

УСИЛЕНИЕ СЖАТОГО СВЕТА В ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

*В. Н. Горбачев**, *А. И. Трубилко***

*Лаборатория квантовой информации и вычислений,
Государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 15 января 2007 г.

Рассмотрены две схемы, позволяющие усиливать перепутанные состояния сжатых световых полей, в том числе пару Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР-пару) непрерывных переменных, при распространении излучения в среде и отражении от резонатора. В основе обеих схем лежит процесс параметрического взаимодействия, который может быть реализован в нелинейной периодической среде. Благодаря наличию интеграла движения перепутанное состояние света может усиливаться в среде с сохранением квантовой корреляции. Для анализа резонаторной схемы выведено кинетическое уравнение для матрицы плотности поля внутри резонатора. Для этого случая показана возможность усиления падающей на резонатор ЭПР-пары с сохранением ее корреляций.

PACS: 42.50.Dv, 42.50.Gy

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема целостности состояния квантовой системы оказывается важной для задач квантовой теории информации. Из-за процессов декогеренции, вызванных взаимодействием квантовой системы с окружением, ее состояние может разрушаться, и тогда информация, которая кодируется этим состоянием, будет потеряна. Указанное обстоятельство ограничивает возможности реальных квантовых коммуникаций. Есть два пути, позволяющие решить задачу. Первый путь заключается в использовании квантового повторителя [1], который воспроизводит состояние передаваемой системы, например, на основе процесса телепортации. Второй путь предполагает использование состояний, свободных от декогеренции, которые не разрушаются при взаимодействии с окружением. Простейшим примером служат двухатомные антисимметричные состояния, которые нечувствительны к релаксации. Случай многочастичных состояний рассмотрен в работе [2] для задачи взаимодействия ансамбля двухуровневых атомов и многомодового электромагнитного поля. Найденные в этой работе многоатомные состояния анни-

гилируются гамильтонианом взаимодействия, оказываясь нечувствительными к процессу взаимодействия с полем. В работе [3] показано, что антисимметричное двухатомное состояние не релаксирует при коллективном взаимодействии с окружением и определяет наличие стационарных квантовых корреляций в случае первоначально перепутанных, но различных состояний атомов в системе. В статье [4] на основе поляризованных четырехфотонных состояний экспериментально продемонстрирована работа схемы квантовой коммуникации, свободной от декогеренции.

Одной из физических причин, приводящих к возникновению состояний, свободных от декогеренции, является наличие в системе интегралов движения. Как показано в работе [5], наличие интеграла движения может приводить к сохранению и возникновению межмодовых корреляций в прозрачных нелинейных средах и резонансных взаимодействиях. На их основе в работе [6] предложен метод построения физических схем, где при наличии коллективного взаимодействия двух систем одна из них будет нечувствительной к этому взаимодействию.

С практической точки зрения наибольший интерес представляет задача сохранения свойств пары Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР-пары),

*E-mail: vn@vg3025.spb.edu

**E-mail: tai@at3024.spb.edu

которая выступает одним из основных ресурсов в квантовых информационных процессах. Ее оптической реализацией для случая непрерывных переменных является свет невырожденного параметрического генератора. Именно такой свет использовался в качестве квантового канала для телепортации когерентного состояния электромагнитного поля [7], для целей плотного кодирования [8] и спектроскопии в неклассическом свете [9]. Заметим, что в этих экспериментах мощность света была невелика, поэтому вопрос о возможности его усиления без разрушения корреляционных свойств является актуальным. Как известно, задача усиления неклассического однофотонного света является сложной. Например, в процессах линейного [10, 11] и нелинейного [12] усиления из-за спонтанного излучения атомов квантовые корреляции света разрушаются. Однако в параметрических процессах частота неклассического света может быть преобразована с одной на другую без разрушения его квантовых свойств [13]. В работе [14] показано, что усиливающий и линейно поглощающий коммуникационный канал приводит только к деградации свойств оптической ЭПР-пары, которая не замедляется и в квантовом канале с фазочувствительным окружением, где в роли термостата выступает сжатый вакуум [15].

В данной работе мы рассматриваем усиление перепутанного состояния двухфотонного сжатого света при параметрическом взаимодействии особого вида, которое может быть реализовано в нелинейных периодических средах [16]. Мы обсуждаем две экспериментальные ситуации: распространение двух волн в нелинейной среде и отражение волн от высокодобротного резонатора, заполненного нелинейной средой. Для описания первой ситуации мы используем формализм квантовой теории переноса [17] и обсуждаем однонаправленное распространение двух волн от источников сжатого перепутанного света, корреляционные характеристики которых мы описываем известными моделями, построенными в рамках этой же теории. В схеме с резонатором для описания взаимодействия заданных широкополосных внешних полей и внутрирезонаторных мод мы используем гамильтониан «осциллятор–термостат» [18] и теорию «вход–выход» (input–output theory) [19]. Этот подход широко применяется для различных задач квантовой оптики. Так, в работе [20] предсказано уменьшение скорости спонтанного излучения для атома под действием сжатого вакуумного излучения, которое, однако, сильно зависит от поляризационной степени свободы поля и типа резонансного перехода атома [21]. В

работе [22] обсуждается поглощение в двухуровневой системе, находящейся в сжатом вакуумном термостате и взаимодействующей с когерентным классическим сигналом. В работе [23] исследуется оптическая бистабильность тонкой пленки резонансных атомов в сжатом термостате. В работе [24] рассмотрен этот же эффект при взаимодействии когерентного света с резонансной средой, находящейся в резонаторе и одновременно взаимодействующей со световым полем в сжатом состоянии. Основным моментом при использовании этого подхода является получение релаксационного оператора в кинетическом уравнении для матрицы плотности исследуемой подсистемы, где свойства сжатого состояния определяют константы релаксации. На основании полученного уравнения мы анализируем условия эффективного усиления мощности выходных световых мод с полным сохранением их начальных квантовых взаимных корреляций.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы вводим наблюдаемые, характеризующие перепутанное состояние двухфотонного сжатого света, и рассматриваем модели источников. Последние основаны на параметрических процессах в прозрачных нелинейных средах. В разд. 3 рассматривается распространение перепутанного состояния через нелинейную среду, в которой осуществляется трехфотонное параметрическое взаимодействие, позволяющее сохранять исходное состояние и усиливать мощность каждой из волн. В разд. 4 рассматривается эволюция внутрирезонаторных мод под действием внешних полей в заданном состоянии, определение которой связано с выводом кинетического уравнения для матрицы плотности с помощью квантовых уравнений Ито. Наконец, в разд. 5 мы анализируем состояние выходного излучения в условиях отражения и прохождения резонатора.

2. ПЕРЕПУТАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХМОДОВОГО СВЕТА

В квантовой оптике для описания однофотонного света используется квадратурный оператор

$$X(\theta) = a^\dagger \exp(i\theta) + \text{H.c.} = 2(x \cos \theta + p \sin \theta),$$

где $a = x + ip$ — фотонный оператор уничтожения,

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [x, p] = i/2.$$

Свойства света могут быть получены из набора его корреляционных функций, например, из дисперсий квадратурного оператора

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2,$$

измерение которых известно. Так, для когерентного состояния, минимизирующего соотношение неопределенностей, имеем

$$\langle(\Delta X)^2\rangle = 1.$$

Если

$$\langle(\Delta X(\theta))^2\rangle < 1, \quad (1)$$

то при $\theta = 0$ свет называют сжатым по координате или амплитуде, а при $\theta = \pi/2$ — сжатым по импульсу или фазе. Предельному сжатию соответствует случай

$$\langle(\Delta X(\theta))^2\rangle = 0.$$

Здесь термины «амплитуда» и «фаза» употребляются в связи с рассмотрением свойств света в фазовом пространстве. Введенный квадратурный оператор измеряется в схеме гетеродинного приема, где исследуемый сигнал смешивается с опорной волной на непоглощающей делительной пластинке, а затем измеряется разностный фототок i от двух детекторов. Если считать, что квантовая эффективность обоих детекторов одинакова и равна 1, то спектр фототока или спектр шумов света определяется дисперсией квадратурного оператора

$$\begin{aligned} i^2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle i(t)i(t+\tau) \rangle \exp(i\tau\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle X(t)X(t+\tau) \rangle \exp(i\tau\omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Большинство моделей приводит к выражению для спектра шума в низкочастотной области, которое имеет вид

$$i^2(\omega \approx 0) = 1 + 2\langle :(\Delta X(\theta))^2 : \rangle, \quad (3)$$

где единица соответствует уровню дробового шума или стандартному квантовому пределу, а двоеточие обозначает нормальное упорядочение операторов. Одним из известных основных свойств сжатого света является подавление, вплоть до полного, дробового шума фоторегистрации.

Перепутанные состояния, описываемые с помощью непрерывных переменных, могут быть определены, например, как собственные функции операторов суммарной координаты Q и разностного импульса P двух подсистем или частиц:

$$Q = x_1 + x_2, \quad P = p_1 - p_2, \quad (4)$$

где x_m, p_m , $m = 1, 2$ — канонические операторы координаты и импульса частицы. Наблюдаемые P и Q имеют общий полный набор собственных функций, известных как непрерывные состояния Белла [25]:

$$Q|\Psi_{PQ}\rangle = Q|\Psi_{PQ}\rangle, \quad P|\Psi_{PQ}\rangle = P|\Psi_{PQ}\rangle. \quad (5)$$

В частности, если собственные числа равны нулю, то возникает непрерывный аналог максимально перепутанной ЭПР-пары $|\Psi_{00}\rangle = |EPR\rangle$. Физической реализацией описываемых систем могут служить двухмодовые перепутанные состояния оптических полей. Операторы суммарного импульса P и разностной координаты Q , определенные согласно (4), могут быть записаны через квадратурные операторы X_m двух мод электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}[X_1(0) + X_2(0)], \\ P &= \frac{1}{2}[X_1(\pi/2) - X_2(\pi/2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Обе наблюдаемые P и Q могут быть одновременно измерены в схеме, в которой две моды смешиваются с помощью полупрозрачной непоглощающей делительной пластинки, а затем проводится измерение канонического импульса и координаты двух выходящих пучков [7]. Как следует из выражения (5), дисперсии наблюдаемых P и Q равны нулю, поэтому, согласно выражениям (1) и (3), непрерывные состояния Белла $|\Psi_{PQ}\rangle$ оказываются сжатыми по суммарной координате и разностному импульсу с подавленными дробовыми шумами. Таким образом, сжатие или наличие неклассического состояния оптических полей является необходимым условием их перепутанности. Однако если состояние оказалось перепутанным, то в качестве меры перепутывания можно выбрать уровень подавления дробового шума в схемах измерения P и Q .

Описание источников перепутанных состояний световых полей проведем на примерах моделей параметрических генераторов света, которые рассмотрим с помощью квантовой теории переноса [17]. Согласно этой теории, для случая распространения одномодового света вдоль оси z необходимо образовать пакеты плоских волн с волновыми числами k в интервале $[k_0 - \pi/l, k_0 + \pi/l]$ с центром на $k_0 = 2\pi\lambda_0^{-1}$, при этом спектральная ширина пакета равна

$$\Delta\nu = c/l, \quad (7)$$

где l — размер вспомогательной ячейки в нормированном объеме LS : $\lambda_0 \ll l < L$. Тогда оператор электрического поля можно разложить заново:

$$E(z, t) = -i \sum_{k \approx k_0} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2LS\epsilon_0} \right)^{1/2} a_k(t) \exp(ikz) + \text{H.c.} \approx \\ \approx -i \left(\frac{\hbar \omega_0}{2LS\epsilon_0} \right)^{1/2} b(z, t) \exp(ik_0 z) + \text{H.c.},$$

где

$$b(z, t) = \sum_{k \approx k_0} \left(\frac{l}{L} \right)^{1/2} a_k(t) \exp(i(k - k_0)z).$$

Операторы b^\dagger и b интерпретируются как операторы рождения и уничтожения фотонов в точке z внутри пространственной ячейки размером l . Для них выполняются коммутационные соотношения

$$[b(z, t), b^\dagger(z, t + \tau)] = \exp(i\omega_0 \tau) \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau),$$

где функция $\delta_l(\tau)$ определяется выражением

$$\delta_l(\tau) = \Delta\nu \frac{\sin(\pi \Delta\nu \tau)}{\pi \Delta\nu \tau}. \quad (8)$$

На временах, много больших $\Delta\nu^{-1}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_l(\tau) d\tau = 1,$$

основной вес функции (8) сосредоточен вблизи значения $\tau = 0$ в окрестности порядка $\Delta\nu^{-1}$, а $\delta_l(0) = \Delta\nu$. Поэтому функция (8) представляет собой масштабную временную δ -функцию в рамках «огрубленной» пространственной шкалы.

Введенные операторы b^\dagger, b позволяют более детально описывать пространственные процессы в нормировочном объеме LS . Определенные с помощью этих операторов наблюдаемые зависят от размера ячейки l , которая определяет характерное пространственное разрешение. Чтобы согласовать измеряемые величины с данной величиной l , при описании детектора следует учитывать его разрешение. В нашем случае разрешение фотоприемника будет определяться его полосой частот, которая должна быть не меньше, чем $\Delta\nu = c/l$. Так, например, нормированный к уровню дробового шума спектр фототока при идеальном фотоприеме, как показано в работе [17], имеет вид

$$i^2(\omega) = 1 + 2 \frac{\Delta\nu}{n(z)} \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) g(z, \tau),$$

где средние $n(z)$ и $g(z, \tau)$ выражаются через операторы b^\dagger, b следующим образом:

$$n(z) = \langle b^\dagger(z) b(z) \rangle,$$

$$g(z, \tau) = \langle b^\dagger(z, t) b^\dagger(z, t + \tau) b(z, t + \tau) b(z, t) \rangle.$$

При таком определении величины l или $\Delta\nu$ в окончательных выражениях уже не фигурируют.

Рассмотрим процесс невырожденной параметрической генерации света в поле внешней классической волны накачки, который описывается эффективным гамильтонианом

$$H = i\chi \hbar (b_1^\dagger b_2^\dagger - \text{H.c.}).$$

Здесь χ — константа взаимодействия, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды и интенсивности волны накачки на частоте Ω_p , а b_m^\dagger и b_m , $m = 1, 2$ — операторы рождения и уничтожения фотонов мод на частотах ω_m внутри вспомогательной ячейки размером l . При выводе выражения для эффективного гамильтониана предполагается выполнение условий синхронизма, связывающих частоты и волновые векторы:

$$\omega_1 + \omega_2 - \Omega_p = 0,$$

$$k(\omega_1) + k(\omega_2) - k(\Omega_p) = \Delta k = 0.$$

Второе равенство означает приближение $\Delta k l_a \ll 1$, где l_a — длина кристалла. В процессе генерации возникает континуум мод на частотах $\omega_1 \pm \epsilon, \omega_2 \mp \epsilon$, для которых можно записать

$$k(\omega_1 \pm \epsilon) + k(\omega_2 \mp \epsilon) - k(\Omega_p) \approx \Delta k + \frac{\partial^2 k}{\partial \epsilon^2} \epsilon^2.$$

Соотношение

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \epsilon^2} \epsilon^2 l_a \ll 1$$

определяет полосу $\delta\epsilon$ генерации. Считая, что последняя равна спектральной полосе пакета, $\delta\epsilon = 2\pi\Delta\nu$, сформированного в теории переноса, мы остаемся в рамках одномодового приближения гамильтониана.

Запишем решения для операторов генерируемых мод на выходе среды, $b_{0m}(t) \equiv b_m(z, t)$, в гейзенберговском представлении взаимодействия:

$$b_{01}(t) = b_1(0, t - z/V) \text{ch } r + b_2^\dagger(0, t - z/V) \text{sh } r \exp(i\phi),$$

$$b_{02}(t) = b_2(0, t - z/V) \text{ch } r + b_1^\dagger(0, t - z/V) \text{sh } r \exp(i\phi).$$

Здесь $b_m(0, t - z/V)$ — операторы рассматриваемых полей на входе среды, $V_1 = V_2 = V$ — фазовые скорости распространения волн в среде, ϕ — фаза классической волны накачки, $r = \chi z/V$ — параметр сжатия. Теперь нетрудно определить авто- и кросскорреляционные средние на выходе среды. При условии вакуумного состояния квантованных мод на входе имеем

$$\langle b_{0m}^i(t) b_{0n}^j(t + \tau) \rangle = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau). \quad (9)$$

Здесь верхние индексы соответствуют операторам рождения или уничтожения и обозначаются в правой части как $i, j = \dagger, -$. Индекс «-» у оператора уничтожения будем опускать. Нижние индексы соответствуют модам $m, n = 1, 2$. Корреляционная матрица определяется следующими отличными от нуля коэффициентами:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} = \text{sh}^2 r, & \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} = \text{ch}^2 r, \\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = \text{ch} r \text{ sh} r \exp(-i\phi), & & \\ \mathcal{K}_{12}^{-,-} &= \mathcal{K}_{21}^{-,-} = \text{ch} r \text{ sh} r \exp(i\phi). & & \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь нетрудно вычислить корреляционные функции от операторов суммарной координаты и разностного импульса (6) на выходе среды:

$$\langle X_0(0)X_0(\tau) \rangle = \langle X_0^2(0) \rangle \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau), \quad (11)$$

где $X = Q, P$ и

$$\begin{aligned} \langle Q_0^2(0) \rangle &= \langle P_0^2(0) \rangle = \\ &= \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r + 2 \text{sh} r \text{ ch} r \cos \phi + \text{ch}^2 r). \end{aligned} \quad (12)$$

Классическая волна накачки кристалла играет роль гетеродина, если выбрать $\phi = \pi$ при $r \rightarrow \infty$, то дисперсии наблюдаемых P и Q практически равны нулю. В этих условиях корреляционные функции нормально-упорядоченных операторов

$$\begin{aligned} \langle : X_0(0)X_0(\tau) : \rangle &= \langle : X_0^2(0) : \rangle \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau) = \\ &= \langle X_0(0)X_0(\tau) \rangle - \frac{1}{2} \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

согласно выражению (3), определяют почти полное подавление шумов фоторегистрации. Подавление происходит в широкой полосе частот, определяемой спектральной шириной пакета (7), поэтому предполагается, что при наблюдении перед фотодетекторами поставлены фильтры такой же спектральной ширины пропускания. Полученное состояние со свойствами (12) описывает перепутанную пару двухмодового сжатого света.

В качестве другой модели источника перепутанной фотонной пары с аналогичными свойствами [26] можно использовать два независимых источника, генерирующие квадратурно-сжатые некоррелированные поля в процессе вырожденного параметрического преобразования. Такой процесс описывается гамильтонианом

$$H = ik\hbar(b^{\dagger 2} - \text{H.c.}).$$

Для оператора квантованного поля на выходе среды имеем

$$\begin{aligned} b(z, t) &= b(0, t - z/V) \text{ch} r + \\ &+ b^{\dagger}(0, t - z/V) \text{sh} r \exp(i\phi). \end{aligned} \quad (14)$$

Перепутанное состояние возникает при последующем смешении световых полей от двух независимых источников на полупрозрачной непоглощающей пластине, что также можно описать с помощью гамильтониана

$$H = if\hbar(b_1^{\dagger}b_2 - \text{H.c.}).$$

Отметим, что этот гамильтониан описывает также и параметрическое преобразование мод в поле классической волны. Таким образом, можно считать, что моды $m = 1, 2$ различаются либо направлением распространения, либо частотами. В обоих случаях процессы сводятся к унитарному преобразованию мод, определяемых выражением (14). Будем считать такое преобразование для обоих полей одинаковым, в результате корреляционная матрица для средних от выходных операторов (9) при условии исходных (входных) полей в вакуумном состоянии определяется как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} = \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_1 + \text{sh}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch}^2 r_1 + \text{ch}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch} r_1 \text{ sh} r_1 \exp(-i\phi_1) + \\ &+ \text{ch} r_2 \text{ sh} r_2 \exp(-i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{11}^{-,-} &= \mathcal{K}_{22}^{-,-} = \frac{1}{2}(\text{ch} r_1 \text{ sh} r_1 \exp(i\phi_1) + \\ &+ \text{ch} r_2 \text{ sh} r_2 \exp(i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch} r_1 \text{ sh} r_1 \exp(-i\phi_1) - \\ &- \text{ch} r_2 \text{ sh} r_2 \exp(-i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{-,-} &= \mathcal{K}_{21}^{-,-} = \frac{1}{2}(\text{ch} r_1 \text{ sh} r_1 \exp(i\phi_1) - \\ &- \text{ch} r_2 \text{ sh} r_2 \exp(i\phi_2)), \\ \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} &= \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} = \frac{1}{2}(\text{ch}^2 r_1 - \text{ch}^2 r_2), \\ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} &= \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} = \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_1 - \text{sh}^2 r_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь по-прежнему r_m — параметры сжатия независимых источников, ϕ_m — фазы классических волн накачек. Корреляционные функции от операторов суммарной координаты и разностного импульса определяются выражениями (11), в которых

$$\begin{aligned} \langle Q_0^2(0) \rangle &= \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_1 + 2 \text{sh} r_1 \text{ch} r_1 \cos \phi_1 + \text{ch}^2 r_1), \\ \langle P_0^2(0) \rangle &= \frac{1}{2}(\text{sh}^2 r_2 - 2 \text{sh} r_2 \text{ch} r_2 \cos \phi_2 + \text{ch}^2 r_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Свойства, характерные для источника перепутанного состояния, возникают в условиях, когда значения фаз классических накачек, выступающих в роли гетеродинов, равны $\phi_1 = \pi, \phi_2 = 0$. В условиях больших значений $r_m \rightarrow \infty$ возникает почти полное подавление дробовых шумов при регистрации как суммарной координаты, так и разностного импульса.

3. УСИЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим однонаправленное взаимодействие двух мод с гамильтонианом вида

$$V = i\hbar \frac{k}{4} [b_1^{\dagger 2} - b_1^2 - b_2^{\dagger 2} + b_2^2 - 2(b_1 b_2^{\dagger} - b_1^{\dagger} b_2)]. \quad (17)$$

Выражение (17) описывает трехфотонные параметрические взаимодействия в прозрачной среде с квадратичной нелинейностью. Здесь представлено три процесса преобразования частоты, два из которых являются делением частоты в классическом поле накачки, $\Omega_m = \omega_m + \omega_m$, и один — процессом преобразования частоты вверх, $\Omega + \omega_1 = \omega_2$, где Ω_m, Ω — частоты классических волн накачек, ω_m — частоты мод, $m = 1, 2$. Чтобы эти три взаимодействия проходили эффективно, требуется выполнение условий фазового синхронизма, которые могут быть обеспечены в нелинейных периодических средах, обсуждавшихся в работе [16]. Фазовые расстройки указанных процессов могут быть скомпенсированы соответствующими векторами обратной нелинейной решетки среды.

Уравнение переноса для матрицы плотности ρ рассматриваемого двухмодового поля имеет вид

$$(\partial_t + V \partial_z) \rho = -i\hbar^{-1} [V, \rho]. \quad (18)$$

Здесь операторы b_m надо понимать как локальные операторы внутри ячейки с координатой z , а производная по z в левой части уравнения (18) представляет собой крупномасштабную производную «огрубленной» пространственной шкалы и определяет связь соседних ячеек. Для матрицы плотности поля в уравнении (18) перейдем к s -упорядоченной квазивероятности:

$$\begin{aligned} \rho(z, t) &= \int d^2 \alpha \Phi(\alpha, z, t; s) \Delta(\alpha; -s), \\ \Phi(\alpha, z, t; s) &= \text{Sp}(\rho(z, t) \Delta(\alpha; s)), \\ \Delta(\alpha; -s) &= \pi^{-1} \int d^2 \beta \exp((s/2)|\beta|^2 + \\ &\quad + \beta^* \alpha - \beta \alpha^*) \exp(\beta a^{\dagger} - \beta^* \alpha). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь параметр s характеризует тип упорядочения операторов. Так, $s = 0$ отвечает симметричному упорядочению операторов и описывает вигнеровскую функцию квазивероятности, при $s = 1$ имеем нормально-упорядоченную глауберовскую функцию, а при $s = -1$ — антинормальное распределение. Для квазивероятности Φ в данном случае имеем уравнение

$$(\partial_t + V \partial_z) \Phi = \mathcal{L} \Phi, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_{\alpha_1} \left(-\frac{k}{2} (\alpha_1^* + \alpha_2) \right) + \partial_{\alpha_2} \left(\frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2^*) \right) + \\ &\quad + \partial_{\alpha_1 \alpha_1}^2 \left(s \frac{k}{4} \right) + \partial_{\alpha_2 \alpha_2}^2 \left(-s \frac{k}{4} \right) + \text{с.с.} \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (20) представляет собой уравнение Фоккера–Планка с постоянными диффузионными коэффициентами.

Из уравнения (20) в диагональном представлении Глаубера–Сударшана ($s = 1$) следуют ланжевенские уравнения, описывающие эволюцию мод:

$$\begin{aligned} (\partial_t + V \partial_z) \alpha_1 &= \frac{k}{2} (\alpha_1^* + \alpha_2) + f_1(z, t), \\ (\partial_t + V \partial_z) \alpha_2 &= -\frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2^*) + f_2(z, t), \end{aligned} \quad (22)$$

где ненулевые средние от источников шумов определяются диффузионными коэффициентами (21) и имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \langle f_1(z_1, t_1) f_1(z_2, t_2) \rangle &= \langle f_1^*(z_1, t_1) f_1^*(z_2, t_2) \rangle = \\ &= -\langle f_2(z_1, t_1) f_2(z_2, t_2) \rangle = -\langle f_2^*(z_1, t_1) f_2^*(z_2, t_2) \rangle = \\ &= \frac{k}{2} \delta(z_2 - z_1) \Delta \nu^{-1} \delta_l(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что из уравнений (22) следует равенство

$$\begin{aligned} \alpha_1(z, t) + \alpha_2^*(z, t) &= \\ &= \alpha_1(0, t - z/V) + \alpha_2^*(0, t - z/V) + \\ &\quad + \int_0^z dz' (f_1(z', t - z'/V) + f_2^*(z', t - z'/V)). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\alpha_m(0, t - z/V)$, $m = 1, 2$ — граничные условия для переменных, характеризующих моды на входе среды. Их свойства заданы корреляционными матрицами источников (10), (15), которые, однако, при вычислении средних должны быть приведены к нормально-упорядоченному виду, что связано с используемым представлением. Из равенства (24) с учетом (23) следует сохранение нормально-упорядоченных корреляционных функций суммарной координаты и разностного импульса по мере распространения в среде. Это свойство определяется гамильтонианом (17), который можно записать в виде

$$V = \frac{k}{4}QP,$$

следовательно, P и Q , а также любые функции этих операторов являются интегралами движения.

Для рассматриваемых источников средние числа фотонов каждой моды на выходе среды

$$n_m(z) = \langle |\alpha_m(z, t)|^2 \rangle$$

определяются выражениями

$$n_m(z) = n_{0m} \pm \frac{1}{2} \frac{kz}{V} (\langle Q_0^2(0) \rangle - \langle P_0^2(0) \rangle) + \frac{1}{4} \left(\frac{kz}{V} \right)^2 (\langle Q_0^2(0) \rangle + \langle P_0^2(0) \rangle), \quad (25)$$

где

$$n_{0m} = \langle b_{0m}^\dagger(t) b_{0m}(t) \rangle$$

— средние числа фотонов в модах на входе, а дисперсии операторов Q и P заданы выражениями (12) и (16). Верхний знак перед вторым слагаемым в (25) отвечает моде с индексом «1», а нижний — моде с индексом «2». Коэффициент усиления

$$K_m(z) = \frac{n_m(z)}{n_{0m}} \quad (26)$$

для обеих рассматриваемых моделей источников в симметричном случае $r_1 = r_2 = r$ принимает наиболее простой вид:

$$K = 1 + \mu^2 (\exp(2r) - 1)^{-2},$$

где параметр $\mu = kz/V$. В идеальном случае, когда на входе присутствует максимально сжатое перепутанное состояние, $r \rightarrow \infty$, усиления не происходит, $K \rightarrow 1$, и среда играет роль повторителя перепутанного состояния, что, однако, важно для обеспечения его свойств по мере распространения. В остальных ситуациях имеет место усиление света, пропорциональное параметру μ^2 , причем коэффициент усиления тем больше, чем меньше значение параметра r .

В условиях реальных экспериментов параметр сжатия соответствует значению $\exp(2r) \approx 5$. Если коэффициент усиления $K = 10$, то безразмерный параметр $\mu = 12$. Такое усиление может достигаться в кристаллах с длиной в несколько сантиметров для длины волны $\lambda = 0.5$ мкм при мощности волны накачки $I \approx 10^4$ Вт/см², что экспериментально вполне реализуемо. При $r \rightarrow 0$ усилитель преобразуется в генератор поля из вакуумного состояния, который, однако, не генерирует двухмодового света, сжатого по P и Q , а следовательно, и их перепутанного состояния. Значения дисперсий вакуумного входного состояния

$$\langle (\Delta P_0)^2 \rangle = \langle (\Delta Q_0)^2 \rangle = 1/2$$

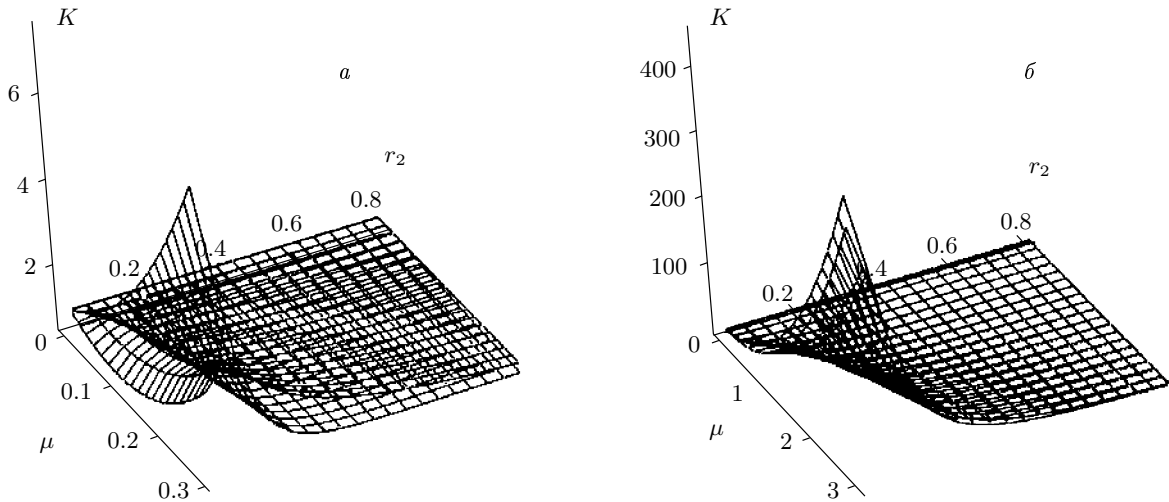
по мере распространения в среде будут сохраняться, хотя средние числа фотонов в модах отличны от нуля,

$$n_m(z) = \frac{1}{4} \mu^2 \neq 0.$$

Отличия в моделях источников возникают для несимметричного случая при $r_1 \neq r_2$. Напомним, что параметры сжатия, кроме корреляционных свойств мод, определяют и их средние числа фотонов. Например, на рис. а представлена зависимость коэффициента усиления от параметра сжатия во второй моде при $r_1 = 10^{-1}$ на начальном этапе при $\mu \ll 1$. В этом случае возникает режим перекачивания фотонов из более сильной моды в более слабую. По мере их распространения в среде различия становятся несущественными и обе моды усиливаются практически одинаково, что показано на рис. б.

4. УСИЛЕНИЕ В РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим высокочастотный резонатор, в который помещена среда, осуществляющая параметрическое взаимодействие вида (17). Пусть такой резонатор возбуждается двухмодовым световым полем в перепутанном состоянии. Для задачи о возбуждении одной резонаторной моды полем, находящимся в состоянии сжатого вакуума, обычно используют подход, предложенный Гардинером и получивший название теории «вход–выход» [19]. Существенным моментом приложения данного подхода является получение уравнения эволюции матрицы плотности подсистемы, в котором свойства поля источника сжатого света скрыты в релаксационных константах. Согласно этому подходу, поле источника сжатого света считается широкополосным или идеальным сжатым белым шумом.



Зависимость коэффициента усиления K от параметра сжатия второй моды r_2 , параметр сжатия первой фиксирован и равен $r_1 = 10^{-1}$: a — эффект перекачивания фотонов из слабой моды в сильную при малых значениях безразмерной длины среды μ ; b — с ростом μ обе моды усиливаются практически одинаково

В нашей ситуации имеется два связанных источника сжатого поля, обладающих квантовыми взаимными корреляциями, отражающимися в наличии в выражениях (10), (15) отличных от нуля взаимных аномальных средних. Такое состояние можно назвать сжатым вакуумным перепутанным состоянием, оно является заданным и не изменяется в процессе эволюции. Мы предполагаем, что частотная полоса каждой моды источников (7) много меньше разности частот внутрирезонаторных мод и что они не перекрываются. С другой стороны, эти же частотные полосы достаточно велики, так что суммирование по частотам при взаимодействии внутрирезонаторной моды со своим внешним возбуждающим полем можно заменить интегрированием во всей его широкой частотной полосе $\Delta\nu_m$. Взаимодействие источника в перепутанном состоянии с резонаторными модами, которые определяются операторами рождения a_m^\dagger и уничтожения a_m , описывается известным гамильтонианом

$$V_b = -i\hbar \sum_{m=1,2} \left\{ \int_{\Delta\nu_m} d\omega \eta_m(\omega) b_{\omega_m} a_m^\dagger - \text{H.c.} \right\}, \quad (27)$$

где $b_{\omega_m}^\dagger, b_{\omega_m}$ — операторы рождения и уничтожения соответствующих мод поля источника, $\eta_m(\omega)$ — константа связи. Гамильтониан (27) соответствует ситуации, когда каждая резонаторная мода взаимодействует со своим заданным полем. Отметим, что этот же гамильтониан получен при квантовании поля в среде с помощью техники проекционных операторов

Флешбаха [27]. При выводе выражения (27) используются резонансное электродипольное приближение и приближение вращающейся волны. Полный гамильтониан всей системы имеет вид

$$H = H_b + H_{sys} + V_b,$$

где

$$H_b = \sum_{m=1,2} \int_{\Delta\nu_m} d\omega b_{\omega_m}^\dagger b_{\omega_m}$$

— гамильтониан свободного поля источников, H_{sys} — гамильтониан свободного поля резонаторных мод и других, кроме источников сжатых полей, подсистем и их взаимодействий. Поскольку в рамках данной задачи резонатор определяет условия локальности, взаимодействие (17) можно рассматривать и как последовательные взаимодействия в разных средах. Мы считаем поле источников заданным, иными словами, пренебрегаем обратным воздействием на них резонаторных мод, начальное состояние которых зададим вакуумным. Это означает, что операторы b_{ω_m} коммутируют с соответствующими операторами a_m^\dagger, a_m в один и тот же момент времени, а их развитие в гейзенберговском представлении определяется только свободной эволюцией:

$$b_{\omega_m} = b_{\omega_m}(t_0) \exp(-i\omega_m(t - t_0)).$$

Используем марковское приближение и будем считать константы не зависящими от частоты ω [19] и для простоты одинаковыми:

$$\eta_1(\omega) = \eta_2(\omega) = \sqrt{\frac{C}{2\pi}}.$$

Тогда операторы

$$b_{0m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta\nu_m} d\omega_m \exp(-i\omega_m(t-t_0)) b_{\omega_m}(t_0)$$

при усреднении по начальному состоянию заданного поля источников определяются временными средними (9). Теперь для любого оператора A , описывающего эволюцию резонаторных мод, можно записать квантовое ланжевеновское уравнение

$$\frac{dA}{dt} = -i\hbar^{-1}[A, H_{sys}] + \sqrt{C} \sum_{m=1,2} ([A, a_m^\dagger] b_{0m}(t) - [A, a_m] b_{0m}^\dagger(t)), \quad (28)$$

которому соответствует квантовое уравнение Ито вида

$$dA = -i\hbar^{-1}[A, H_{sys}]dt + \sqrt{C} \times \sum_{m=1,2} ([A, a_m^\dagger] dB_m^-(t) - [A, a_m] dB_m^\dagger(t)) + \mathcal{I} dt. \quad (29)$$

Следует отметить, что уравнение (28) записано в приближении среднего поля. Это означает, что полевые операторы внутри резонатора за один обход не изменяются, что справедливо в условиях высокой добротности, когда $C \ll c/\ell$, где ℓ — длина резонатора. Инкременты $dB_m^-(t)$ уравнения (29) описывают квантовые винеровские процессы:

$$B_m^-(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' b_{0m}(t'),$$

для которых коммутационные соотношения

$$[B_m^-(t, t_0), B_n^\dagger(t, t_0)] = (t - t_0), \quad n, m = 1, 2,$$

соответствуют условиям связанных коррелированных источников. Используя соотношения

$$dB_m^i dB_n^j = \mathcal{K}_{mn}^{i,j} dt,$$

$$dB_m^i(t) dt = dt dB_m^i = dt dt = 0$$

и правила дифференцирования Ито для любых двух операторов A_1 и A_2 ,

$$d(A_1 A_2) = d(A_1) A_2 + A_1 d(A_2) + d(A_1) d(A_2),$$

можно записать выражение для \mathcal{I} в симметричном виде:

$$\mathcal{I} = \sum_{i,j;m,n} R_{m,n}^{i,j} (a_m^i [A, a_n^j] + [a_m^i, A] a_n^j),$$

а также найти вид неизвестных коэффициентов $R_{m,n}^{i,j}$.

Найдем уравнение для матрицы плотности подсистемы резонаторных мод. Для этого усредним уравнение (28), считая все коэффициенты перед инкрементами неупреждающими функциями:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A \rangle}{dt} = & -i\hbar^{-1} \langle [A, H_{sys}] \rangle + \\ & + \frac{C}{2} \sum_{m=1,2} \{ \langle \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,-} (a_m [A, a_m^\dagger] + [a_m, A] a_m^\dagger) \rangle + \\ & + \langle \mathcal{K}_{mm}^{-,\dagger} (a_m^\dagger [A, a_m] + [a_m^\dagger, A] a_m) \rangle - \\ & - \langle \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,\dagger} (a_m [A, a_m] + [a_m, A] a_m) \rangle - \\ & - \langle \mathcal{K}_{mm}^{-,-} (a_m^\dagger [A, a_m^\dagger] + [a_m^\dagger, A] a_m^\dagger) \rangle \} - \\ & - \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} (a_1 [A, a_2] + [a_1, A] a_2) \rangle - \\ & - \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} (a_2 [A, a_1] + [a_2, A] a_1) \rangle - \\ & - \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{12}^{-,-} (a_1^\dagger [A, a_2^\dagger] + [a_1^\dagger, A] a_2^\dagger) \rangle - \\ & - \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{21}^{-,-} (a_2^\dagger [A, a_1^\dagger] + [a_2^\dagger, A] a_1^\dagger) \rangle + \\ & + \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} (a_1 [A, a_2^\dagger] + [a_1, A] a_2^\dagger) \rangle + \\ & + \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} (a_2^\dagger [A, a_1] + [a_2^\dagger, A] a_1) \rangle + \\ & + \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} (a_1^\dagger [A, a_2] + [a_1^\dagger, A] a_2) \rangle + \\ & + \frac{C}{2} \langle \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} (a_2 [A, a_1^\dagger] + [a_2, A] a_1^\dagger) \rangle. \end{aligned}$$

Из равенства

$$\frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} = \text{Sp} \left(\frac{dA(t)}{dt} \rho(t_0) \right) = \text{Sp} \left(A(t_0) \frac{d\rho}{dt} \right)$$

для матрицы плотности резонаторных мод имеем уравнение

$$\partial_t \rho = -i\hbar^{-1} [H_{sys}, \rho] - \frac{C}{2} R \rho, \quad (30)$$

в котором релаксационное слагаемое определяется выражением

$$\begin{aligned}
 R\rho = & \sum_{m=1,2} \{ \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,-} (a_m a_m^\dagger \rho - 2a_m^\dagger \rho a_m + \rho a_m a_m^\dagger) + \\
 & + \mathcal{K}_{mm}^{-,\dagger} (a_m^\dagger a_m \rho - 2a_m \rho a_m^\dagger + \rho a_m^\dagger a_m) - \\
 & - \mathcal{K}_{mm}^{\dagger,\dagger} (a_m a_m \rho - 2a_m \rho a_m + \rho a_m a_m) - \\
 & - \mathcal{K}_{mm}^{-,-} (a_m^\dagger a_m^\dagger \rho - 2a_m^\dagger \rho a_m^\dagger + \rho a_m^\dagger a_m^\dagger) \} - \\
 & - \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} (a_1 a_2 \rho - 2a_2 \rho a_1 + \rho a_1 a_2) - \\
 & - \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} (a_2 a_1 \rho - 2a_1 \rho a_2 + \rho a_2 a_1) - \\
 & - \mathcal{K}_{12}^{-,-} (a_1^\dagger a_2^\dagger \rho - 2a_2^\dagger \rho a_1^\dagger + \rho a_1^\dagger a_2^\dagger) - \\
 & - \mathcal{K}_{21}^{-,-} (a_2^\dagger a_1^\dagger \rho - 2a_1^\dagger \rho a_2^\dagger + \rho a_2^\dagger a_1^\dagger) + \\
 & + \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} (a_1 a_2^\dagger \rho - 2a_2^\dagger \rho a_1 + \rho a_1 a_2^\dagger) + \\
 & + \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} (a_2^\dagger a_1 \rho - 2a_1 \rho a_2^\dagger + \rho a_2^\dagger a_1) + \\
 & + \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} (a_1^\dagger a_2 \rho - 2a_2 \rho a_1^\dagger + \rho a_1^\dagger a_2) + \\
 & + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} (a_2 a_1^\dagger \rho - 2a_1^\dagger \rho a_2 + \rho a_2 a_1^\dagger). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Заданное состояние полей источников отобразилось в выражении (31) в набор релаксационных констант. В случае, когда $\mathcal{K}_{12}^{i,j} = 0$, мы имеем обычное уравнение релаксации от двух независимых сжатых источников. Новые слагаемые связаны с нетривиальными квантовыми взаимными корреляциями, обуславливающими перепутанное состояние полей. Заметим, что релаксационный оператор отвечает второму порядку по взаимодействию «мода–термостат». Для выбранных моделей источников, как следует из выражений (10), (15), новые слагаемые, пропорциональные корреляторам $\mathcal{K}_{12}^{i,j}$, являются исчезающими и имеют такой же порядок малости, как и известные, которые определяются корреляторами $\mathcal{K}_{mm}^{i,j}$.

Теперь в уравнении (30) нетрудно перейти к s -представлению (19) и, с учетом взаимодействия (17), получить уравнение Фоккера–Планка для функции квазивероятности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = (\mathcal{L} + \mathcal{R})\Phi. \quad (32)$$

Здесь оператор \mathcal{L} определяется формулой (21), а релаксационный оператор \mathcal{R} соответствует выражению (31) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} = & \frac{C}{2} \times \\
 & \times [\partial_{\alpha_1} \{ \alpha_1 + \alpha_2^* (\mathcal{K}_{21}^{-,-} - \mathcal{K}_{12}^{-,-}) - \alpha_2 (\mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} - \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-}) \} + \\
 & + \partial_{\alpha_1^*} \{ \alpha_1^* + \alpha_2 (K_{12}^{\dagger,\dagger} - K_{21}^{\dagger,\dagger}) - \alpha_2^* (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} - \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) \} + \\
 & + \partial_{\alpha_2} \{ \alpha_2 + \alpha_1^* (\mathcal{K}_{12}^{-,-} - \mathcal{K}_{21}^{-,-}) - \alpha_1 (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} - \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-}) \} + \\
 & + \partial_{\alpha_2^*} \{ \alpha_2^* + \alpha_1 (K_{21}^{\dagger,\dagger} - K_{12}^{\dagger,\dagger}) - \alpha_1^* (\mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} - \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-}) \} + \\
 & + \partial_{\alpha_1 \alpha_1}^2 \mathcal{K}_{11}^{-,-} + \partial_{\alpha_1^* \alpha_1^*}^2 \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} + \partial_{\alpha_2 \alpha_2}^2 \mathcal{K}_{22}^{-,-} + \partial_{\alpha_2^* \alpha_2^*}^2 \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} + \\
 & + \partial_{\alpha_1 \alpha_1}^2 \{ (s+1) \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} - (s-1) \mathcal{K}_{11}^{-,\dagger} \} + \\
 & + \partial_{\alpha_2 \alpha_2}^2 \{ (s+1) \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} - (s-1) \mathcal{K}_{22}^{-,\dagger} \} + \\
 & + \partial_{\alpha_1 \alpha_2}^2 \{ \mathcal{K}_{12}^{-,-} + \mathcal{K}_{21}^{-,-} \} + \partial_{\alpha_1^* \alpha_2^*}^2 \{ \mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger} \} + \\
 & + \partial_{\alpha_1 \alpha_2^*}^2 \{ (s+1) \mathcal{K}_{21}^{\dagger,-} - (s-1) \mathcal{K}_{12}^{-,\dagger} \} + \\
 & + \partial_{\alpha_1^* \alpha_2}^2 \{ (s+1) \mathcal{K}_{12}^{\dagger,-} - (s-1) \mathcal{K}_{21}^{-,\dagger} \}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Диффузионные коэффициенты уравнения Фоккера–Планка оказываются постоянными и зависят как от процессов параметрического взаимодействия мод (17), так и от корреляционных матриц моделей источников (10), (15). Заметим, что для выбранных моделей первые производные в выражении (33) содержат слагаемые, соответствующие только линейному затуханию мод.

Из уравнения (32) при $s = 1$, что соответствует нормальному упорядочению, следуют ланжевеновские уравнения

$$\begin{aligned}
 \partial_t \alpha_1 &= \frac{k}{2} (\alpha_1^* + \alpha_2) - \frac{C}{2} \alpha_1 + f_1(t), \\
 \partial_t \alpha_2 &= -\frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2^*) - \frac{C}{2} \alpha_2 + f_2(t),
 \end{aligned} \quad (34)$$

где корреляционная матрица источников шумов определяется диффузионными коэффициентами уравнения (32):

$$\begin{aligned}
 \langle f_1(0) f_1(\tau) \rangle &= \left(C \mathcal{K}_{11}^{-,-} + \frac{k}{2} \right) \delta(\tau), \\
 \langle f_1^*(0) f_1^*(\tau) \rangle &= \left(C \mathcal{K}_{11}^{\dagger,\dagger} + \frac{k}{2} \right) \delta(\tau), \\
 \langle f_1^*(0) f_1(\tau) \rangle &= \langle f_1(0) f_1^*(\tau) \rangle = C \mathcal{K}_{11}^{\dagger,-} \delta(\tau), \\
 \langle f_2(0) f_2(\tau) \rangle &= \left(C \mathcal{K}_{22}^{-,-} - \frac{k}{2} \right) \delta(\tau), \\
 \langle f_2^*(0) f_2^*(\tau) \rangle &= \left(C \mathcal{K}_{22}^{\dagger,\dagger} - \frac{k}{2} \right) \delta(\tau), \\
 \langle f_2^*(0) f_2(\tau) \rangle &= \langle f_2(0) f_2^*(\tau) \rangle = C \mathcal{K}_{22}^{\dagger,-} \delta(\tau), \\
 \langle f_1(0) f_2(\tau) \rangle &= \langle f_2(0) f_1(\tau) \rangle = \frac{C}{2} (\mathcal{K}_{12}^{-,-} + \mathcal{K}_{21}^{-,-}) \delta(\tau), \\
 \langle f_1^*(0) f_2^*(\tau) \rangle &= \langle f_2^*(0) f_1^*(\tau) \rangle = \frac{C}{2} (\mathcal{K}_{12}^{\dagger,\dagger} + \mathcal{K}_{21}^{\dagger,\dagger}) \delta(\tau),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_1(0)f_2^*(\tau) \rangle &= CK_{21}^{\dagger,-} \delta(\tau), \\ \langle f_1^*(0)f_2(\tau) \rangle &= CK_{12}^{\dagger,-} \delta(\tau). \end{aligned}$$

Для переменных x , ассоциированных в используемом представлении с квадратурными операторами Q и P , из уравнений (34) следует уравнение

$$\partial_t x = -\frac{C}{2}x + \frac{1}{2}F_x(t).$$

Здесь средние шумовых источников определяются нормально-упорядоченными дисперсиями соответствующих квадратур полей в сжатых перепутанных состояниях:

$$\langle F_x(0)F_x(\tau) \rangle = 4C \langle : X_0^2(0) : \rangle \delta(\tau),$$

причем последние определены соотношением (11) с учетом выражений (12), (16). Тогда в условиях стационарной генерации при $t \rightarrow \infty$ нормально-упорядоченная корреляционная функция для суммы координат и разности импульсов рассматриваемых полей определяется выражением

$$\langle : X(0)X(\tau) : \rangle = \langle : X_0^2(0) : \rangle \exp\left(-\frac{C}{2}|\tau|\right). \quad (35)$$

Естественно, что дисперсии средних от обсуждаемых операторов оказываются нечувствительными к рассматриваемому взаимодействию и не подвержены деградации,

$$\langle : X^2(0) : \rangle = \langle : X_0^2(0) : \rangle.$$

Из решения системы (34) нетрудно определить и стационарные средние, например,

$$\begin{aligned} \langle a_m^\dagger(0)a_m(\tau) \rangle &= \langle \alpha_m^*(0)\alpha_m(\tau) \rangle = \\ &= n_m \exp\left(-\frac{C}{2}|\tau|\right), \end{aligned} \quad (36)$$

где средние числа фотонов в модах равны

$$\begin{aligned} n_m &= n_{0m} \pm \frac{1}{2}\mu(\langle Q_0^2(0) \rangle - \langle P_0^2(0) \rangle) + \\ &+ \frac{1}{2}\mu^2(\langle Q_0^2(0) \rangle + \langle P_0^2(0) \rangle). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь верхний знак перед вторым слагаемым по-прежнему соответствует моде с индексом «1», а нижний — моде с индексом «2», n_{0m} — средние числа фотонов в исходных модах источников. Теперь величина $\mu = k/C$ определяет отношение эффективности параметрического усиления к скорости затухания. Поведение внутрирезонаторного коэффициента усиления в модах аналогично поведению в случае усиления в среде. Однако полученные здесь средние не являются наблюдаемыми и регистрируемыми в эксперименте характеристиками света.

5. УСИЛЕНИЕ СВЕТА НА ВЫХОДЕ РЕЗОНАТОРА

Проанализируем характеристики излучения на выходе резонатора. Здесь возможны две экспериментальные ситуации. Во-первых, отражение исходного излучения сжатого света в перепутанном состоянии от резонатора с параметрической средой и, во-вторых, его пропускание через резонатор, содержащий среду.

В первом случае, согласно теории «input–output» [19], операторы выходных полей $c_m(t)$ связаны с операторами внутрирезонаторных мод $a_m(t)$ и операторами поля источника $b_{0m}(t)$ соотношением

$$c_m(t) = \sqrt{C}a_m(t) - b_{0m}(t),$$

следующим из граничного условия на входном зеркале резонатора, которое в данном случае является также и выходным. Это соотношение получено в условиях высокого коэффициента отражения зеркала [28]. Поскольку регистрируемые детектором поля являются свободными, их коммутационные соотношения должны быть такими же, как и для операторов источника. Возбуждение высокодобротного резонатора двухмодовым сжатым светом в перепутанном состоянии (впрочем, как и одномодовым сжатым светом) при регистрации средних от наблюдаемых приводит к нетривиальному вкладу, связанному с интерференцией отраженного поля источника и выходящего внутрирезонаторного поля. Определим, например, среднее от корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \langle c_m^\dagger(0)c_m(\tau) \rangle &= \\ &= C \langle a_m^\dagger(0)a_m(\tau) \rangle - \sqrt{C} \langle a_m^\dagger(0)b_{0m}(\tau) \rangle - \\ &- \sqrt{C} \langle b_{0m}^\dagger(0)a_m(\tau) \rangle + \langle b_{0m}^\dagger(0)b_{0m}(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Как показано в работах [19, 20], вклад от интерференционных слагаемых сводится к выражению

$$\begin{aligned} \sqrt{C} \langle a_m^\dagger(0)b_{0m}(\tau) \rangle + \sqrt{C} \langle b_{0m}^\dagger(0)a_m(\tau) \rangle &= \\ &= CK_{mm}^{\dagger,-} \theta(\tau) \langle [a_m^\dagger(\tau), a(0)] \rangle + \\ &+ CK_{mm}^{\dagger,-} \theta(-\tau) \langle [a(\tau), a^\dagger(0)] \rangle, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\theta(\tau)$ — обычная тета-функция:

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ \frac{1}{2}, & \tau = 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

отвечающая принципу причинности. Тогда средние вида $\langle a(t_1)b(t_2) \rangle$ при $t_2 > t_1$ равны нулю, поскольку

поле источника не влияет на поле внутри резонатора в более ранний момент времени. Средние от коммутаторов внутрирезонаторных полей в выражении (39) можно вычислить с помощью нормального и антинормального представлений уравнения эволюции для матрицы плотности (32). Так, например,

$$\langle [a_m^\dagger(\tau), a(0)] \rangle = \exp\left(-\frac{C}{2}|\tau|\right).$$

Определяя среднее число фотонов в модах на выходе, получим выражение для коэффициента усиления

$$K_m = \frac{\langle c_m^\dagger c_m \rangle}{\langle b_{0m}^\dagger b_{0m} \rangle},$$

который в данном случае определяется соотношением

$$K_m = 1 \pm \frac{1}{2} \mu n_{0m}^{-1} (\langle Q_0^2(0) \rangle - \langle P_0^2(0) \rangle) + \frac{1}{2} \mu^2 n_{0m}^{-1} (\langle Q_0^2(0) \rangle + \langle P_0^2(0) \rangle), \quad (40)$$

где $n_{0m} = \langle b_{0m}^\dagger b_{0m} \rangle$ — средние числа фотонов мод источника. Корреляционные функции от операторов суммарной координаты и разностного импульса выходных полей $X^{out} = Q^{out}, P^{out}$, рассчитанные на основе выражений, аналогичных выражениям (38), (39), оказываются такими же, как и для состояния света источников:

$$\langle : X^{out}(0) X^{out}(\tau) : \rangle = \langle : X_0^2(0) : \rangle \Delta\nu^{-1} \delta_l(\tau), \quad (41)$$

что свидетельствует о сохранении свойств исходного перепутанного состояния. При гетеродинной регистрации суммарной координаты и разностного импульса выходных мод в низкочастотной области спектров шумов будет зафиксировано подавление дробового шума той же величины и в той же широкой полосе частот, что и у полей источников. Значит, как и для случая распространения волн в среде, при отражении от резонатора, содержащего среду, возникает возможность усиления перепутанного состояния сжатых световых полей источника. Значение величины коэффициента усиления зависит от отношения эффективности параметрического усиления к скорости резонаторных потерь и параметров сжатия исходных световых полей источников, задающих их корреляционные свойства. При этом, хотя идеальную перепутанную пару усилить оказывается невозможным (при $r_m \rightarrow \infty$ коэффициент $K_m \rightarrow 1$, что, по-видимому, является следствием известной теоремы о невозможности клонирования квантового состояния [29]), перепутанное состояние, получаемое

в условиях реальных экспериментов, вполне может быть усилено. В случае несимметричного источника перепутанного состояния, обладающего разными параметрами сжатия, при малом значении параметра μ , как и при распространении в среде, возникает явление перекачивания фотонов из более сильной моды в более слабую. Этот эффект нивелируется при больших значениях параметра μ , когда различия в коэффициентах усиления мод таких источников практически отсутствуют. Физическая причина сохранения свойств перепутанного состояния связана с рассматриваемым параметрическим взаимодействием, которое в уравнениях движения оказывает нечувствительным к операторам Q, P . Эти уравнения оказываются такого же вида, как и уравнения для резонатора без среды, который при отражении не изменяет статистические свойства источника сжатого света.

Рассмотрим случай прохождения светом резонатора со средой. Тогда регистрируемое детектором излучение выходит через зеркало резонатора, отличное от входного. В используемой здесь технике расчета такая ситуация моделируется введением в основное уравнение еще одного взаимодействия резонаторных мод с внешними полевыми модами, определяемыми операторами рождения $e_{\omega_m}^\dagger$ и уничтожения e_{ω_m} :

$$V_e = -i\hbar \sum_{m=1,2} \left\{ \int d\omega \Gamma_m(\omega) e_{\omega_m} a_m^\dagger - \text{H.c.} \right\},$$

где константы связи вновь будем считать не зависящими от частоты $\Gamma_m(\omega) = \sqrt{\Gamma_m/2\pi}$ и одинаковыми. Будем также считать, что поле окружения находится в вакуумном состоянии. Такое предположение с учетом тех же приближений, которые мы использовали при выводе уравнения эволюции матрицы плотности (30), приводит к появлению дополнительных слагаемых вида оператора Лимблада

$$\sum_{m=1,2} \frac{\Gamma_m}{2} (a_m^\dagger a_m \rho - a_m \rho a_m^\dagger + \text{H.c.}), \quad (42)$$

а также к появлению в уравнении для функции квазивероятности (32) новых слагаемых только в первых производных по α_m :

$$\mathcal{R} = \frac{\Gamma}{2} \sum_{m=1,2} \{ \partial_{\alpha_m} (\alpha_m + \text{c.c.}) \}.$$

Это означает, что изменяется только кинетическая часть уравнений движения (34), где необходимо заменить $C \rightarrow C + \Gamma$, а коэффициенты при членах, соответствующих шумовым источникам и их корреляционным функциям, оставить неизменными. Расчет

внутрирезонаторных характеристик полей в этом случае может быть проведен и методом кинетического уравнения для матрицы плотности, предложенным в работе [11] (см. Приложение).

Регистрируемые поля, описываемые операторами r_m , связаны с выходом внутрирезонаторного излучения, что отвечает соотношению, аналогичному (38):

$$r_m(t) = \sqrt{\Gamma} a_m(t) - e_{0m}(t).$$

В выражениях для средних от наблюдаемых интерференционный вклад внутрирезонаторных и внешних полей теперь отсутствует, поскольку их начальное состояние считается вакуумным. В итоге спектр шума фототока в низкочастотной области при гетеродинной регистрации суммарной координаты и разностного импульса наблюдаемых описывается выражением

$$i^2(\omega) = 1 + 2 \frac{C\Gamma}{\omega^2 + (C + \Gamma)^2} \langle : X_0^2(0) : \rangle,$$

где нормально-упорядоченные дисперсии $\langle : X_0^2(0) : \rangle$ заданы источниками (12), (16). В рассматриваемой ситуации прохождения света через резонатор также может возникать подавление шумов при детектировании выходного излучения. Однако даже при оптимальных условиях, т. е. при равенстве скоростей входных и выходных потерь, $C = \Gamma$, подавление шумов источников составляет лишь 25 % от первоначальной величины. Это означает, что обсуждаемая постановка эксперимента приводит только к деградации исходного состояния. Заметим, что и значение коэффициента усиления при этом также уменьшается.

6. ВЫВОДЫ

В данной работе мы рассмотрели особый вид параметрического взаимодействия для усиления световой ЭПР-пары. Этот параметрический процесс, который может быть реализован в нелинейных периодических средах, обеспечивает усиление перепутанного состояния двухмодового сжатого света с полным сохранением его квантовых корреляций. Мы рассмотрели две схемы усиления, включающие источники сжатого света. В обеих схемах степень сжатия определяет коэффициент усиления. В области малых значений этих параметров для несимметричного источника обнаружен эффект перекачки фотонов из более сильной моды в более слабую. Поскольку мы считали, что процесс параметрического взаимодействия идет в среде без дисперсии, простран-

ственные и временные свойства развиваются независимо, поэтому основные черты оказываются одинаковыми для схем с резонатором и без него. Особенностью резонаторной схемы является тот факт, что усиление возникает только при отражении света.

Рассмотренные схемы могут представлять интерес для реализации квантового повторителя. Известные предложения основаны на методах квантовой теории информации, таких как переброс (swapping) квантового состояния или процесс телепортации. Так, в работе [30] предложена схема, где квантовый канал разделяется на сегменты, на каждом из которых есть свой источник перепутанного состояния. Соседние сегменты связываются с помощью операции переброса, а для сохранения квантового состояния на каждом сегменте используется протокол очистки (purification). Последний, однако, использует проекционные измерения, поэтому в детерминированной схеме нужны дополнительные ресурсы, такие как, например, квантовая память. В нашем случае задача сохранения квантового состояния при распределении его между получателем и отправителем решается на основе интегралов движения. Основным ресурсом также служат источники света с квантовыми корреляциями, а интегралы движения выполняют роль протоколов очистки. Для наших схем необходимо параметрическое взаимодействие, которое может быть реализовано в нелинейной периодической среде, где возникает интеграл движения, приводящий к сохранению квантовых корреляций. Это означает, что между отправителем и получателем можно поместить оптический канал с нелинейной средой, в котором перепутанное состояние может распространяться без разрушения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет внутрирезонаторных характеристик в случае прохождения внешним полем резонатора может быть проведен с помощью кинетического уравнения для матрицы плотности с использованием метода, предложенного в работе [11]. Пусть резонатор, содержащий параметрическую среду с взаимодействием вида (17), возбуждается двухмодовым световым полем в перепутанном состоянии. Тогда развитие во времени матрицы плотности всей системы описывается кинетическим уравнением

$$\partial_t \rho = \sum_{m=1,2} G_m [\rho b_{0m}^\dagger, a_m] + \sum_{m=1,2} R_m \rho - i\hbar^{-1} [V, \rho]. \quad (43)$$

Мы предполагаем, что центры линий резонаторных мод настроены на центры линий волновых пакетов внешних полей на частотах ω_m , операторы рождения и уничтожения которых обозначены как b_{0m}^\dagger и b_{0m} , а их состояние задано корреляционными матрицами (10), (15). Операторы a_m^\dagger, a_m описывают внутрирезонаторные моды, начальное состояние которых считается вакуумным. Первое слагаемое в выражении (43) соответствует эффективному возбуждению резонаторных мод внешними [11], при этом

$$G_m = (C_m \Delta\nu_m)^{1/2},$$

где

$$C_m = cT_m^{in} \ell^{-1},$$

T_m^{in} — коэффициенты пропускания входных зеркал, ℓ — длина резонатора, $\Delta\nu_m$ — спектральные ширины пакетов (7). Второе слагаемое в выражении (43) соответствует полным потерям на входном и выходном зеркалах резонатора, описывается оператором Лимблада вида (42), в котором надо заменить

$$\Gamma_m \rightarrow C_m + \Gamma_m,$$

где

$$\Gamma_m = cT_m^{out} \ell^{-1},$$

и определяется коэффициентами пропускания выходных зеркал T_m^{out} . В дальнейшем мы будем полагать для обеих мод одинаковыми величины $G = G_m$ и $\tilde{C} = C_m + \Gamma_m$. Отметим, что два первых слагаемых в выражении (43) описывают однонаправленные процессы, в которых пренебрегается обратным влиянием внутрирезонаторных мод на внешние, а также их обратным влиянием на окружение.

Уравнение (43) может быть представлено в рамках диагонального представления матрицы плотности, тогда для глауберовской функции квазивероятности имеем

$$\partial_t P = (\mathcal{G} + \mathcal{R} + \mathcal{L})P. \quad (44)$$

Здесь операторы \mathcal{G} и \mathcal{R} отвечают соответствующим слагаемым (43) и определяются выражениями

$$\mathcal{G} = -G \sum_{m=1,2} (\partial_{\alpha_m} \alpha_{0m} + \text{H.c.}),$$

$$\mathcal{R} = \frac{\tilde{C}}{2} \sum_{m=1,2} (\partial_{\alpha_m} \alpha_m + \text{H.c.}),$$

а оператор \mathcal{L} определен согласно выражению (22) при $s = 1$. Мы осуществили переход к диагональному представлению как для внутрирезонаторных полей, которые описываются переменными α_m , так

и для внешних источников, которым соответствуют α_{0m} . Из уравнения (44) следуют ланжевенские уравнения эволюции мод:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 &= G\alpha_{01} + \frac{k}{2}(\alpha_1^* + \alpha_2) - \frac{C + \Gamma}{2}\alpha_1 + f_1(t), \\ \partial_t \alpha_2 &= G\alpha_{02} - \frac{k}{2}(\alpha_1 + \alpha_2^*) - \frac{C + \Gamma}{2}\alpha_2 + f_2(t), \end{aligned} \quad (45)$$

шумовые источники которых определяются соотношением (23), где необходимо заменить

$$f_m(z, t) \rightarrow f_m(t),$$

$$\delta(z_2 - z_1)\Delta\nu^{-1}\delta_l(t_2 - t_1) \rightarrow \delta(t_2 - t_1).$$

Уравнения (45) позволяют определить внутрирезонаторные характеристики полей. Так, в условиях стационарной генерации нормально-упорядоченные дисперсии суммарной координаты и разностного импульса связаны с начальными масштабным преобразованием

$$\langle : X(0)X(\tau) : \rangle = \mathcal{A} \langle : X_0^2(0) : \rangle \exp\left(-\frac{C + \Gamma}{2}|\tau|\right),$$

где $X = P, Q$, а величина $\mathcal{A} = C(C + \Gamma)^{-1}$. Стационарные средние числа фотонов в модах

$$\begin{aligned} n_m &= \mathcal{A}n_{0m} \pm \frac{1}{2}\mathcal{A}^2\mu(\langle Q_0^2(0) \rangle - \langle P_0^2(0) \rangle) + \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{A}^3\mu^2(\langle : Q_0^2(0) : \rangle + \langle : P_0^2(0) : \rangle) + \frac{1}{2}\mathcal{A}^2\mu^2 \end{aligned}$$

определяются начальными средними числами фотонов источников n_{0m} , дисперсиями их квадратурных компонент $\langle X_0^2(0) \rangle$ и шумами параметрического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. J. Briegel et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 5932 (1998); W. Dur et al., Phys. Rev. A **59**, 169 (1999).
2. P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997).
3. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); А. М. Башаров, ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).
4. M. Bourennane, M. Eibl, S. Gaertner, C. Kurtsiefer, A. Cabello, and H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **92**, 107901 (2004).
5. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Опт. и спектр. **84**, 970 (1998); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Опт. и спектр. **89**, 420 (2000); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **77**, 563 (2003).

6. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **83**, 213 (2006).
7. A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998).
8. X. Li, Q. Pan, J. Jing, J. Zhang, C. Xie, and Kunchi Peng, E-print archives, quant-ph/0107068.
9. B. E. A. Saleh, B. M. Jost, H.-B. Fei, and M. C. Teich, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3483 (1998).
10. C. M. Caves, *Phys. Rev. D* **26**, 1817 (1982).
11. М. И. Колобов, И. В. Соколов, *Опт. и спектр.* **63**, 958 (1987).
12. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **102**, 1441 (1992).
13. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **103**, 1931 (1993).
14. M. Paris, *J. Opt. B* **4**, 442 (2002).
15. D. Wilson, J. Lee, and M. S. Kim, E-print archives, quant-ph/0206197.
16. А. С. Чиркин, В. В. Волков, Г. Д. Лаптев, Е. Ю. Морозов, КЭ **30**, 847 (2000); А. В. Никандров, А. С. Чиркин, Письма в ЖЭТФ **76**, 333 (2002); А. А. Новиков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ **126**, 1089 (2004).
17. Ю. М. Голубев, ЖЭТФ **65**, 466 (1973); V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, *J. Phys. A* **33**, 371 (2000).
18. I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960).
19. C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
20. C. W. Gardiner, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1917 (1986).
21. А. М. Башаров, ЖЭТФ **111**, 25 (1997); А. М. Башаров, Известия АН, сер. физ. **62**, 438 (1998).
22. H. J. Carmichael, A. S. Lane, and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2539 (1987); H. Ritsch and P. Zoller, *Opt. Comm.* **64**, 523 (1987).
23. А. М. Башаров, ЖЭТФ **108**, 842 (1995).
24. J. Bergou and D. Zhao, *Phys. Rev. A* **52**, 1550 (1995); P. Cataloga et al., *Opt. Comm.* **81**, 175 (1991).
25. S. L. Braunstein and H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
26. P. van Loock and S. L. Braunstein, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3482 (1998).
27. C. Viviescas and G. Hackenbroich, *Phys. Rev. A* **67**, 013805 (2003).
28. J. Gea-Banacloche et al., *Phys. Rev. A* **41**, 369 (1990).
29. W. K. Wootters and W. H. Zurek, *Nature* **299**, 802 (1982).
30. L.-M. Duan, M. S. Lukin, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Nature* **414**, 413 (2001).