ней, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы центров соответственно первой и второй макрочастиц, q_1, q_2 — их заряды, r_z, z — оси цилиндрической системы координат

Здесь n_σ — концентрация электронов ($\sigma = e$) и ионов ($\sigma = i$), μ_σ — подвижность и D_σ — коэффициент диффузии заряженных частиц плазмы, Q_{ion} — интенсивность объемной ионизации внешним источником, например, пучком быстрых электронов, β_{ei} — коэффициент электрон-ионной рекомбинации, ϕ — потенциал самосогласованного поля, $e_i = e, e_e = -e, e$ — элементарный заряд. Собственная ионизация атомов за счет плазменных электронов предполагается пренебрежимо малой по сравнению с внешним источником. Также полагаем, что коэффициенты переноса, ионизации и рекомбинации электронов постоянны [39] и выполнены соотношения Эйнштейна

$$\frac{D_\sigma}{\mu_\sigma} = \frac{T_\sigma}{e}, \quad (4)$$

где $T_{e,i}$ — температуры электронов и ионов в энергетических единицах.

Найдем асимптотическое поведение эффективного потенциала на расстояниях $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \gg a_j$ (a_j — радиусы частиц, $j = 1, 2$). Потенциал каждой макрочастицы является убывающим, поэтому начиная с некоторого расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \geq R_l, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| \geq R_l$

можно провести линейризацию уравнений (1), (2). В стационарном случае после линейризации уравнения (1) и (2) приобретают вид

$$-\frac{en_0}{T_i} \Delta \phi - \Delta \delta n_i = -\frac{\beta_{ei} n_0}{D_i} (\delta n_e + \delta n_i) - \frac{S_1^i}{D_i} \delta(\mathbf{r}_1) - \frac{S_2^i}{D_i} \delta(\mathbf{r}_2), \quad (5)$$

$$\frac{en_0}{T_e} \Delta \phi - \Delta \delta n_e = -\frac{\beta_{ei} n_0}{D_e} (\delta n_e + \delta n_i) - \frac{S_1^e}{D_e} \delta(\mathbf{r}_1) - \frac{S_2^e}{D_e} \delta(\mathbf{r}_2), \quad (6)$$

$$\Delta \phi = -4\pi e (\delta n_i - \delta n_e) - 4\pi e [q_1 \delta(\mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r}_2)], \quad (7)$$

где $\delta n_\sigma = \delta n_\sigma(r)$ — отклонения плотности частиц сорта σ из-за поглощения плазмы макрочастицей ($\delta n_\sigma = n_\sigma - n_{0\sigma}$),

$$n_0 \equiv n_{0e,i} = \sqrt{\frac{Q_{ion}}{\beta_{ei}}} \quad (8)$$

— концентрация электронов и ионов в невозмущенной плазме. В стационарном состоянии стоки равны друг другу: $S_j^e = S_j^i \equiv S_j, j = 1, 2$.

Суммируя и вычитая уравнения (5), (6), после несложных преобразований получаем

$$\Delta \delta n_+ - k_s^2 \delta n_+ - k_d^2 \delta n_- = [S_1^+ \delta(\mathbf{r}_1) + S_2^+ \delta(\mathbf{r}_2)] + k_d^2 [q_1 \delta(\mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r}_2)], \quad (9)$$

$$k_s^2 \delta n_+ + k_d^2 \delta n_- - \Delta \delta n_- = -k_d^2 [q_1 \delta(\mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r}_2)] - [S_1^- \delta(\mathbf{r}_1) + S_2^- \delta(\mathbf{r}_2)], \quad (10)$$

$$\Delta \phi = -4\pi e \delta n_- - 4\pi e [q_1 \delta(\mathbf{r}_1) + q_2 \delta(\mathbf{r}_2)], \quad (11)$$

где

$$\delta n_\pm = \delta n_i \pm \delta n_e, \quad k_{d\sigma}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{T_\sigma}, \quad k_d^2 = k_{di}^2 + k_{de}^2,$$

$$k_{d-}^2 = k_{di}^2 - k_{de}^2, \quad k_{s\sigma}^2 = \frac{\beta_{ei} n_0}{D_\sigma}, \quad k_s^2 = k_{si}^2 + k_{se}^2,$$

$$k_{s-}^2 = k_{si}^2 - k_{se}^2, \quad \tilde{S}_j^\sigma = \frac{S_j}{D_\sigma}, \quad S_j^\pm = \tilde{S}_j^i \pm \tilde{S}_j^e.$$

После трехмерного интегрального преобразования Фурье уравнения (9)–(11) приводятся к виду

$$(k^2 + k_s^2) U_{+\mathbf{k}} + k_d^2 U_{-\mathbf{k}} = - (S_1^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + S_2^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}) - k_d^2 (q_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + q_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}), \quad (12)$$

$$k_s^2 U_{+\mathbf{k}} + (k^2 + k_d^2) U_{-\mathbf{k}} = -k_d^2 (q_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + q_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}) - (S_1^- e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + S_2^- e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}), \quad (13)$$

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e U_{-\mathbf{k}} + 4\pi e (q_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} + q_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}), \quad (14)$$

где

$$U_{\pm\mathbf{k}} = \int \delta n_{\pm}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \Phi_{\mathbf{k}} = \int \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Система уравнений (12)–(14) является линейной, поэтому она расщепляется на две независимые системы введением новых переменных $U_{\pm\mathbf{k}j}$ и $\Phi_{\mathbf{k}j}$, $j = 1, 2$, где величины с индексом « j » связаны с j -м зарядом и удовлетворяют условиям $\sum_j U_{\pm\mathbf{k}j} = U_{\pm\mathbf{k}}$ и $\sum_j \Phi_{\mathbf{k}j} = \Phi_{\mathbf{k}}$. Для новых переменных имеем две системы соответственно для $j = 1$ и $j = 2$:

$$(k^2 + k_s^2) U_{+\mathbf{k}j} + k_d^2 U_{-\mathbf{k}j} = - (k_d^2 q_j + S_j^+) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (15)$$

$$k_s^2 U_{+\mathbf{k}j} + (k^2 + k_d^2) U_{-\mathbf{k}j} = - (k_d^2 q_j + S_j^-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}, \quad (16)$$

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}j} = 4\pi e U_{\mathbf{k}j} + 4\pi e q_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}. \quad (17)$$

Решение системы (15)–(17) подробно рассмотрено в работе [38], поэтому здесь приведем только необходимые для дальнейшего соотношения. В общем случае $k_1 \neq k_2$ решение для фурье-образа потенциала имеет вид

$$\Phi_{\mathbf{k}j} = \frac{4\pi e}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \left\{ q_j - \frac{k_1^2 [q_j (k_d^2 - k_2^2) + S_j^-]}{(k_1^2 - k_2^2) (k^2 + k_1^2)} - \frac{k_2^2 [q_j (k_d^2 - k_1^2) + S_j^-]}{(k_2^2 - k_1^2) (k^2 + k_2^2)} \right\}. \quad (18)$$

Используя связь потенциала и напряженности электрического поля, $E = -\nabla\phi$, что в фурье-представлении имеет вид

$$\Xi_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}}, \quad (19)$$

из соотношения (18) можно легко найти фурье-образ напряженности электрического поля $\Xi_{\mathbf{k}}$ (который будет использован при вычислении энергии поля).

Потенциал и плотность объемного заряда определяются выражениями

$$\delta n_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = -\frac{1}{4\pi(k_1^2 - k_2^2)} \times \{ [k_d^2 - (q_j k_1^2 + S_j^-) + (k_1^2 - k_d^2) S_j^+] G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) - [k_d^2 - (q_j k_2^2 + S_j^-) - (k_d^2 - k_2^2) S_j^+] G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \}, \quad (20)$$

$$\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = -\frac{k_1^2 (Z_{j,1} - Z_{j,s}) G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)}{4\pi e} + \frac{k_2^2 (Z_{j,2} + Z_{j,s}) G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)}{4\pi e}, \quad (21)$$

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = (Z_{j,1} - Z_{j,s}) G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) + (Z_{j,2} + Z_{j,s}) G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j), \quad (22)$$

где

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[(k_d^2 + k_s^2) \pm \sqrt{(k_d^2 - k_s^2)^2 + 4k_d^2 k_s^2} \right]. \quad (23)$$

$$G_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = \frac{\exp(-k_{\alpha}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad j = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$Z_{j,1} = \frac{eq_j (k_d^2 - k_2^2)}{k_1^2 - k_2^2}, \quad Z_{j,2} = \frac{eq_j (k_1^2 - k_d^2)}{k_1^2 - k_2^2},$$

$$Z_{j,s} = -\frac{eS_j^-}{k_1^2 - k_2^2}.$$

В изотермической плазме $k_{de} = k_{di}$, поэтому $k_{d-} = 0$ и из соотношения (23) следует, что

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (k_d^2 + k_s^2 \pm |k_d^2 - k_s^2|).$$

Пусть $k_1 = k_d$ и $k_2 = k_s$, тогда $Z_{j,1} = eq_j \equiv Z_j$, $Z_{j,2} = 0$. В этом случае выражения (18), (20)–(22) упрощаются:

$$\Phi_{\mathbf{k}j} = \frac{4\pi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j}}{k^2} \left\{ Z_j - \frac{k_d^2 Z_{j,d}}{k^2 + k_d^2} - \frac{k_s^2 Z_{j,s}}{k^2 + k_s^2} \right\}, \quad (24)$$

$$\delta n_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = -\frac{S_j^+ \exp(-k_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (25)$$

$$\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = -\frac{k_d^2 Z_{j,d} \exp(-k_d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{4\pi e|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{k_s^2 Z_{j,s} \exp(-k_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{4\pi e|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (26)$$

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = \frac{Z_{j,d} \exp(-k_d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \frac{Z_{j,s} \exp(-k_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}, \quad (27)$$

где $Z_{j,d} = Z_j - Z_{j,s}$.

Именно в изотермической плазме реализуется случай, когда определитель системы (15), (16) имеет равные корни: $k_1 = k_2$ или $k_d = k_s$. В этом «резонансном» случае

$$\Phi_{\mathbf{k}j} = 4\pi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j} \left[\frac{Z_j}{k^2 + k_d^2} - \frac{2k_d^2 Z_{j,r}}{(k^2 + k_d^2)^2} \right], \quad (28)$$

решение для δn_+^j совпадает с (25), а для δn_-^j и ϕ_j решения содержат простую экспоненту:

$$\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = -\frac{k_d^2}{4\pi e} [(Z_j - 2Z_{j,r}) G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) + k_d Z_{j,r} \exp(-k_d |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|)], \quad (29)$$

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = Z_j G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) + k_d Z_{j,r} \exp(-k_d |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|), \quad (30)$$

где $Z_{j,r} = -eS_j^- / 2k_d^2$. Теперь решения линеаризованных уравнений (5)–(7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \\ \delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + \delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (31)$$

а фурье-образ полного потенциала равен

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}1} + \Phi_{\mathbf{k}2}. \quad (32)$$

3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ МАКРОЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ С ВНЕШНИМ ИСТОЧНИКОМ ИОНИЗАЦИИ

Электростатическая энергия системы зарядов, связанных с двумя заряженными и поглощающими плазму макрочастицами, определяется выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \int [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)]^2 d\mathbf{r}, \quad (33)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ — напряженность электрического поля зарядов, связанных с j -й макрочастицей. На основе теоремы Парсевала для нахождения энергии поля можно воспользоваться и фурье-образами напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int |\Xi_{\mathbf{k}1} + \Xi_{\mathbf{k}2}|^2 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{8\pi} \int k^2 (\Phi_{\mathbf{k}1} + \Phi_{\mathbf{k}2})^2 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Выражение (33) можно преобразовать к виду, эквивалентному для конечной системы зарядов исходному:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}, \quad (35)$$

где ρ — объемный заряд рассматриваемой системы, который определяется выражением

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= eq_1 \delta(\mathbf{r}_1) + eq_2 \delta(\mathbf{r}_2) + \\ &+ e\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + e\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Выражения (34) и (35) можно представить в виде

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = W_{11} + W_{22} + W_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (37)$$

где W_{jj} — собственная энергия системы зарядов, связанной с j -й макрочастицей:

$$\begin{aligned} W_{jj} &= \frac{1}{8\pi} \int k^2 \Phi_{\mathbf{k}j}^2 \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \int [e\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) + Z_j \delta(\mathbf{r}_j)] \times \\ &\times \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) d\mathbf{r}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (38)$$

а $W_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — энергия, зависящая от межчастичного расстояния:

$$\begin{aligned} W_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{4\pi} \int k^2 \Phi_{\mathbf{k}1} \Phi_{\mathbf{k}2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \equiv \\ &\equiv \int [e\delta n_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + Z_1 \delta(\mathbf{r}_1)] \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (39)$$

Выражение для W_{jj} содержит бесконечную собственную энергию точечного заряда, исключая которую и используя (18) либо (21), (22) в общем случае при $k_1 \neq k_2$ получаем

$$\begin{aligned} W_{jj} &= \frac{1}{2} \left\{ Z_j [Z_{j,s}(k_1 - k_2) - k_1 Z_{j,1} - k_2 Z_{j,2}] - \right. \\ &- \frac{k_1}{2} (Z_{j,1} - Z_{j,s})^2 - \frac{k_2}{2} (Z_{j,2} + Z_{j,s})^2 - \\ &\left. - \frac{k_d^2 + k_s^2}{k_1 + k_2} (Z_{j,1} - Z_{j,s})(Z_{j,2} + Z_{j,s}) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

В изотермической плазме при $k_d \neq k_s$ с учетом равенств $Z_{j,1} = Z_j$, $Z_{j,2} = 0$ из формулы (40) следует, что

$$\begin{aligned} W_{jj} &= -\frac{3}{4} k_d Z_j^2 + \frac{(k_d - k_s)^2}{4(k_d + k_s)} Z_{j,s}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (k_d - k_s) \left(1 + \frac{k_s}{k_d + k_s} \right) Z_j Z_{j,s}. \end{aligned} \quad (41)$$

В случае $k_d = k_s$, интегрируя (38) с условием (28) или (29), (30), находим

$$W_{jj} = \frac{k_d}{2} \left(-\frac{3}{2} Z_j^2 + \frac{3}{2} Z_j Z_{j,r} + \frac{1}{4} Z_{j,r}^2 \right). \quad (42)$$

Для равновесного случая из формул (41), (42) следует выражение

$$W_{jj} = -\frac{3}{4} k_d Z_j^2. \quad (43)$$

Данное выражение отличается от широкоизвестной формулы для энергии электрического поля, приходящейся на одну частицу с зарядом eq в дебаевской равновесной плазме [6, 40]:

$$W_d = -\frac{1}{2}k_d e^2 q^2, \quad (44)$$

поэтому остановимся на данном вопросе более подробно.

Электрическое поле в случае дебаевского экранирования заряда eq определяется выражением

$$E = \frac{eq}{r^2}(1 + k_d r)e^{-k_d r}. \quad (45)$$

Это поле является суммой полей точечного заряда E_q и облака поляризованного заряда E_ρ :

$$E = E_q + E_\rho, \quad E_q = \frac{eq}{r^2},$$

$$E_\rho = \frac{eq}{r^2} [(1 + k_d r)e^{-k_d r} - 1].$$

Теперь выражение для определения электрической энергии (без учета собственной энергии точечного заряда $W_0 = \frac{1}{8\pi} \int E_q^2 d\mathbf{r}$) можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\infty (E^2 - E_q^2) r^2 dr = W_{q\rho} + W_{\rho q} + W_{\rho\rho},$$

где $W_{q\rho}$ — энергия взаимодействия точечного заряда с облаком, $W_{\rho q}$ — энергия взаимодействия облака с точечным зарядом, $W_{\rho\rho}$ — энергия взаимодействия зарядов облака с облаком. Простое интегрирование дает

$$W_{q\rho} = W_{\rho q} = -\frac{1}{2}e^2 q^2 k_d, \quad (46)$$

$$W_{\rho\rho} = \frac{1}{4}e^2 q^2 k_d, \quad W = -\frac{3}{4}e^2 q^2 k_d.$$

В итоге мы получили выражение, совпадающее с (43).

В работе [40] полагалось, что вклад во внутреннюю энергию электролита дает только взаимная потенциальная энергия $W_{q\rho}$, выражение для которой совпадает с (44). Это предположение позволило построить теорию, которая хорошо объяснила экспериментальные данные по изменению осмотического давления, точки замерзания, точки кипения, давления пара при разбавлении электролита. Позднее формула (44) была подтверждена для идеальной классической плазмы методами квантовой теории

поля [41] (см. также [6, 42, 43]). Отметим, что энергия взаимодействия заряда со своим поляризационным облаком не зависит от межчастичного расстояния, поэтому не даст вклада в энергию взаимодействия двух макрочастиц. Поэтому далее будем интересоваться только перекрестным членом в формуле (37).

Далее при определении $W_{1,2}$ нам понадобятся интегралы от произведений G_1, G_2 и простых экспонент, вычисление которых сильно упрощается, если воспользоваться формулой сложения Макдональда [44]:

$$\frac{\exp(-k_\alpha r_2)}{r_2} = (2n + 1)P_n(\cos \theta_1) \times$$

$$\times \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty \frac{I_{n+1/2}(k_\alpha r_1)}{\sqrt{r_1}} \frac{K_{n+1/2}(k_\alpha R)}{\sqrt{R}}, & r_1 \leq R, \\ \sum_{n=0}^\infty \frac{I_{n+1/2}(k_\alpha R)}{\sqrt{R}} \frac{K_{n+1/2}(k_\alpha r_1)}{\sqrt{r_1}}, & r_1 \geq R. \end{cases} \quad (47)$$

Здесь $r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$, $r_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$, $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ — расстояние между макрочастицами, θ_1 — угол между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $K_{n+1/2}$ и $I_{n+1/2}$ — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента (соответственно, функции Макдональда и Инфельда), P_n — полиномы Лежандра. В результате получаем

$$\int G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{k_\alpha^2 - k_\beta^2} (D_\beta - D_\alpha),$$

$$\int G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r} = \frac{2\pi}{k_\alpha} \exp(-k_\alpha R),$$

$$\int G_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \exp(-k_\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\pi(1 + k_\alpha R)}{k_\alpha^2} \exp(-k_\alpha R),$$

$$\int \exp(-k_\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \exp(-k_\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\pi}{k_\alpha^3} \left[1 + k_\alpha R + \frac{1}{3} (k_\alpha R)^2 \right] \exp(-k_\alpha R),$$

где $D_\alpha = R^{-1} \exp(-k_\alpha R)$, $\alpha = 1, 2, \beta = 3 - \alpha$. Теперь на основе выражений (21), (22) для неизотермической плазмы находим

$$\begin{aligned}
 W_{12}(R) = & W_{12}^0(R) + (Z_1 Z_{2,s} + Z_2 Z_{1,s}) \times \\
 & \times \left\{ \frac{D_2 - D_1}{(k_1^2 - k_2^2)^2} [k_1^4 + k_2^4 - k_d^2 (k_1^2 + k_2^2)] + \right. \\
 & + \frac{1}{2} k_1 e^{-k_1 R} \frac{k_d^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} - \frac{1}{2} k_2 e^{-k_2 R} \frac{k_1^2 - k_d^2}{k_1^2 - k_2^2} \left. \right\} + \\
 & + Z_{1,s} Z_{2,s} \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} (D_2 - D_1) - \frac{1}{2} k_1 e^{-k_1 R} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} k_2 e^{-k_2 R} \right]. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Здесь $W_{12}^0(R)$ — энергия электрического поля в случае отсутствия стоков, которая определяется выражением

$$\begin{aligned}
 W_{12}^0(R) = & -Z_1 Z_2 \left\{ \frac{1}{2} k_1 e^{-k_1 R} \left(\frac{k_d^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} k_2 e^{-k_2 R} \left(\frac{k_1^2 - k_d^2}{k_1^2 - k_2^2} \right)^2 - \frac{k_d^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} D_1 - \frac{k_1^2 - k_d^2}{k_1^2 - k_2^2} D_2 + \\
 & \left. + \frac{(k_1^2 + k_2^2)(k_1^2 - k_d^2)(k_d^2 - k_2^2)}{(k_1^2 - k_2^2)^3} (D_2 - D_1) \right\}. \quad (49)
 \end{aligned}$$

В изотермической плазме ($T_e = T_i$) в случае $k_d \neq k_s$ выражение (48) переходит в следующее:

$$\begin{aligned}
 W_{12}(R) = & \frac{Z_1 Z_2}{R} \left(1 - \frac{k_d R}{2} \right) e^{-k_d R} - \\
 & - (Z_1 Z_{2,s} + Z_2 Z_{1,s}) \times \\
 & \times \left[\frac{k_s^2}{k_d^2 - k_s^2} \left(\frac{e^{-k_s R}}{R} - \frac{e^{-k_d R}}{R} \right) - \frac{k_d}{2} e^{-k_d R} \right] + \\
 & + Z_{1,s} Z_{2,s} \left[\frac{k_d^2 + k_s^2}{k_d^2 - k_s^2} \left(\frac{e^{-k_s R}}{R} - \frac{e^{-k_d R}}{R} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{k_d}{2} e^{-k_d R} - \frac{k_s}{2} e^{-k_s R} \right]. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Для резонансного случая, $k_d = k_s$, используя соотношения (29), (30) при интегрировании (39), находим

$$\begin{aligned}
 W_{12}(R) = & \frac{Z_1 Z_2}{R} \left(1 - \frac{1}{2} k_d R \right) e^{-k_d R} + \\
 & + \frac{1}{4} e^{-k_d R} [(Z_1 Z_{2,r} + Z_2 Z_{1,r}) (3 - k_d R) - \\
 & - Z_{1,r} Z_{2,r} \left(1 + k_d R - \frac{1}{4} k_d^2 R^2 \right)]. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в выражения (48)–(51) для энергии электрического поля рассматриваемой системы заряды макрочастиц как реальные, так и эффективные, обусловленные стоками, входят сим-

метричным образом. В отсутствие стоков выражения (50), (51) сводятся к следующему:

$$W_{1,2}(R) = \frac{Z_1 Z_2}{R} \left(1 - \frac{1}{2} k_d R \right) e^{-k_d R}, \quad (52)$$

которое совпадает с выражением, полученным в работах [45–48] для зависящей от межчастичного расстояния части электростатической энергии системы двух макрочастиц в равновесной плазме.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Как отмечалось выше, значения зарядов и стоков, входящих в конечные выражения для определения электростатической энергии, в рамках асимптотической теории не могут быть определены. Поэтому для их нахождения были проведены численные расчеты зарядки пылевых частиц. Численно, методом конечных разностей, решалась система нестационарных уравнений (1), (2) с граничными условиями

$$n_{e,i}|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{e q_{int}}{r_0^2}, \quad (53)$$

$$n_{e,i}|_{r=a_d} = n_0, \quad \phi|_{r=a_d} = 0,$$

где r_0 — радиус макрочастицы,

$$a_d = \left(\frac{4}{3} \pi n_d \right)^{-1/3}$$

— радиус ячейки Зейтца–Вигнера, n_d — концентрация макрочастиц, которая выбиралась достаточно большой, чтобы исключить влияние внешней границы на результаты расчетов, q_{int} — заряд макрочастицы, определенный интегрированием потоков на нее:

$$q_{int} = 4\pi r_0^2 \int (\Gamma_e - \Gamma_i) dt.$$

В качестве начальных данных задавались нулевые значения потенциала и ячейка Зейтца–Вигнера заполнялась плазмой равновесной концентрации. Расчеты проведены для аргона, коэффициенты переноса электронов в котором были рассчитаны на основе численного решения уравнения Больцмана для функции распределения электронов по энергии с сечениями из работы [49]. При $T_e = 300$ К подвижность и коэффициент диффузии электронов при концентрации атомов аргона $N = 2.5 \cdot 10^{19}$ см⁻³ равны $\mu_e = 9.98 \cdot 10^4$ В/см²·с, $D_e = 2580$ см²/с. Подвижность и коэффициент диффузии ионов Ar₂⁺ — основных ионов в плазме аргона при повышенных давлениях — при атмосферном давлении и температуре

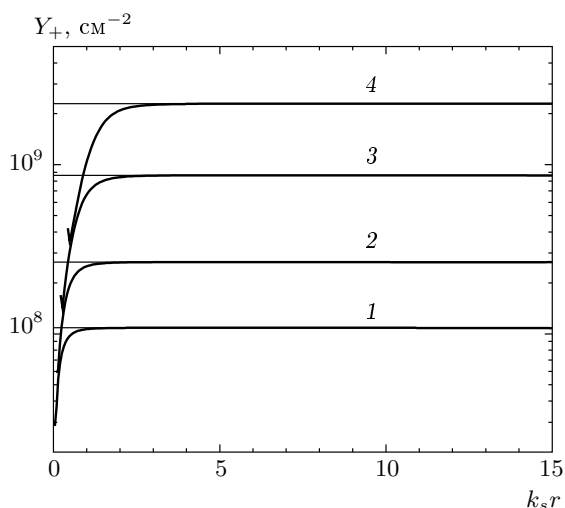


Рис. 2. Распределение величины Y_+ вокруг макрочастицы при $Q_{ion} = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, $N = 2.80 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, ($k_s = 435.47 \text{ см}^{-1}$, $k_d = 1231.70 \text{ см}^{-1}$) и разных радиусах макрочастиц: $r_0 = 1$ (1), 2 (2), 5 (3), 10 (4) $\mu\text{м}$

$T_i = 300 \text{ К}$ соответственно равны $\mu_i = 2.094 \text{ В/см}^2 \cdot \text{с}$ и $D_i = 0.0542 \text{ см}^2/\text{с}$ [50, 51], а коэффициент диссоциативной рекомбинации определяется зависимостью [52]

$$\beta_{ei} = 0.85 \cdot 10^{-6} (T_e/0.026)^{-0.67} \text{ см}^3/\text{с}.$$

Температура электронов во всей расчетной области полагалась постоянной и равной 300 К, соответственно, полагались постоянными все коэффициенты переноса и рекомбинации. Примерно такие условия были в положительном столбе в экспериментах [53]. Более подробно методика расчета заряда макрочастиц описана в работах [39, 54].

На рис. 2 приведены зависимости величины $Y_+ = -4\pi r d n_+ \exp(k_s r)$ от расстояния для макрочастиц разного радиуса. Величина Y_+ , согласно выражению (25), имеет асимптотическое значение $S_+ = S (D_i^{-1} + D_e^{-1})$, которое позволяет определить поток электронов и ионов на частицу (см. табл. 1). В табл. 1 приведены значения расстояния $r_5\%$, на котором отклонение величины Y_+ от асимптотического значения достигает 5%. На меньших расстояниях асимптотическая теория может приводить к большим ошибкам при определении потенциала и плотности пространственного заряда. Из рис. 2 видно, что для пылевых частиц малого размера область применимости асимптотической теории начинается с малых расстояний, а с увеличением размера растет

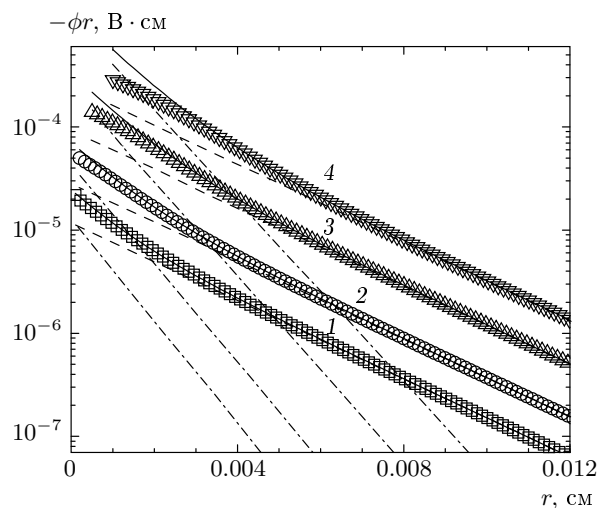


Рис. 3. Распределение приведенного потенциала электрического поля при $Q_{ion} = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Обозначения кривых, как на рис. 2. Штриховые кривые — потенциал с малой постоянной экранирования ($\phi_s = q_s/r \exp(-k_s r)$), штрих-пунктирные — с большой ($\phi_d = q_d/r \exp(-k_d r)$), сплошные кривые — их сумма

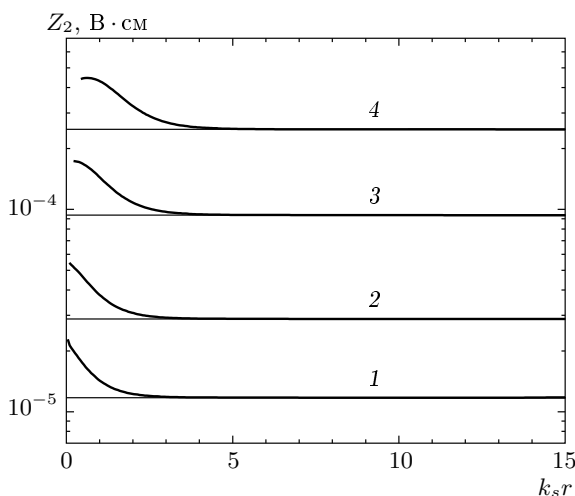


Рис. 4. Распределение приведенного потенциала Z_2 электрического поля при $Q_{ion} = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Обозначения кривых, как на рис. 2

и расстояние выхода величины Y_+ на асимптотическое значение.

На рис. 3 приведены зависимости потенциала от расстояния, полученные с помощью численного расчета и согласно асимптотической теории. Значения эффективных зарядов определялись следу-

Таблица 1. Параметры зависимости потенциала электрического поля макрочастицы от расстояния при $N = 2.80 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $Q_{ion} = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ ($k_s = 435.47 \text{ см}^{-1}$, $k_d = 1231.70 \text{ см}^{-1}$)

r_0 , МКМ	1	2	5	10
S , с^{-1}	$5.271 \cdot 10^6$	$1.290 \cdot 10^7$	$4.203 \cdot 10^7$	$1.115 \cdot 10^8$
J , с^{-1}	$5.000 \cdot 10^6$	$1.154 \cdot 10^7$	$3.234 \cdot 10^7$	$7.034 \cdot 10^7$
$S_- / (k_d^2 - k_s^2)$	81.66	199.83	651.21	1727.42
q_s	-81.59	-199.63	-650.56	-1725.70
q_d	-89.13	-291.89	-1661.43	-7643.63
$q = q_d + q_s$	-170.80	-491.72	-2312.64	-9371.04
q_{s0}	-81.510	-198.918	-637.201	-1602.641
q_{d0}	-88.597	-285.821	-1499.596	-5595.755
$q_0 = q_{d0} + q_{s0}$	-170.107	-484.739	-2136.797	-7198.395
q_{cal}	-151.17	-376.50	-1175.76	-2767.86
k_1 , см^{-1}	1139.33	1096.22	1046.95	1010.00
$k_s r_{5\%}$	0.69	1.06	1.68	2.30

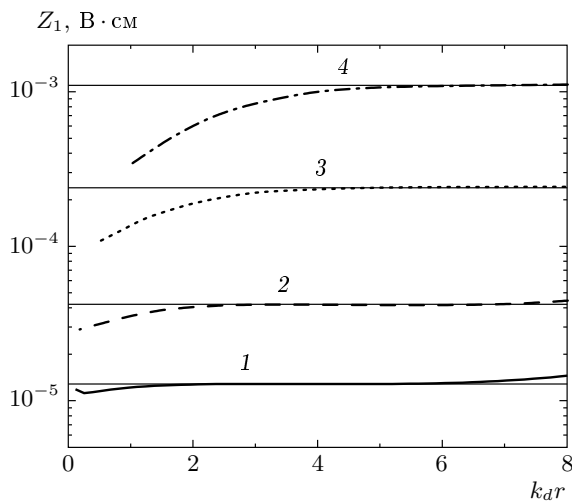


Рис. 5. Приведенный потенциал Z_1 электрического поля на малых расстояниях. Обозначение кривых, как на рис. 2

ющим образом. Сначала по расчетному потенциалу определялся заряд q_s — по представленным на рис. 4 асимптотическим значениям произведения $Z_2(r) = -\phi r \exp(k_s r)$ (см. выражение (27)). Затем из расчетного потенциала вычиталась найденная экспонента и по оставшейся части, графики зависимости которой приведены на рис. 5, определялась экспонента с большей постоянной экранирования, а именно значения k_1 и q_d ($q_d = q - q_s$). Полученные

величины представлены в табл. 1. Оказалось, что постоянная экранирования k_1 незначительно меньше, чем k_d , что, вероятно, обусловлено близостью границы области справедливости асимптотической теории. Значения величины q_s можно определить также из соотношения $q_s = S_- / (k_s^2 - k_d^2)$, используя значение потока S , найденное по асимптоте зависимости $Y_+(r)$. Вычисленные таким образом значения заряда оказались в хорошем согласии с определенными по асимптотическому поведению потенциала, что видно из табл. 1.

Нужно отметить, что в выражения для потенциала (27), (30) входят «истинные» заряды только в случае точечных частиц. В случае частиц конечного размера (как было в численных расчетах) зависимость потенциала будет иметь вид (27) или (30) с перенормированными зарядами (см. [40]):

$$Z_s = \frac{Z_{s0} \exp(k_s r_0)}{1 + k_s r_0}, \quad Z_d = \frac{Z_{d0} \exp(k_d r_0)}{1 + k_d r_0}, \quad (54)$$

$$Z_0 = Z_{d0} + Z_{s0},$$

и в резонансном случае:

$$Z = \frac{Z_0 \exp(k_d r_0)}{1 + k_d r_0}, \quad Z_r = \frac{Z_{r0} \exp(k_d r_0)}{k_s^2 r_0^2}, \quad (55)$$

где Z_0 , Z_{s0} , Z_{d0} — «истинные» заряды. Соотношения (54), (55) легко могут быть получены либо из выражения для поля при $r = r_0$ на основе теоремы Остроградского–Гаусса, либо из условия квазинейтральности путем интегрирования плотности объемного заряда, даваемого соотношениями (26), (29).

Таблица 2. Заряд макрочастиц q_a согласно аналитической теории зарядки [55, 56] и ланжевенковский поток J_a ионов на макрочастицы разного радиуса

r_0 , мкм	1	2	5	10
q_a	-193.55	-387.11	-967.77	-1935.54
J_a , с ⁻¹	$7.138 \cdot 10^6$	$1.428 \cdot 10^7$	$3.569 \cdot 10^7$	$7.138 \cdot 10^7$

Из сравнения величин q_0 и q_{cal} , S и J видно, что по мере уменьшения размера макрочастицы они становятся все ближе и ближе друг к другу (q_{cal} — стационарное значение заряда q_{int} , J — стационарный поток ионов и электронов на макрочастицу в численном расчете). Это позволяет предположить, что для малых частиц асимптотическая теория применима практически на любых расстояниях.

Нужно заметить, что заряд уединенной макрочастицы в диффузионно-дрейфовом режиме переноса электронов и ионов можно оценить на основе аналитической теории зарядки [55, 56] из соотношения

$$q_a = -\frac{T_e r_0}{e^2} \ln \frac{\mu_e}{\mu_i}. \tag{56}$$

Вычисленные по формуле (56) значения заряда представлены в табл. 2. В работе [57] мы отмечали, что поток ионов на пылевую частицу приблизительно совпадает с ланжевенковским потоком. Поэтому для оценки стоков электронов и ионов имеем

$$J_a = 4\pi e \mu_i n_{0i} |q_a|. \tag{57}$$

Вычисленные значения J_a также представлены в табл. 2. Сравнение как q_{cal} и q_a , так и S и J_a в табл. 1, 2 показывает, что для макрочастиц малого радиуса заряды и стоки с приемлемой точностью могут быть оценены из соотношений (56) и (57).

На рис. 6 приведены зависимости электростатической энергии системы двух макрочастиц от межчастичного расстояния, рассчитанные согласно формуле (50) с использованием приведенных в табл. 1 значений зарядов. Видно, что зависимости энергии от расстояния имеют минимум для всех размеров пылевых частиц. Были также определены зависимости энергии от расстояния с использованием распределения электрического потенциала и плотности объемного заряда, полученных при численном расчете зарядки уединенной пылевой частицы. Как и при аналитическом рассмотрении, полагалось, что потенциал и плотность объемного заряда системы

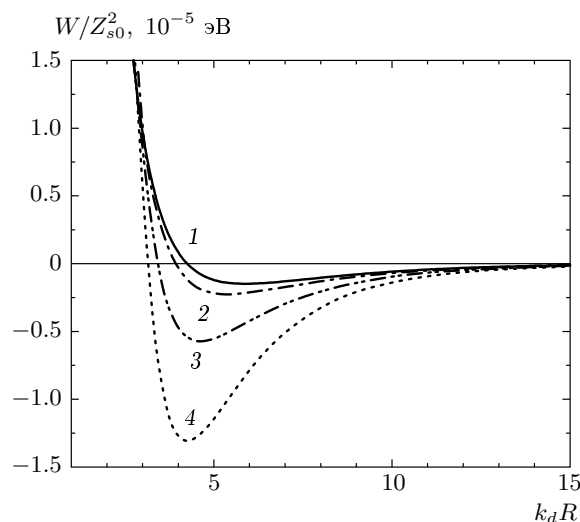


Рис. 6. Электростатическая энергия системы двух одинаковых макрочастиц в изотермической плазме согласно аналитической теории (50). Обозначение кривых, как на рис. 2

двух макрочастиц являются суммой соответствующих величин уединенных частиц, помещенных на заданном расстоянии друг от друга. Такой подход подобен приведенному выше аналитическому рассмотрению. Можно ожидать, что это приближение позволит правильно описать электростатическое взаимодействие, по крайней мере, при не слишком малых межчастичных расстояниях.

Определенные численным интегрированием (методом Симпсона с адаптивным выбором шага) зависимости приведены на рис. 7, из которого видно, что минимумы сохранились и для частиц радиусом 1 мкм наблюдается хорошее согласие с аналитическими данными. По мере роста размера частиц на малых расстояниях согласие заметно ухудшается. Учет конечности размера частиц при численном интегрировании энергии по аналитическим зависимостям потенциала и объемного заряда позволил заметно улучшить согласие. При этом поляризация макрочастиц пренебрегалась, поскольку в работе [58] было показано, что при выполнении условия $R \gg r_0$ дипольный и более высокие моменты дают пренебрежимо малый вклад в энергию взаимодействия двух частиц.

Наличие минимума в зависимости энергии электростатического поля двух макрочастиц от расстояния не говорит о существовании области притяжения между ними. Для равновесного случая, когда для энергии справедливо выражение (52), имеющее

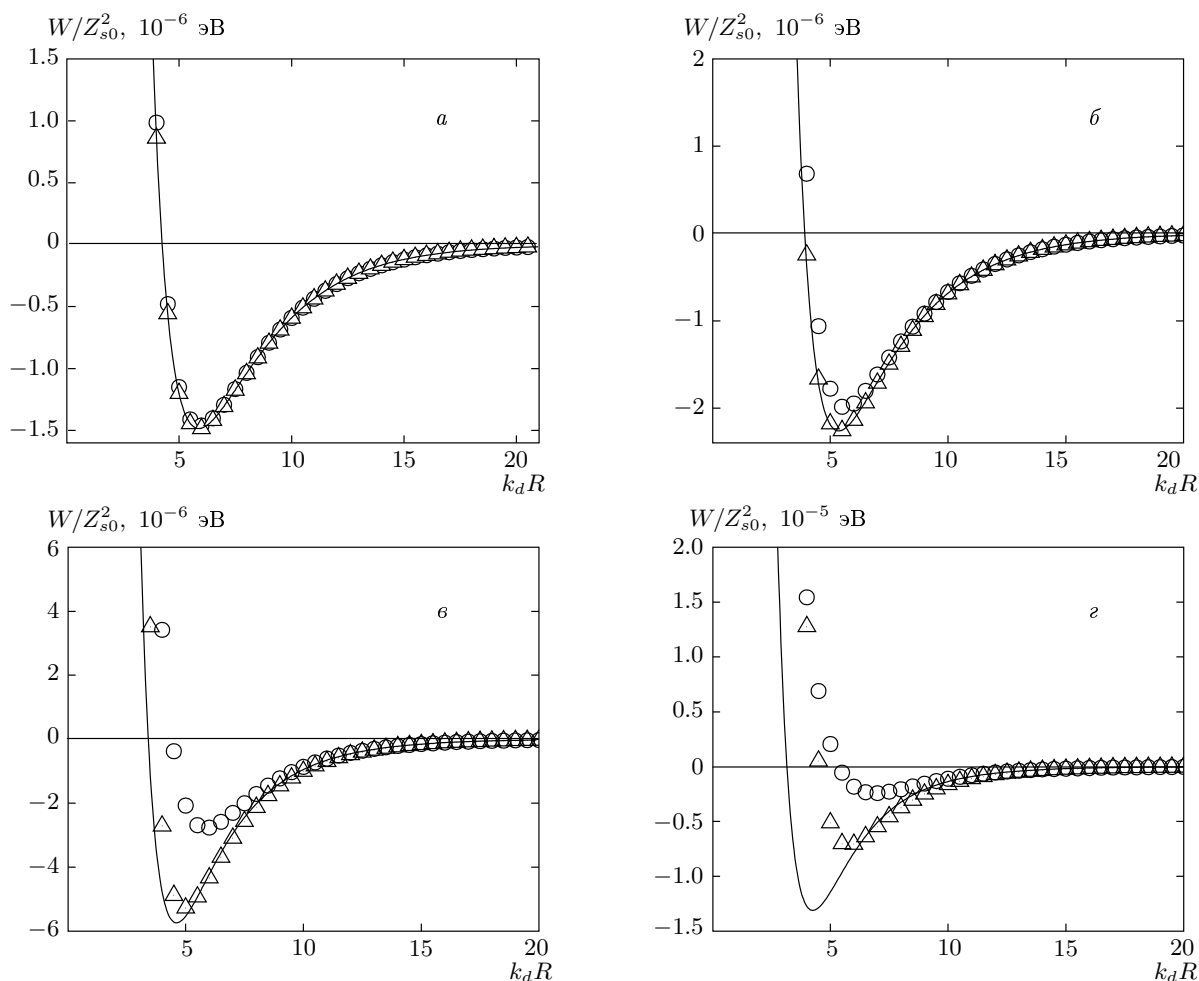


Рис. 7. Электростатическая энергия системы двух одинаковых макрочастиц в изотермической плазме при их радиусе $r_0 = 1$ (а), 2 (б), 5 (в), 10 (г) мкм: сплошная линия — согласно аналитической теории (50), о — на основе данных численного расчета зарядки, Δ — согласно аналитической теории с учетом размера частиц

минимум при $k_d R = 1 + \sqrt{3}$, можно найти свободную энергию [59, 58], которая является естественным термодинамическим потенциалом в переменных температура T и объем V , в то время как внутренняя энергия является термодинамическим потенциалом в переменных энтропия–объем. Поэтому для изотермических процессов при определении силы нужно пользоваться именно свободной энергией [6].

Свободная и внутренняя энергии связаны известным термодинамическим тождеством [6]:

$$\mathcal{F} = T \int_T^\infty \left(\frac{W}{T^2} \right)_V dT, \quad (58)$$

где интеграл берется при постоянном объеме, т. е. при постоянных плотностях электронов и ионов, n_0 .

Поэтому в формуле (58) от температуры зависит только постоянная экранирования: $k_D \propto T^{-1/2}$. Интегрируя (58), находим

$$\mathcal{F} = \frac{Z_1 Z_2}{R} \exp(-k_d R), \quad (59)$$

что совпадает с потенциалом Юкавы. Поэтому притяжение между одноименно заряженными частицами в равновесной плазме отсутствует. В неравновесном случае понятие свободной энергии теряет смысл, поэтому рассмотрим взаимодействие макрочастиц на основе максвеллова тензора натяжений.

5. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ МАКСВЕЛЛОВА ТЕНЗОРА НАТЯЖЕНИЙ

Пусть газ как целое покоится, поэтому в каждой точке вне макрочастиц выполнено равенство

$$f = -\nabla P + \frac{\epsilon_g - 1}{8\pi} \nabla E^2 \equiv 0,$$

где f — плотность объемных сил, действующих на газ, P — давление и ϵ_g — диэлектрическая проницаемость газа, E — напряженность электрического поля. В столкновительном случае давление включает также вклады электронной и ионной компонент плазмы. Вообще говоря, нужно еще учесть вклад плазмы в диэлектрическую проницаемость среды, который определяется, в основном, электронной компонентой плазмы. Действительная часть статической диэлектрической проницаемости плазмы определяется выражением [60]

$$\epsilon_p = 1 - 4\pi e^2 n_e / m\nu_m^2,$$

где n_e — концентрация электронов, e, m — заряд и масса электрона, ν_m — частота упругих столкновений электронов. В низкотемпературной плазме обычно выполнено условие $4\pi e^2 n_e / m\nu_m^2 \ll 1$, поэтому $\epsilon_p \approx 1$. Диэлектрическая проницаемость газа также мало отличается от единицы, поэтому далее везде положено, что диэлектрическая проницаемость среды равна единице. Из-за этого градиент суммарного давления равен нулю, хотя градиенты давления отдельных компонент плазмы не равны нулю и они обеспечивают диффузионные потоки электронов и ионов около макрочастиц. При высоких давлениях, как было показано в работе [53], также малы силы, связанные с потоками ионов и нейтральных атомов на макрочастицы (такие как сила ионного увлечения, термофоретическая и радиометрическая силы) вследствие малости длины пробега атомов и ионов. В этом случае при описании электростатических сил можно ограничиться рассмотрением максвеллова тензора натяжений [5].

Сила взаимодействия двух макрочастиц определяется выражением [59, 58]

$$\mathbf{F} = \oint_{S_{1/2}+S_\infty} \mathbf{T}_n dS - \int_V \rho \mathbf{E} dV, \quad (60)$$

где T_n — нормальная (направленная вдоль внешней нормали) составляющая максвеллова тензора натяжений [5], ρ — плотность объемного заряда, $S_{1/2}$ — плоскость, проходящая перпендикулярно через центр линии, соединяющей центры макрочастиц

(см. рис. 1), S_∞ — полусфера бесконечного радиуса вокруг выбранной макрочастицы, объем V ограничен поверхностью S_{m1} , прилегающей вплотную к поверхности самой макрочастицы, и поверхностями $S_{1/2}, S_\infty$.

Введем цилиндрическую систему координат с началом в центре первой макрочастицы и осью z , направленной вдоль линии, соединяющей центры макрочастиц, как показано на рис. 1. На полусфере бесконечного радиуса из квазинейтральности системы зарядов следует равенство нулю интеграла от максвеллова натяжения. Рассматриваемая задача является аксиально-симметричной, поэтому сила взаимодействия направлена вдоль оси z . Тензор натяжений имеет следующие z -составляющие:

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \frac{E_z E_x}{4\pi}, & T_{zy} &= \frac{E_z E_y}{4\pi}, \\ T_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right), \end{aligned} \quad (61)$$

где оси x и y лежат в плоскости $S_{1/2}$. После интегрирования по аксиальному углу первый член в правой части уравнения (60) можно представить в виде

$$F_T = \oint_{S_{1/2}+S_\infty} \mathbf{T}_n dS = \frac{1}{4} \int_0^\infty (E_z^2 - E_s^2) r_z dr_z, \quad (62)$$

где $E_s = E_\perp (r_z, z = R/2)$ — составляющая электрического поля в плоскости $S_{1/2}$, r_z — радиальная координата цилиндрической системы координат.

Для точечных частиц после интегрирования выражения (60) с учетом (62) получаем для силы, действующей на первую частицу в случае $k_d \neq k_s$:

$$F_{12}(R) = -\frac{Z_1}{R^2} [(Z_2 - Z_{2,s}) (1 + k_d R) e^{-k_d R} + Z_{2,s} (1 + k_s R) e^{-k_s R}], \quad (63)$$

а в случае $k_d = k_s$:

$$F_{12}(R) = -\frac{Z_1}{R^2} [Z_2 (1 + k_d R) + Z_{2,r} k_d^2 R^2] e^{-k_d R}. \quad (64)$$

Из формул (63), (64) видно, что, во-первых, сила взаимодействия двух одноименно заряженных частиц оказывается отталкивательной, во-вторых, сила несимметрична: в общем случае $F_{12} \neq F_{21}$, а равенство в неравновесной плазме имеет место только для одинаковых частиц. Из формул (63), (64) также видно, что асимметрия сил обусловлена стоками электронов и ионов на макрочастицы. В равновесном случае в отсутствие стоков, когда $Z_{2,s} = 0, Z_{2,r} = 0$, а экранирование является чисто дебаевским, сила

становится симметричной. Нужно отметить, что сила будет симметричной вне зависимости от зарядов макрочастиц в случае линейной зависимости стока электронов и ионов на макрочастицу от ее заряда. Это, например, имеет место в аналитической теории зарядки, что видно из соотношений (56), (57). Также отметим, что асимметрия может являться следствием неприменимости асимптотической теории экранирования на малых расстояниях от поверхности макрочастицы.

Неравенство $F_{12} \neq F_{21}$ никоим образом не нарушает третий закон Ньютона, так как является следствием открытости рассматриваемой системы зарядов. Электроны и ионы, ускоряемые электрическими полями, непрерывно испытывают силу сопротивления газовой среды и в столкновениях с частицами нейтрального газа непрерывно рассеивают получаемый от самосогласованного электрического поля импульс. Нужно особо подчеркнуть, что в рассматриваемом нами столкновительном режиме переноса электронов и ионов электрическая сила, действующая на любую из этих частиц, в точности равна силе сопротивления газовой среды. Поэтому в выражении (63) или (64) с самими зарядами макрочастиц связана только кулоновская часть силы, равная $-Z_1 Z_2 / R^2$ (симметричная), а вся остальная часть обусловлена поляризационным зарядом плазмы и эта часть по абсолютной величине равна векторной сумме сил сопротивления, действующих на каждый заряд при его направленном движении. Поэтому неравенство сил $F_{12} \neq F_{21}$ в выражениях (63), (64) является следствием асимметрии силы, действующей на нейтральный газ со стороны заряженных компонент плазмы.

Равенство сил в равновесной плазме (как и в средах с линейным откликом) связано с тем, что суммарное электрическое поле заряда каждой макрочастицы и зарядов облака поляризации на всех расстояниях пропорционально заряду самой макрочастицы. Поэтому сила взаимодействия двух макрочастиц в равновесной плазме определяется произведением зарядов макрочастиц и, следовательно, симметрична. В случае наличия потоков плазменных частиц на макрочастицы, как видно из выражений для потенциала (22), (27), (30), суммарное поле определяется не только самим зарядом, но и интенсивностью стоков электронов и ионов, которые уже не прямо пропорциональны аккумулярованному на макрочастицах заряду, а определяются также свойствами плазменной среды. Поэтому прямая пропорциональность поля заряду нарушается, что в итоге и приводит к нарушению равенства сил.

Отметим, что в физике пылевой плазмы неравенство сил наблюдается достаточно часто. Например, асимметрична сила, связанная с ионной фокусировкой за пылевой частицей в приэлектродном слое [18–22]. Также асимметричны силы, вызванные процессами термофореза [26] и эффектами поляризации пылевых частиц во внешнем поле [29]. Наглядным примером нарушения равенства сил является взаимодействие заряженных тел в потоке жидкости. Здесь вследствие наличия движущейся среды, что приводит к появлению силы Стокса, взаимодействие оказывается несимметричным: для одной из частиц кулоновская сила и сила сопротивления жидкости складываются, а для другой — вычитаются.

Выражения (63), (64) можно представить в виде

$$F_{12}(R) = Z_1 E_2(R), \quad (65)$$

где $E_2(R)$ — напряженность электрического поля системы зарядов второй частицы в точке нахождения первой, Z_1 — значение заряда первой частицы (которое для точечных частиц равно истинному). Вследствие асимметричности сил работа по перемещению макрочастиц зависит от того, какая из макрочастиц перемещается, и только в равновесной плазме или для одинаковых макрочастиц перестает зависеть от того, каким образом меняется межчастичное расстояние. Следовательно, сила в общем случае в неравновесной плазме является непотенциальной и это необходимо иметь в виду при рассмотрении процессов в пылевой плазме. Для частиц одинакового размера с зарядами $Z_1 = Z_2 = Z$, $Z_{1,s} = Z_{2,s} = Z_s$, $Z_{1,r} = Z_{2,r} = Z_r$, интегрируя соотношение $\mathbf{F}_{12} = -\nabla U_{12}$ с учетом того, что энергия взаимодействия при $R = \infty$ равна нулю, из выражений (63), (64) получим следующий вид потенциала взаимодействия:

при $k_d \neq k_s$

$$U_{12}(R) = \frac{Z}{R} \left[(Z - Z_s) e^{-k_d R} + Z_s e^{-k_s R} \right], \quad (66)$$

при $k_d = k_s$

$$U_{12}(R) = \frac{Z}{R} (Z + Z_r k_d R) e^{-k_d R}. \quad (67)$$

Можно заметить, что полученные выражения заметно отличаются от соотношений (51), (52) и совсем не содержат членов, включающих парные произведения зарядов, обусловленных стоками электронов и ионов на макрочастицы.

Сравнение зависимостей силы взаимодействия от межчастичного расстояния, рассчитанных по

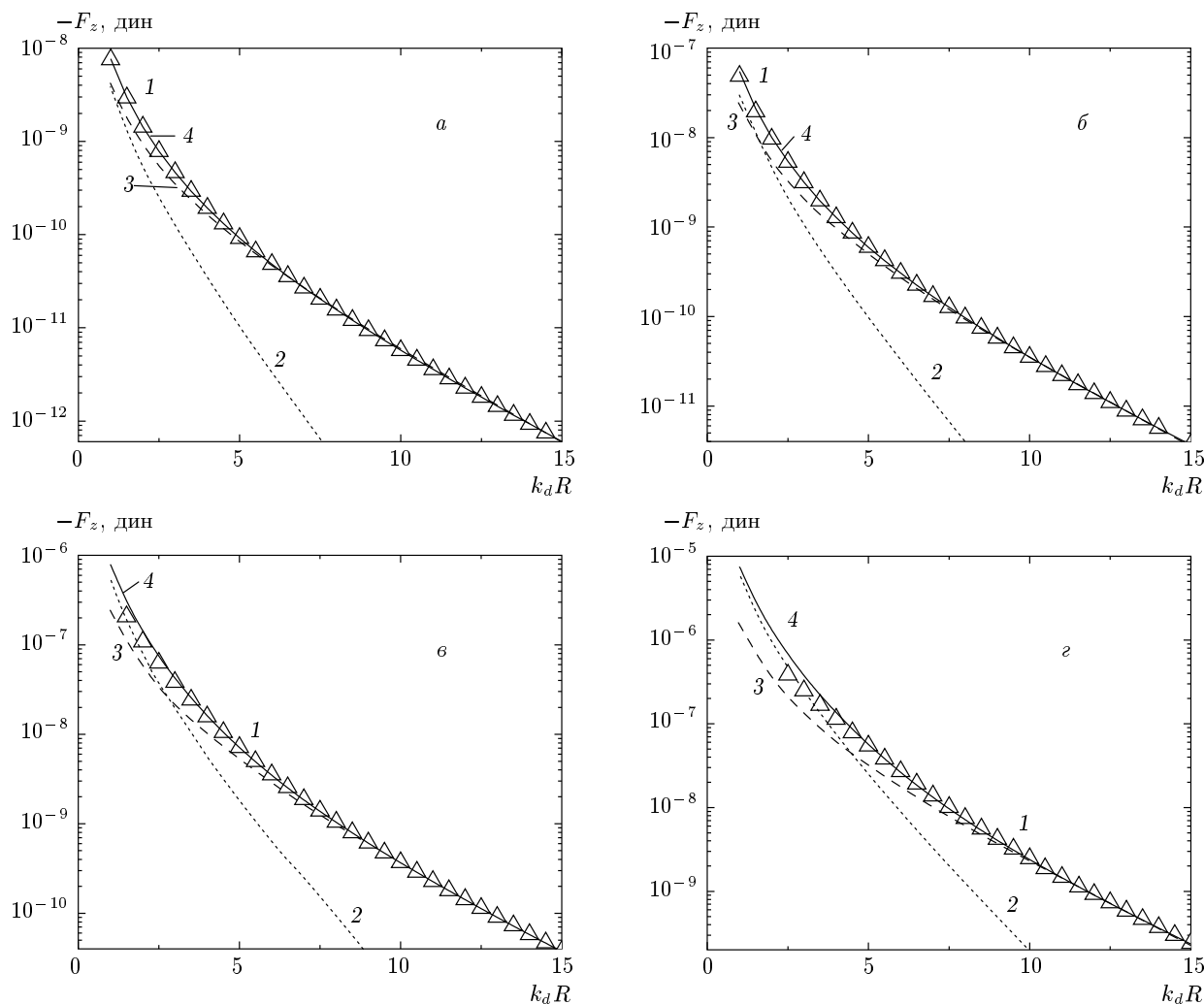


Рис. 8. Абсолютная величина электростатической силы взаимодействия двух одинаковых макрочастиц в изотермической плазме: 1 (Δ) — на основе данных численного расчета зарядки, 2 — $F_{z,d} = -e^2 q_{ca1} q_d / R^2 \exp(-k_d R)$, 3 — $F_{z,s} = -e^2 q_{ca1} q_s / R^2 \exp(-k_s R)$, 4 — $F_{z,s} + F_{z,d}$; $r_0 = 1$ (а), 2 (б), 5 (в), 10 (г) мкм

формуле (63) и найденных в результате численного интегрирования с расчетными распределениями электрического поля и объемного заряда, показало, что между ними имеется хорошее согласие на больших расстояниях. На расстояниях $k_d R > 10 - 15$ (в зависимости от радиуса макрочастиц: приблизительно 10 для $r_0 = 1$ мкм и приблизительно 15 для $r_0 = 10$ мкм) сила хорошо описывалась зависимостью

$$F_{z,as} = -\frac{ZZ_s}{R^2} (1 + k_s R) e^{-k_s R}.$$

Учет размера частиц при вычислении силы снова приводил к улучшению согласия численного расчета и асимптотической теории. Еще лучшего согласия удалось достичь, используя для заряда первой час-

тицы полученное в численном расчете значение. В этом случае, как видно из рис. 8, имеется согласие практически на всех расстояниях.

Здесь нужно отметить, что в случае одноименно-заряженных макрочастиц разного радиуса между ними возможно притяжение [61–63]. Область проявления данного эффекта расположена на расстояниях, при которых зазор между поверхностями макрочастиц составляет менее 1% от их суммарного радиуса. На таких расстояниях можно пренебречь эффектами экранирования и при моделировании процессов агломерации и коагуляции воспользоваться результатами указанных работ. Для равновесной пылевой плазмы, если выполнены неравенства

$$R > a_1 \left(1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \right), \quad R > a_2 \left(1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \right), \quad (68)$$

во внутренней области между макрочастицами имеется поверхность S_0 , на которой z -составляющая поля обращается в нуль. Здесь a_1, q_1, a_2, q_2 — характерные радиусы и заряды макрочастиц. В этом случае из формулы (62) следует, что

$$F_T = -\frac{1}{4} \int_0^\infty E_{s0}^2 r_z dr_z, \quad (69)$$

где теперь E_{s0} — перпендикулярная межчастичной линии составляющая поля на поверхности S_0 . В итоге, следуя работам [59, 58], для равновесной плазмы получаем

$$F_z = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \left(E_{s0}^2 + 8\pi n_0 \left\{ T_i \left[\exp\left(-\frac{e\phi_s}{T_i}\right) - 1 \right] + T_e \left[\exp\left(\frac{e\phi_s}{T_e}\right) - 1 \right] \right\} \right) r_z dr_z, \quad (70)$$

где ϕ_s — потенциал суммарного поля на поверхности S_0 . Подынтегральное выражение в правой части (70) не отрицательно, поэтому при выполнении условий (68) между одноименно заряженными макрочастицами притяжение отсутствует (отметим, что нарушение этих условий не гарантирует притяжения). Для одинаковых частиц с равными зарядами эти условия выполнены всегда, поэтому между ними нет притяжения ни при каких межчастичных расстояниях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования взаимодействия макрочастиц в настоящей работе установлено, что в общем случае сила их взаимодействия является непотенциальной и только в случае одинаковых макрочастиц или в случае отсутствия стоков на макрочастицы можно ввести понятие потенциала. Для этого случая найден вид потенциала взаимодействия, который содержит две экспоненты. Сегодня хорошо известна фазовая диаграмма частиц, взаимодействующих по потенциалу Юкавы (см. [2–4]). Для двухэкспоненциального потенциала взаимодействия эти данные требуют уточнения, для чего необходимо проведение расчетов, например, методом молекулярной динамики, фазовой диаграммы

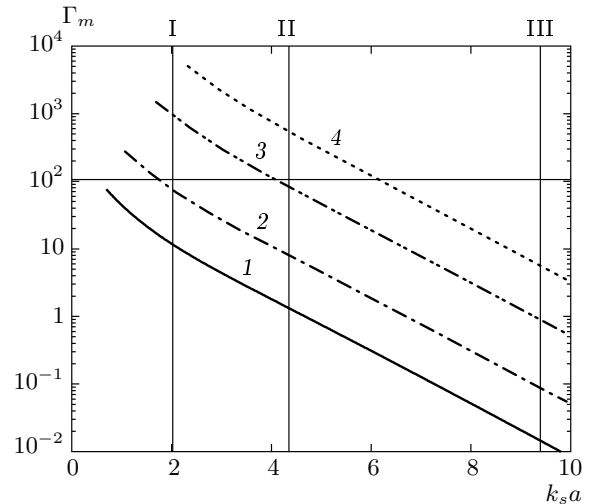


Рис. 9. Зависимости модифицированного параметра неидеальности от структурного параметра. Вертикальные линии соответствуют значениям $n_d = 10^7$ (I), 10^6 (II), 10^5 (III) см^{-3} . Горизонтальная линия соответствует критическому значению параметра неидеальности $\Gamma_{cr} = 106$. Обозначение кривых 1–4, как на рис. 2

пылевой плазмы для такого потенциала. В качестве оценок, следуя работе [64], определим условие кристаллизации для случая двухэкспоненциального взаимодействия. На основе частоты акустической ветви колебаний кристаллической решетки, используя формулы (63), (64), можно получить следующие выражения для модифицированного параметра неидеальности для изотермической плазмы:

при $k_d \neq k_s$

$$\Gamma_m = \frac{e^2 q_{cal}}{aT} \left[q_d \left(1 + k_d a + \frac{1}{2} k_d^2 a^2 \right) e^{-k_d a} + q_s \left(1 + k_s a + \frac{1}{2} k_s^2 a^2 \right) e^{-k_s a} \right], \quad (71)$$

при $k_d = k_s$

$$\Gamma_m = \frac{e^2 q_{cal}}{aT} \times \left[q \left(1 + k_d a + \frac{1}{2} k_d^2 a^2 \right) + q_r k_d^3 a^3 \right] e^{-k_d a}, \quad (72)$$

где $a = n_d^{-1/3}$ — среднее межчастичное расстояние, n_d — концентрация пылевых частиц. В случае отсутствия стоков, когда экранирование становится

дебаевским, выражения (71), (72) сводятся к полученному в работе [64] соотношению. Положим, что кристаллизация имеет место, как и в случае потенциала Юкавы, при выполнении условия $\Gamma_m \approx 106$. На рис. 9 приведены графики зависимостей модифицированного параметра неидеальности от межчастичного расстояния, рассчитанных на основе (71). Видно, что при тех концентрациях пылевых частиц на уровне 10^5 см^{-3} , которые были в экспериментах с пучком быстрых электронов [53], при комнатной температуре электронов условие кристаллизации не выполнено. В эксперименте в положительном столбе, где температура электронов была близка к газовой, кристаллизация действительно не наблюдалась. В катодном слое несамостоятельного разряда, где температура электронов возрастала до 1 эВ, расчеты показали, что параметр неидеальности превышает критическое значение и в этой области в экспериментах действительно наблюдалась сильно упорядоченная структура пылевых частиц [53].

Авторы выражают благодарность В. Е. Фортову, О. Ф. Петрову и О. Ишихара (O. Ishihara) за проявленный интерес к данной работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17258-а, 06-02-08230-офи), а также Программы фундаментальных исследований Отделения физики и астрономии НАН Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, УФН **167**, 57 (1997).
2. В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак и др., УФН **174**, 495 (2004).
3. S. V. Vladimirov and K. Ostrikov, Phys. Rep. **393**, 175 (2004).
4. V. E. Fortov, A. V. Ivlev, S. A. Khrapak, A. G. Khrapak, and G. E. Morfill, Phys. Rep. **421**, 1 (2005).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VIII, Наука, Москва (1982).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VI, Наука, Москва (1976), с. 267.
7. B. Derjaguin, Trans. Faraday Soc. **35**, 203 (1940).
8. E. J. W. Verwey and J. Th. G. Overbeek, *Theory of the Stability of Lyophobic Colloids*, Elsevier Publ. Comp., New York–Amsterdam–London–Brussels (1948).
9. A. Melzer, T. Trottenberg, and A. Piel, Phys. Lett. A **191**, 301 (1994).
10. H. Thomas, G. E. Morfill, V. Demmel et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 652 (1994).
11. J. H. Chu and L. I, Phys. Rev. Lett. **72**, 4009 (1994).
12. J. H. Chu, J.-B. Du, and L. I, J. Phys. D: Appl. Phys. **27**, 296 (1994).
13. J. H. Chu and L. I, Physica A **205**, 183 (1994).
14. Y. Hayashii and K. Tachibana, Jpn. J. Appl. Phys. **33**, part 2, L804 (1994).
15. V. N. Tsytovich, Comments Plasma Phys. Control. Fusion **15**, 349 (1994).
16. M. Nambu, S. V. Vladimirov, and P. K. Shukla, Phys. Lett. A **203**, 40 (1995).
17. S. V. Vladimirov and M. Nambu, Phys. Rev. E **52**, R2172 (1995).
18. F. Melandso and J. Goree, Phys. Rev. E **52**, 5312 (1995).
19. S. V. Vladimirov and O. Ishihara, Phys. Plasmas **3**, 444 (1996).
20. V. A. Schweigert, I. V. Schweigert, A. Melzer, A. Homann, and A. Piel, Phys. Rev. E **54**, 4155 (1996).
21. A. Melzer, V. A. Schweigert, I. V. Schweigert, A. Homann, S. Peters, and A. Piel, Phys. Rev. E **54**, R46 (1996).
22. M. Lampe, G. Joyce, G. Ganguli, and V. Gavri-shchaka, Phys. Plasmas **7**, 3851 (2000).
23. А. М. Игнатов, Кратк. сообщ. по физике ФИАН, № 1-2, 58 (1995).
24. А. М. Игнатов, Физика плазмы **22**, 648 (1996).
25. А. М. Игнатов, УФН **171**, 213 (2001).
26. В. Е. Фортов, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров и др., ЖЭТФ **116**, 1601 (1999).
27. G. Lapenta, Phys. Rev. Lett. **75**, 4409 (1995).
28. D. P. Resendes, Phys. Rev. E **61**, 793 (2000).
29. Ю. А. Манкелевич, М. А. Олеванов, Т. В. Рахимова, ЖЭТФ **121**, 1288 (2002).
30. В. Н. Цытович, Письма в ЖЭТФ **78**, 1283 (2003).
31. A. Melzer, V. A. Schweigert, and A. Piel, Phys. Rev. Lett. **83**, 3194 (1999).

32. D. Samsonov, A. V. Ivlev, and G. E. Morfill, *Phys. Rev. E* **63**, 025401(R) (2001).
33. G. A. Hebner, M. E. Riley, D. S. Johnson, P. Ho, and R. J. Buss, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 235001 (2001).
34. U. Konopka, G. E. Morfill, and L. Ratke, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 891 (2000).
35. O. Ishihara and N. Sato, *Phys. Plasmas* **12**, 070705 (2005).
36. C. Castaldo, U. de Angelis, and V. N. Tsytovich, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 075004 (2006).
37. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 180 (2005).
38. А. В. Филиппов, А. Г. Загородний, А. И. Момот, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *ЖЭТФ* **131**, 164 (2007).
39. А. В. Филиппов, Н. А. Дятко, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, *Физика плазмы* **29**, 214 (2003).
40. P. Debye and E. Hückel, *Phys. Z.* **24**, 185 (1923).
41. E. W. Montroll, J. C. Ward, *Phys. Fluids* **1**, 55 (1958).
42. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. IX, Наука, Москва (1978).
43. В. Д. Шафранов, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М. А. Леонтовича, Москва, Госатомиздат (1963), с. 1.
44. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949), ч. 1.
45. D. P. Resendes, J. T. Mendonca, and P. K. Shukla, *Phys. Lett. A* **239**, 181 (1998).
46. A. S. Ivanov, *Phys. Lett. A* **290**, 304 (2001).
47. Д. Н. Герасимов, О. А. Синкевич, *ТВТ* **37**, 853 (1999).
48. Л. Г. Дьячков, *ТВТ* **43**, 331 (2005).
49. K. Tachibana, *Phys. Rev. A* **34**, 1007 (1986).
50. Б. М. Смирнов, *Комплексные ионы*, Наука, Москва (1983).
51. Б. М. Смирнов, *Ионы и возбужденные атомы в плазме*, Атомиздат, Москва (1974).
52. В. А. Иванов, *УФН* **162**, 35 (1992).
53. А. В. Филиппов, В. Н. Бабичев, Н. А. Дятко и др., *ЖЭТФ* **129**, 386 (2006).
54. А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, *Физика плазмы* **27**, 155 (2001).
55. Б. М. Смирнов, *УФН* **170**, 495 (2000).
56. И. А. Белов, А. С. Иванов, Д. А. Иванов и др., *ЖЭТФ* **117**, 105 (2000).
57. А. Ф. Паль, А. О. Серов, А. Н. Старостин, А. В. Филиппов, В. Е. Форттов, *ЖЭТФ* **119**, 271 (2001).
58. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, А. С. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 640 (2006).
59. А. В. Филиппов, А. Ф. Паль, А. Н. Старостин, в сб. *Физика экстремальных состояний вещества — 2006*, под ред. В. Е. Фортова и др., ИПХФ РАН, Черноголовка (2006), с. 247.
60. Ю. П. Райзер, *Физика газового разряда*, Наука, Москва (1987).
61. В. А. Саранин, *УФН* **169**, 453 (1999).
62. В. А. Саранин, *УФН* **172**, 1449 (2002).
63. Е. А. Щерба, А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов, *ЖТФ* **72**, 15 (2002).
64. О. С. Ваулина, С. А. Храпак, *ЖЭТФ* **117**, 326 (2000).