

СТЕКОЛЬНЫЕ ФАЗЫ В СЛОИСТЫХ ИЗИНГОВСКИХ МАГНЕТИКАХ СО СЛУЧАЙНЫМ МЕЖСЛОЕВЫМ ОБМЕНОМ

*П. Н. Тимонин**

*НИИ физики Ростовского государственного университета
344 090, Ростов-на-Дону, Россия*

Поступила в редакцию 30 августа 2005 г.

Рассмотрена термодинамика модели слоистого изинговского магнетика с постоянным ферромагнитным взаимодействием бесконечного радиуса внутри слоев и случайным обменом между соседними слоями. Подробно исследован случай, когда среднее межслоевое взаимодействие равно нулю. Получен неравновесный термодинамический потенциал в окрестности фазового перехода и показано наличие множественных метастабильных состояний. Определены термодинамические параметры кристалла в простых периодических состояниях. Установлено, что эволюция равновесного состояния кристалла с ростом среднеквадратичного межслоевого обмена происходит через бесконечную серию фазовых переходов первого рода, число намагниченных слоев и расстояние между ними, а также однородная намагниченность и магнитная восприимчивость кристалла меняются скачкообразно.

PACS: 64.60.Cn, 05.70.Jk, 64.60.Fr

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих слоистых магнетиках обнаруживается полная или частичная разупорядоченность магнитной структуры, заставляющая прибегать при ее описании к термину «спиновое стекло» [1–6]. Наблюдаются и другие признаки спиновых стекол — различие термодинамических параметров при разных режимах охлаждения (в поле и без поля) [4, 6], размытый максимум и низкочастотная дисперсия магнитной восприимчивости [4–6]. При этом стекольные свойства наблюдаются не только в кристаллических твердых растворах, где их очевидной причиной является замещение ионов, приводящее к флуктуациям обменного взаимодействия. Многие слоистые кристаллы допускают весьма большие отклонения от стехиометрии, как, например, $\text{SrCoO}_{3-\delta}$ [4, 5], в других разупорядоченность является их внутренне присущим свойством, как в LiNiO_2 , где равные по размерам ионы Li и Ni могут легко обмениваться позициями [1]. Наконец, даже в номинально чистом кристалле всегда присутствует некоторое количество примесей и дефектов.

Простейшим вариантом беспорядка является

внедрение примесей в межслоевое пространство, не затрагивающее магнитные взаимодействия внутри слоев. Сходная модель объясняет и стекольные свойства LiNiO_2 — малая концентрация ионов Li в ферромагнитных слоях, содержащих Ni, практически не меняет их свойств, тогда как присутствие ионов Ni в слоях с Li приводит к локальному ферромагнитному межслоевому обмену на фоне слабого антиферромагнитного [1]. В этом случае можно надеяться на существенное упрощение описания эффектов разупорядочения, особенно если радиус магнитного взаимодействия внутри слоев много больше постоянной решетки. Тогда внутрислоевое упорядочение может быть рассмотрено в приближении эффективного поля везде, кроме узкой окрестности перехода. При этом эффекты межслоевых флуктуаций обмена будут усредняться по области с размерами порядка радиуса взаимодействия, который в области применимости приближения эффективного поля можно считать бесконечным. В результате получим квазиодномерную ситуацию с неким усредненным межслоевым взаимодействием между намагниченными плоскостями [7]. Теоретическое описание становится существенно проще, чем при трехмерном беспорядке, и можно надеяться получить некоторые аналитические

*E-mail: timonin@aaanet.ru

результаты относительно термодинамики такого неупорядоченного слоистого магнетика, сохраняющей специфические черты спиновых стекол, в частности, наличие множественных неоднородных метастабильных состояний. Происхождение и свойства таких состояний составляют главную проблему теории неупорядоченных магнитных кристаллов, поэтому исследование описанной модели слоистого магнетика может не только дать приближенное количественное описание термодинамики реальных кристаллов, но и выяснить некоторые качественные особенности метастабильных состояний, ответственных за неэргодическое поведение неупорядоченных систем.

Здесь мы рассмотрим простейшую модель изинговского магнетика с ферромагнитным взаимодействием бесконечного радиуса внутри слоев и случайным обменом между магнитными атомами в соседних слоях. В ней удастся довольно просто получить в окрестности фазового перехода эффективный термодинамический потенциал для намагниченностей слоев. Это позволяет провести достаточно полное исследование происхождения и свойств метастабильных состояний в чисто стекольном случае, когда эффективное межплоскостное взаимодействие в среднем равно нулю, а также установить существование множества равновесных стекольных фаз при различных значениях среднеквадратичного случайного обмена и описать переходы между ними.

2. МОДЕЛЬ И ФОРМАЛИЗМ

Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2M} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^M S_{m,n} \right)^2 - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{J}_{m,n} S_{m,n} S_{m,n+1} - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N S_{m,n} H_n. \quad (1)$$

Здесь $S_{m,n} = \pm 1$ — изинговские спины, индекс « m » нумерует узлы решетки в слое от 1 до M , а $n = 1, 2, \dots, N$ — номер слоя, $J > 0$ — константа внутрислоевого ферромагнитного обмена, $\tilde{J}_{m,n}$ описывает случайное межслоевое взаимодействие, H_n — внешнее магнитное поле, постоянное внутри слоя. Мы будем считать, что все $\tilde{J}_{m,n}$ имеют одну и ту же

функцию распределения. Из формулы (1) можно получить усредненное по $\tilde{J}_{m,n}$ значение (равновесного) термодинамического потенциала (в расчете на один узел в слое)

$$-M\beta\bar{F} = \langle \ln \text{Tr} \exp(-\beta\mathcal{H}) \rangle_{\tilde{J}}.$$

Здесь $\beta = 1/T$ — обратная температура, Tr означает суммирование по всем спиновым конфигурациям, а угловые скобки со значком « \tilde{J} » внизу — усреднение по случайным $\tilde{J}_{m,n}$.

Преобразование Хаббарда–Стратоновича ферромагнитного члена в формуле (1) дает

$$-M\beta\bar{F} = \left\langle \ln \left\{ \int d\mathbf{f} \exp[-M\beta\bar{F}(\mathbf{f})] \right\} \right\rangle_{\tilde{J}}, \quad (2)$$

$$\beta\bar{F}(\mathbf{f}) = \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^N f_n^2 - \frac{1}{M} \times \sum_{m=1}^M \ln \left\{ \text{Tr} \exp \sum_{n=1}^N \left[\tilde{K}_{m,n} S_{m,n} S_{m,n+1} + (h_n + f_n) S_{m,n} \right] \right\}, \quad (3)$$

где $h_n = \beta H_n$, $K = \beta J$ и $\tilde{K}_{m,n} = \beta \tilde{J}_{m,n}$.

Поскольку сумма логарифмов в (3) представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, при $M \rightarrow \infty$ усреднение по случайному межслоевому обмену в (2) сводится к усреднению этой суммы. Таким образом, получим

$$-M\beta\bar{F} = \ln \left\{ \int d\mathbf{f} \exp[-M\beta F(\mathbf{f})] \right\}, \quad (4)$$

$$\beta F(\mathbf{f}) = \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^N f_n^2 - \left\langle \ln \left\{ \text{Tr} \exp \sum_{n=1}^N \left[\tilde{K}_n S_n S_{n+1} + (h_n + f_n) S_n \right] \right\} \right\rangle_{\tilde{J}}. \quad (5)$$

В формуле (5) опущен индекс « m » у спинов и константы обмена, поскольку вклады от всех слоев идентичны.

Вычислив неравновесный термодинамический потенциал (5), можно определить всю термодинамику модели. Так, при $M \rightarrow \infty$ имеем

$$\bar{F} \approx \min [F(\mathbf{f})] - TS_{conf}, \quad (6)$$

где S_{conf} — конфигурационная энтропия, определяемая логарифмом числа точек \mathbf{f} , в которых достигается данный минимум $F(\mathbf{f})$,

$$S_{conf} = M^{-1} \ln W.$$

Для полной средней намагниченности слоя,

$$m_n \equiv M^{-1} \sum_{m=1}^M \langle S_{m,n} \rangle_{T,\bar{j}} = -\frac{\partial \beta \bar{F}}{\partial h_n},$$

из формул (4), (5) получим

$$m_n = -\left\langle \frac{\partial \beta F(\mathbf{f})}{\partial h_n} \right\rangle_f = \left\langle K^{-1} f_n - \frac{\partial \beta F(\mathbf{f})}{\partial f_n} \right\rangle_f \approx \approx K^{-1} \langle f_n \rangle_f, \quad (7)$$

а для парного коррелятора, определяющего неоднородную восприимчивость слоев,

$$C_{n,n'} \equiv M^{-1} \sum_{m,m'=1}^M \langle \langle S_{m,n} S_{m',n'} \rangle_T \rangle_{\bar{j}} - \langle S_{m,n} \rangle_T \langle S_{m',n'} \rangle_T \rangle_{\bar{j}} = -\frac{\partial^2 \beta \bar{F}}{\partial h_n \partial h_{n'}},$$

имеем

$$C_{n,n'} = M K^{-2} [\langle f_n f_{n'} \rangle_f - \langle f_n \rangle_f \langle f_{n'} \rangle_f] \approx \approx K^{-2} \left[\frac{\partial^2 \beta F(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \right]_{n,n'}^{-1} \Big|_{\mathbf{f}=\langle \mathbf{f} \rangle}. \quad (8)$$

Второй член в формуле (5) содержит под знаком логарифма статистическую сумму одномерной изинговской цепочки со случайным обменом в неоднородном поле. Ее можно представить в виде разложения по степеням $\mu_n \equiv \text{th}(h_n + f_n)$ и выразить потенциал (5) как функцию этих переменных:

$$\begin{aligned} \beta F(\mu) = & -(N-1) \langle \ln(2 \text{ch } \tilde{K}) \rangle_{\bar{j}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [(\text{arth } \mu_n - h_n)^2 / K + \ln(1 - \mu_n^2)] - \\ & - \left\langle \ln \left(1 + \sum_{k=1}^{[N/2]} \sum_{n_1 < n_2 < \dots < n_{2k}} G_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \prod_{l=1}^{2k} \mu_{n_l} \right) \right\rangle_{\bar{j}}, \quad (9) \\ G_{n_1, n_2, \dots, n_{2k}} = & \prod_{j=1}^K G_{n_{2j-1}, n_{2j}}, \\ G_{n, n'} = & \prod_{i=n}^{n'} \text{th} \left(\tilde{K}_i \right). \end{aligned}$$

В общем случае выполнить усреднение в последнем члене формулы (9) довольно сложно, гораздо проще исследовать окрестность фазового перехода и случай малых или нулевых магнитных полей, когда

можно оставить лишь низшие степени разложения (9) по малым μ_n и h_n . Далее мы ограничимся рассмотрением именно этого случая.

3. ТЕРМОДИНАМИКА В ОКРЕСТНОСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

С точностью до четвертого порядка по μ_n и при $|h_n| \leq |\mu_n^3|$ получим из формулы (9)

$$\begin{aligned} \beta F(\mu) = & -(N-1) \langle \ln(2 \text{ch } \tilde{K}) \rangle_{\bar{j}} + \frac{\mathbf{h}^2}{2K} - \frac{\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\mu}}{K} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \mu_n \left(K^{-1} \delta_{n,n'} - g_{n-n'}^{(1)} \right) \mu_{n'} + \\ & + \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{4} \right) \sum_n \mu_n^4 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \mu_i^2 g_{i-j}^{(2)} \mu_j^2 + \\ & + \sum_{i < j < k} \left(\mu_i^2 g_{i-j}^{(2)} \mu_j g_{j-k}^{(1)} \mu_k + \mu_i g_{i-j}^{(1)} \mu_j g_{j-k}^{(2)} \mu_k \right) + \\ & + 2 \sum_{i < j < k < l} \mu_i g_{i-j}^{(1)} \mu_j g_{j-k}^{(2)} \mu_k g_{k-l}^{(1)} \mu_l, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_n^{(1)} = & \mathbf{v}^{|n|}, \quad g_n^{(2)} = \mathbf{u}^{|n|}, \\ \mathbf{v} = & \langle \text{th } \tilde{K} \rangle_{\bar{j}}, \quad \mathbf{u} = \langle \text{th}^2 \tilde{K} \rangle_{\bar{j}}. \end{aligned}$$

Здесь $\mu_n \approx f_n / K$, так что равновесные (соответствующие минимуму потенциала) значения этих переменных дают средние величины намагниченностей слоев, см. (7).

Из формулы (10) легко видеть, что в нулевом поле этот потенциал описывает фазовый переход второго рода, при котором появляются спонтанные намагниченности слоев, упорядоченные ферромагнитно при $v > 0$ или антиферромагнитно при $v < 0$. При этом точка перехода в обоих случаях определяется условием $K \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n^{(1)}| = 1$. Вообще говоря, существенно нелокальное взаимодействие четвертого порядка в (10) (его радиус стремится к бесконечности при $u \rightarrow 1$) позволяет предположить, что наряду с минимумом при $\mu_n = \mu$ или $\mu_n = \mu(-1)^n$ могут существовать и другие минимумы, соответствующие неоднородному упорядочению. Скорее всего, в нулевом поле такие минимумы будут иметь более высокий термодинамический потенциал, определяя метастабильные состояния системы. Однако в присутствии поля, особенно неоднородного, такие состояния могут стать стабильными, т. е. будут иметь место переходы первого рода из однородного ферро- или антиферромагнитного состояния в различные

неоднородные в зависимости от величины и от пространственных вариаций приложенного внешнего поля. Динамические явления в медленных переменных полях также будут иметь особенности, обусловленные наличием неоднородных метастабильных состояний, так что их исследование в ферро- или антиферромагнитном случае представляет несомненный интерес и может объяснить наблюдаемые в экспериментах стекольные свойства слоистых магнетиков. Любопытные особенности обнаружены и в численном моделировании температурного поведения намагниченности слоев в данной модели со случайным ферромагнитным взаимодействием [7] — они испытывают заметные осцилляции, нарастающие с удалением от перехода. Природа этого явления сейчас неясна.

Однако наиболее интересным представляется случай чисто стекольного упорядочения, когда среди межслоевых взаимодействий в равных долях присутствуют ферро- и антиферромагнитные взаимодействия, так что функция распределения их симметрична и $v = 0$. Тогда потенциал (10) при $h_n = 0$ принимает вид

$$\beta F(\mu) = -(N-1)\langle \ln(2 \operatorname{ch} \tilde{K}) \rangle_J + \frac{\tau}{2}\mu^2 - \frac{1}{6} \sum_n \mu_n^4 + \frac{1}{4} \sum_{n,n'} \mu_n^2 u^{|n-n'|} \mu_{n'}^2, \quad (11)$$

где $\tau \equiv K^{-1} - 1 = (T - J)/J$, $\tau \ll 1$.

Несмотря на простоту выражения (11), определение величин спонтанных намагниченностей μ_n , появляющихся при $\tau < 0$, является довольно сложной задачей. Уравнение для экстремумов $F(\mu)$,

$$\mu_n \left(\tau - \frac{2}{3}\mu_n^2 + \sum_l u^{|n-l|} \mu_l^2 \right) = 0, \quad (12)$$

имеет в общем случае много решений, среди которых нужно выбрать устойчивые (соответствующие локальным минимумам), для которых матрица вторых производных (гессиан),

$$\beta F''_{n,n'} = \delta_{n,n'} \left(\tau - 2\mu_n^2 + \sum_l u^{|n-l|} \mu_l^2 \right) + 2\mu_n u^{|n-n'|} \mu_{n'}, \quad (13)$$

положительно определена.

Нетрудно убедиться в том, что вид устойчивых решений (12) существенно зависит от величины u . Действительно, в тривиальном случае $u = 0$ (отсутствие межслоевого взаимодействия) устойчивые

решения имеют вид $\mu_n = \pm \mu$, т. е. все слои имеют одинаковую намагниченность, ориентация которой не фиксирована, так что имеется всего 2^N решений. Такое вырождение минимума потенциала есть следствие его инвариантности относительно смены знака каждого μ_n .

В другом предельном случае бесконечно большого случайного взаимодействия, $u \rightarrow 1$, устойчивыми являются состояния, в которых намагничены лишь один (любой) слой, т. е. $2N$ состояний (с учетом произвольного знака $\mu_n \neq 0$). Нашей задачей является выяснение того, какие состояния реализуются при промежуточных значениях u и как происходит эволюция состояний кристалла с ростом беспорядка.

Из формулы (12) следует, что в общем случае решения этого уравнения имеют вид

$$\mu_n = \pm \vartheta_n \sqrt{|\tau| q_n}. \quad (14)$$

Величины ϑ_n могут принимать два значения — 0 и 1, $\vartheta_n = \{0, 1\}$. Выбрав определенный вектор ϑ , можно найти из формулы (12) \mathbf{q} ,

$$\mathbf{q} = \hat{D}^{-1} \vartheta, \quad (15)$$

$$D_{n,n'} = \vartheta_n u^{|n-n'|} \vartheta_{n'} - \frac{2}{3} \delta_{n,n'}. \quad (16)$$

Отметим, что величина $|\tau| \mathbf{q}$ имеет смысл (неоднородного) параметра Эдвардса–Андерсона [8]. Согласно формуле (14), выбор ϑ при данном u ограничен условием $q_n > 0$. Кроме того, необходима положительная определенность гессиана (13) или, что то же самое (см. (8)), матрицы коррелятора, имеющей для рассматриваемых решений вид

$$C_{n,n'} = |\tau|^{-1} \left[\vartheta_n (\hat{D}^{-1})_{n,n'} \vartheta_{n'} / 2 \sqrt{q_n q_{n'}} + \delta_{n,n'} (1 - \vartheta_n) E_n^{-1} \right], \quad (17)$$

$$E_n = \sum_l u^{|n-l|} q_l \vartheta_l - 1. \quad (18)$$

Для этого достаточно выполнения условий

$$E_n > 0 \quad \text{при} \quad \vartheta_n = 0, \quad (19)$$

$$\vartheta_n D_{n,n'} \vartheta_{n'} > 0. \quad (20)$$

Последнее неравенство обозначает символически положительную определенность матрицы \hat{D} на подпространстве, где $\vartheta_n = 1$. Соответствующие значения равновесного термодинамического потенциала имеют вид

$$\beta \bar{F} = -(N-1)\langle \ln(2 \operatorname{ch} \tilde{K}) \rangle_J + \frac{\tau}{4}\mu^2 - S_{conf} = -(N-1)\langle \ln(2 \operatorname{ch} \tilde{K}) \rangle_J - \frac{\tau^2}{4} \vartheta \hat{D}^{-1} \vartheta - M^{-1} \sum_n \vartheta_n \ln 2.$$

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

Задача нахождения среди возможных 2^N векторов ϑ тех, которые удовлетворяют при данном u перечисленным выше условиям, представляется чрезвычайно сложной. Поэтому рассмотрим сначала лишь периодические состояния с некоторым периодом L . Вводя нумерацию слоев вида $n = rL + s$, где r — натуральные числа и $s = 1, 2, \dots, L$, рассмотрим решения, удовлетворяющие условию периодичности $\vartheta_{rL+s} = \vartheta_s$.

При этом очевидно, что L -мерные векторы ϑ_s , отличающиеся друг от друга лишь циклической перестановкой компонент, описывают одно и то же состояние. Удобно рассматривать ϑ_s определенными на равноотстоящих точках кольца, что дает наглядное представление о том, что повороты ϑ_s на кольце не меняют рассматриваемого состояния.

Следует также подчеркнуть, что в рассматриваемых состояниях знаки μ_n могут быть произвольными, не обязательно периодическими, так как от них не зависит ни область устойчивости, ни равновесное значение потенциала фазы. Поэтому все последующие результаты относятся ко всем $2^{[N/L]P}$ состояниям с различающимися ориентациями намагниченностей. Здесь $P = \sum_{s=1}^L \vartheta_s$ — число намагниченных слоев в периоде, а квадратные скобки означают целую часть числа.

Для таких периодических фаз имеем

$$D_{n,n'} = D_{s,s'}(r - r') = \vartheta_s \vartheta_{s'} u^{L|r-r'|+(s-s') \text{sign}(r-r')} - \frac{2}{3} \delta_{r,r'} \delta_{s,s'}.$$

Поскольку матрица \hat{D} зависит от разности $r - r'$, ее можно диагонализировать по этим индексам путем унитарного преобразования $\Omega_{k,r} = (L/N)^{1/2} \exp ikr$, в котором будем считать k принадлежащим первой зоне Бриллюэна, $|k| < \pi$. Результат имеет вид

$$D_{s,s'}(k) = \vartheta_s \vartheta_{s'} \left(u^{|s-s'|} + \frac{u^{s-s'}}{u^{-L} e^{-ik} - 1} + \frac{u^{s'-s}}{u^{-L} e^{ik} - 1} \right) - \frac{2}{3} \delta_{s,s'}. \quad (21)$$

Теперь условие устойчивости (20) для матрицы \hat{D} означает, что $D_{s,s'}(k)$ должна быть положительно определенной на подпространстве, где $\vartheta_s = 1$, при всех $|k| < \pi$. Периодические решения для q выражаются через $D_{s,s'}(k)$ при $k = 0$,

$$q_{rL+s} = q_s = [\hat{D}^{-1}(0)]_{s,s'} \vartheta_{s'} \quad (22)$$

то же справедливо и для E_s ,

$$E_{rL+s} = E_s = \hat{D}_{s,s'}^{-1}(0) q_{s'} \vartheta_{s'} - 1. \quad (23)$$

Диагонализация коррелятора по $r - r'$ дает

$$C_{s,s}(k) = |\tau|^{-1} \left\{ \frac{\vartheta_s [\hat{D}^{-1}(k)]_{s,s'} \vartheta_{s'} \delta_{s,s'} (1 - \vartheta_s)}{2\sqrt{q_s q_{s'}} E_s} \right\}, \quad (24)$$

а для равновесного потенциала имеем

$$\frac{\beta F}{N} \approx -(\ln(2 \text{ch } \tilde{K}))_j - L^{-1} \left[\frac{\tau^2}{4} \vartheta \hat{D}^{-1}(0) \vartheta + M^{-1} P \ln 2 \right]. \quad (25)$$

Последний член в формуле (25), пропорциональный P , — это вклад от конфигурационной энтропии, появляющийся вследствие вырождения минимумов потенциала, так как имеется $2^{[N/L]P}$ состояний с одинаковым потенциалом, различающихся знаками намагниченности слоев. Вообще говоря, его нужно учитывать при $P \sim M$. Поскольку $P \leq N$, такое может случиться лишь при $N \sim M$, т.е. в очень тонких «усах» диаметром около \sqrt{M} , много меньшим длины N . Следует, однако, учесть, что указанное вырождение присутствует лишь в идеализированной ситуации, когда внешнее поле точно равно нулю, тогда как в эксперименте всегда существуют слабые неоднородные поля, снимающие вырождение. Далее будем предполагать наличие такого инфинитезимального поля и опускать вклад от конфигурационной энтропии независимо от геометрии образца.

5. ТЕРМОДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим простейшие периодические состояния, для которых несложно получить аналитические результаты. Так, для состояний с $P = 1$ ($\vartheta_L = 1, \vartheta_s = 0, s = 1, \dots, L - 1$) матрица \hat{D} (21) становится просто функцией от k ,

$$D(k) = \frac{1}{3} \frac{1 + 4u^L \cos k - 5u^{2L}}{1 - 2u^L \cos k + u^{2L}}, \quad (26)$$

и мы имеем

$$q_L \equiv q = D^{-1}(0) = 3 \frac{1 - u^L}{1 + 5u^L}, \quad (27)$$

$$E_s = 3 \frac{u^s + u^{L-s}}{1 + 5u^L} - 1, \quad s = 1, \dots, L - 1. \quad (28)$$

Подстановка этих выражений в равенство (24) дает формулу для коррелятора, из которого можно найти, в частности, выражение для однородной восприимчивости,

$$\beta\chi = \frac{1}{L} \sum_{s,s'}^L C_{s,s'}(0) = \frac{1}{2|\tau|L} \left(1 + 2 \sum_{s=1}^{L-1} E_s^{-1} \right). \quad (29)$$

Область устойчивости этих состояний определяется условиями $E_{[L/2]} > 0$, $D(\pi) > 0$. Первое из этих условий определяет нижнюю границу возможных значений u , второе — верхнюю. Для четных L получим

$$5^{-2} < u^L < 5^{-1}. \quad (30)$$

Для небольших нечетных L нижняя граница будет несколько выше, однако с ростом L она быстро стремится к $1/25$.

После введения величины

$$R(u) = -\frac{\ln 5}{\ln u}, \quad (31)$$

имеющей смысл эффективного радиуса межслоевого взаимодействия, условие устойчивости (30) можно представить в виде

$$1 < L/R < 2. \quad (32)$$

Это представление наглядно демонстрирует, что период L (расстояние между намагниченными слоями) не может сильно отличаться от радиуса межслоевого взаимодействия R .

Равновесный потенциал рассматриваемых состояний имеет вид

$$\frac{\beta\bar{F}}{N} \approx -\langle \ln(2 \operatorname{ch} \tilde{K}) \rangle_j - \frac{\tau^2 q}{4L}. \quad (33)$$

Обратимся теперь к состояниям с $P = 2$. Положим $\vartheta_L = \vartheta_{L'} = 1$, а остальные $\vartheta_s = 0$ и будем считать для определенности, что $L' \leq L/2$. Тогда

$$q_L = q_{L'} \equiv q' = \frac{3(1 - u^L)}{1 + 3u^{L'} + 3u^{L-L'} + 5u^L}, \quad (34)$$

$$\frac{\beta\bar{F}}{N} \approx -\langle \ln(2 \operatorname{ch} \tilde{K}) \rangle_j - \frac{\tau^2 q'}{2L}. \quad (35)$$

Для устойчивости таких состояний достаточно выполнения условий $E_{(L+L')/2} > 0$ и $D_{LL}(0) - D_{L'L'}(0) > 0$, или (для четных $L + L'$)

$$\begin{aligned} & 6 \left(u^{(L-L')/2} + u^{(L+L')/2} \right) - \\ & - 3 \left(u^{L'} + u^{L-L'} \right) - 5u^L - 1 > 0, \quad (36) \\ & 1 + 5u^L - 3 \left(u^{L'} + u^{L-L'} \right) > 0. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим, что их совместное выполнение возможно лишь, если $u^{(3L'-L)/2} < 1$, так что устойчивые состояния должны иметь $L' > L/3$ или

$$1 < \nu < 2, \quad (37)$$

где $\nu \equiv (L - L')/L'$ — отношение наибольшего к наименьшему расстоянию между намагниченными слоями.

Условия устойчивости (36) можно представить в виде, сходном с (32),

$$A'(\nu) < \frac{L'}{R} < B'(\nu). \quad (38)$$

Численный анализ формулы (36) дает приближенные выражения

$$A'(\nu) \approx 0.77 + \frac{0.23}{\nu}, \quad B'(\nu) \approx -0.23 + \frac{2.23}{\nu}.$$

При $\nu = 2$ область устойчивости стягивается в точку, а при $\nu = 1$ ($L' = L/2$) (38) совпадает с (32), поскольку рассматриваемые состояния совпадают в этом случае с состояниями с $P = 1$ и $L_1 = L/2$. Нетрудно убедиться, что такие состояния с $P = 1$ имеют область устойчивости ($L/4 < R < L/2$), полностью перекрывающую область (38) $L'/B'(\nu) < R < L'/A'(\nu)$, и более низкий потенциал (33), чем потенциал (35). Последнее следует из максимальной q' (34) при $L' = L/2$. Таким образом, состояния с $P = 2$ всегда являются метастабильными.

Аналитическое исследование состояний с $P > 2$ оказывается весьма громоздким, однако основные их свойства можно установить, пользуясь численными расчетами и качественными соображениями, следующими из точных результатов для $P = 1, 2$. Так, из предыдущего ясно, что при любых P устойчивые состояния должны иметь средние расстояния между намагниченными слоями порядка R . Вводя наименьшее и наибольшее такие расстояния для данного состояния (и представляя при этом точки, изображающие слои, расположенными на кольце),

$$L_{min} = \min_{s,s'} (|s - s'|, L - |s - s'|),$$

$L_{max} = \max_{s,s'} (|s - s'|, L - |s - s'|)$ для $\vartheta_s \vartheta_{s'} = 1$, можно получить верхнюю оценку для величины

$$\nu = L_{max}/L_{min},$$

которую могут иметь устойчивые состояния. Так, легко видеть, что условие устойчивости для матрицы $\hat{D}(0)$ (21) подразумевает, что ее наибольший недиагональный элемент (на подпространстве

с $\vartheta_s = 1$) должен быть по модулю меньше диагональных. Рассматривая состояния с $P \gg 1$ и, следовательно, $L \gg R$, получим отсюда приближенное необходимое условие

$$3u^{L_{min}} < 1, \quad (39)$$

тогда как из условия $E_{L_{max}/2} > 0$, полагая $L_{max} \sim R$ и $q_s \sim q_{max} = 3$ в (23), получим приближенно

$$6u^{L_{max}/2} > 1. \quad (40)$$

Из (39) и (40) следует, что конечный интервал устойчивости могут иметь лишь состояния, у которых

$$\nu < \nu_c = 2 \frac{\ln 6}{\ln 3} \approx 3.262.$$

Наибольшее значение ν , найденное при численном исследовании состояний с $5 \leq L \leq 30$ и $3 \leq P \leq 15$, равно 3, что подтверждает наличие верхней границы $\nu_c \approx 3$ для устойчивых состояний. Численные результаты показывают также, что для состояний с большими P имеет место необходимое условие устойчивости, сходное с (38),

$$A(\nu) < L_{min}/R < B(\nu). \quad (41)$$

Вид функций $A(\nu)$ и $B(\nu)$, полученных в расчетах, представлен на рис. 1. Отметим, что область между $A(\nu)$ и $B(\nu)$ на этом рисунке включает в себя и область (38), и что при $\nu \rightarrow 1$ (41) переходит в (32), вследствие того что в этом случае все состояния становятся эквивалентными состояниям с $P = 1$.

Из формулы (41) следует, что интервал R , в котором существуют устойчивые состояния с $P > 1$ и $1 < \nu < \nu_c \approx 3$,

$$L_{min}/B(\nu) < R < L_{min}/A(\nu),$$

полностью принадлежит областям устойчивости (32) состояний с $P = 1$ и некоторым L_1 , если L_1 удовлетворяет условию

$$L_{min}/A(\nu) < L_1 < 2L_{min}/B(\nu).$$

Очевидно, что такие L_1 всегда существуют, и так как $A(\nu) \leq 1$ и $\nu B(\nu) \geq 2$, их значения находятся между L_{min} и L_{max} , $L_{min} \leq L_1 \leq L_{max}$. Существуют также состояния с L_1 в этом интервале и его окрестности, которые частично перекрывают область устойчивости (41).

Упомянутые выше численные расчеты показывают, что состояния с $P > 1$ всегда имеют более высокий термодинамический потенциал, чем сосуще-

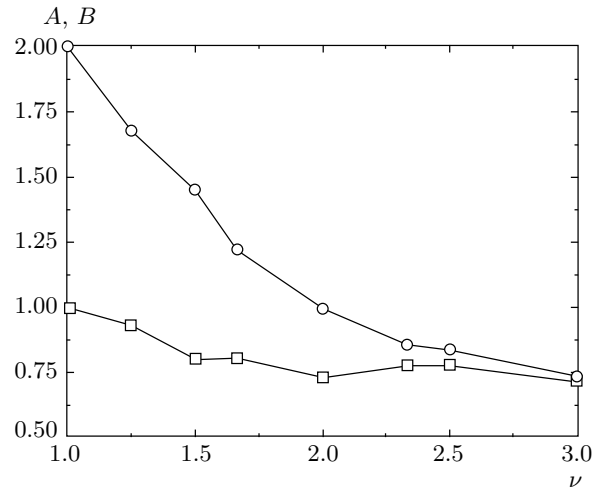


Рис. 1. Функции $A(\nu)$ (квадраты) и $B(\nu)$ (кружки) в неравенстве (41), полученные в численных исследованиях устойчивых состояний с $P > 2$

ствующие с ними состояния с $P = 1$. Закономерность этого можно доказать аналитически для состояний с ν близким к единице. Рассмотрим состояния $P > 1$ и $L = PL_1$ с равноотстоящими намагниченными слоями, т. е. эквивалентные состояниям с $P = 1$ и $L_1 = L/P$, и найдем изменение их потенциала (25) при малых смещениях положений намагниченных слоев $L_1s \rightarrow L_1s + \delta r_s$. Результат имеет вид

$$\frac{\beta \delta F}{N} = \left(\frac{\tau q \ln u}{2} \right)^2 \times \sum_k |\delta r_k|^2 [D(0) - D(k) - D(k)^{-1} |D'(k)|^2].$$

Здесь δr_k — фурье-образ смещений, $k = 2\pi l/P$, $l = 1, 2, \dots, P$, $D(k)$ дается выражением (26) с $L = L_1$ и

$$D'(k) = \frac{2iu_1 \sin k}{1 - 2u_1 \cos k + u_1^2}, \quad u_1 \equiv u^{L_1}.$$

В области устойчивости ($L_1/2 < R < L_1$), где $D(k) > 0$, выражение под знаком суммы оказывается положительным при всех k , так что $\delta F > 0$ и состояния с $P > 1$ и ν близким к единице всегда имеют более высокий термодинамический потенциал, чем сосуществующие с ними состояния с $P = 1$.

Мы не можем дать строгого доказательства метастабильности состояний с $P > 1$ при любых $\nu < \nu_c$, однако полученные численные результаты позволяют предположить, что все состояния, имеющие разные расстояния между намагниченными слоями,

имеют более высокий потенциал, чем состояния с $P = 1$, где есть лишь одно такое расстояние (L). Последнее означает, что и неперiodические состояния будут метастабильными, так что равновесные термодинамические свойства рассматриваемой модели будут определяться лишь состояниями с $P = 1$ (по крайней мере в окрестности перехода). Далее мы рассмотрим равновесную термодинамику и фазовые переходы в данной модели в рамках такого предположения.

6. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ БЕСПОРЯДКА

Условие устойчивости состояний с $P = 1$ (32), представленное в виде $R < L < 2R$, показывает, что при каждом $R > 1$ существует несколько устойчивых состояний, и чтобы определить, какое из них определяет равновесные свойства системы, нужно найти среди них имеющее наименьший потенциал (33). Рассматривая потенциал как непрерывную функцию L , найдем, что он имеет минимум при

$$L_c = \lambda R, \quad \lambda \approx 1.471,$$

так что искомое состояние имеет L , ближайшее к L_c . При

$$R_L = \lambda^{-1}(L + 1/2), \quad L > 1,$$

имеются два ближайших и равноудаленных от L_c значения (L и $L + 1$), так что при этих R_L имеют место фазовые переходы первого рода, при которых расстояние между намагниченными слоями меняется скачкообразно (на единицу). При $R = 1$ также имеет место фазовый переход между состояниями с $L = 1$ (где каждый слой намагничен) и $L = 2$, причем эта точка является границей устойчивости обеих этих фаз.

Таким образом, эволюция кристалла с ростом беспорядка (ростом u или R) происходит через бесконечную серию фазовых переходов, сопровождающихся скачкообразными изменениями расстояния между намагниченными слоями и термодинамических параметров, определяющих состояние кристалла. Получить равновесные значения этих параметров можно, подставив в (27), (29), (33) значения L , соответствующие состоянию с наименьшей величиной потенциала,

$$L_{eq}(R) = \vartheta(1.5 - R) [1 + \vartheta(R - 1)] + \vartheta(R - 1.5) \times \sum_{L=2}^{\infty} L \vartheta [1 - 4(\lambda R - L)^2],$$

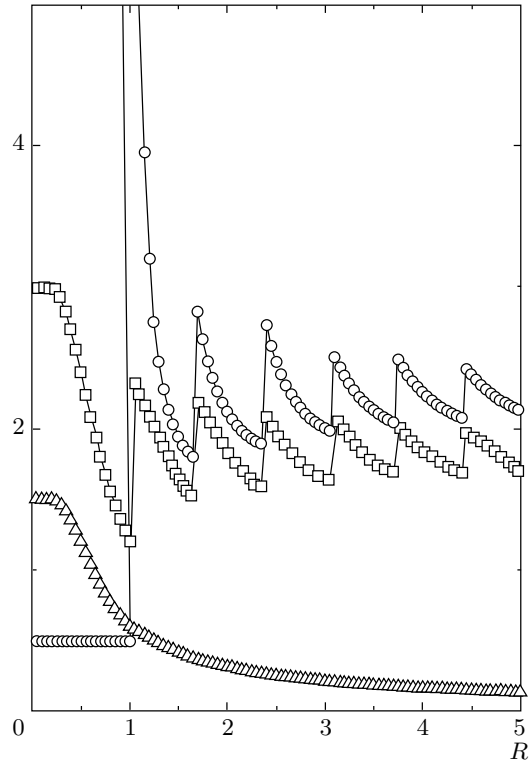


Рис. 2. Зависимости q_{eq} (квадраты), $|\tau|/\beta\chi_{eq}$ (кружки) и δC (треугольники) от эффективного радиуса взаимодействия R . Скачки первых двух величин соответствуют фазовым переходам между состояниями с различающимися на единицу интервалами между намагниченными слоями

что дает

$$q_{eq}(R) = 3 \frac{1 - 5^{-L_{eq}(R)/R}}{1 + 5^{1-L_{eq}(R)/R}},$$

$$\beta\chi_{eq}(R) = \left(1 + 2\vartheta(R - 1.5) \sum_{s=1}^{L_{eq}(R)-1} E_{s,eq}^{-1} \right) \times (2|\tau|L_{eq}(R))^{-1}.$$

Напомним, что параметр $q_{eq}(R)$ определяет величину спонтанной намагниченности слоев, $m_{eq}(R) = \sqrt{|\tau|q_{eq}(R)}$. Поведение $q_{eq}(R)$ и равновесной однородной восприимчивости представлено на рис. 2.

Дифференцируя по температуре равновесный потенциал, получим магнитный вклад в теплоемкость кристалла, появляющийся при $\tau < 0$ ($T < J$),

$$\delta C = q_{eq}(R)/2L_{eq}(R).$$

Эта величина не претерпевает скачкообразного изменения при переходах, так как она пропорциональна термодинамическому потенциалу, см. рис. 2.

Следует подчеркнуть, что полученные равновесные термодинамические параметры одинаковы для всех $2^{[N/L]}$ состояний, которые различаются ориентацией намагниченностей слоев, тогда как полная намагниченность кристалла, очевидно, будет разной в этих состояниях. Она будет определяться тем инфинитезимальным неоднородным полем, которое присутствует в момент перехода и выбирает из всего множества состояний то, в котором $h_n \mu_n > 0$ для всех n . При этом подавляющее число состояний (в соответствующих полях) будет иметь полную намагниченность

$$m = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{N}$$

равную или очень близкую к нулю. Действительно, число состояний с заданным значением полной намагниченности

$$N_m = \binom{[N/L]}{[N/L](1-m)/2} \approx 2^{[N/L]} \times \exp \left\{ -\frac{[N/L]}{2} [(1+m) \ln(1+m) + (1-m) \ln(1-m)] \right\}$$

имеет узкий пик при $m = 0$ с шириной порядка $[N/L]^{-1/2}$.

Полученные результаты могут несколько измениться при рассмотрении более высоких по μ_n степеней потенциала. В первую очередь это относится к окрестности точки $R = 1$, являющейся границей устойчивости соседних состояний. В этой точке обе соседние фазы неустойчивы относительно перехода в фазу с $L = 2$ типа (μ_1, μ_2) , которая отсутствует в принятом приближении. Учет высших степеней приведет либо к появлению узкого (порядка τ) интервала существования такой фазы с точками переходов второго рода на его границах, либо к перекрытию областей устойчивости фаз с $L = 1$ и $L = 2$ [9]. Кроме того, в окрестности других точек переходов состояния с $P > 1$ могут стать стабильными, что приведет к расщеплению переходов на несколько переходов первого рода с промежуточными фазами с длинным периодом. Все это, однако, не меняет основного вывода о существовании бесконечной серии фазовых переходов, происходящих при изменении случайного межслоевого обмена.

Отметим также, что в данной модели в непосредственной близости к переходу имеют место характерные для обычного эффективнопольевого ферромагнетика температурные зависимости однородной

намагниченности и восприимчивости. Это связано с отсутствием беспорядка внутри слоев, претерпевающих обычные ферромагнитные переходы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты дают, по крайней мере, качественную картину магнитной структуры и термодинамических свойств слоистых изинговских ферромагнетиков при наличии случайного межслоевого обмена. В отличие от рассмотренного случая, реально всегда имеется некоторое среднее межслоевое взаимодействие. Оно приведет к некоторому расщеплению потенциалов вырожденных стекольных состояний, однако рост флуктуаций межслоевого обмена по-прежнему может приводить к изменениям магнитной структуры, сходным с описанными выше. Исследование такой более реалистической ситуации может быть выполнено, исходя из полученных здесь результатов. Качественно наличие множества слабо-вырожденных метастабильных состояний с различными полными намагниченностями должно приводить к неэргодичности кристалла, проявляющейся в различии параметров при различных режимах охлаждения (в поле и в отсутствие поля), специфической форме петель гистерезиса и долговременной релаксации, что и наблюдается во многих слоистых кристаллах [1–6].

Следует также отметить, что вывод о существовании множества стекольных фаз, соответствующих различной величине параметра u , и фазовых переходах между ними, означает, что эти переходы могут наблюдаться не только при изменениях величины беспорядка, но и при изменениях температуры вдали от перехода, так как u растет с ростом температуры. Вероятно, обнаруженные в работе [7] температурные осцилляции намагниченности являются признаком таких переходов. По-видимому, аналогичная, но более сложная ситуация может иметь место и в случае трехмерного спинового стекла, где предполагается непрерывное изменение магнитной структуры при изменении температуры [10].

Необходимо также отметить, что рассматриваемая модель представляет собой промежуточный вариант между эффективнопольевой моделью спинового стекла Шеррингтона – Киркпатрика и моделью Эдвардса – Андерсона с короткодействием [8]. Она позволяет впервые явно установить существование и определить термодинамические свойства большого числа метастабильных состояний, что в упомянутых моделях до сих пор сделать не удалось [8] — имеются

лишь оценки числа таких состояний в модели Шеррингтона–Киркпатрика [11] и феноменологическое их описание в модели Эдвардса–Андерсона [12]. Трудно сказать, в какой мере появление метастабильных состояний связано с наличием в системе дальнедействующих взаимодействий (см., однако, обсуждение в работе [13]). Можно лишь предположить, основываясь на экспериментальных свидетельствах их присутствия в реальных неупорядоченных магнетиках с диполь-дипольным и магнитоупругим взаимодействием, что достаточно медленно убывающее взаимодействие заведомо обеспечивает их появление. Во всяком случае, модели спиновых стекол без метастабильных состояний вряд ли смогут описать присущие им неэргодические явления.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-16228). Автор весьма признателен В. П. Сахненко, В. И. Торгашеву, В. Б. Широкову, М. П. Ивлиеву и Е. И. Гутлянскому за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Lewis, B. D. Gaulin, L. Filion et al., Phys. Rev. B **72**, 014408 (2005).
2. T. Nachtrab, C. Bernhard, C. Lin et al., E-print archives, cond-mat/0508044.
3. P. Zhou, J. E. Drumheller, B. Patyal et al., Phys. Rev. B **45**, 12365 (1992).
4. T. Motohashi, V. Caignaert, V. Pralong et al., Appl. Phys. Lett. **86**, 192504 (2005).
5. T. Motohashi, V. Caignaert, V. Pralong et al., Phys. Rev. B **71**, 214424 (2005).
6. A. Bajpai and A. Banerjee Phys. Rev. B **55**, 12439 (1997).
7. B. Berche, P. E. Berche, F. Igloi et al., J. Phys. A **31**, 5193 (1998).
8. N. Kawashima and H. Rieger, E-print archives, cond-mat/0312432.
9. Ю. М. Гуфан, В. П. Сахненко, ЖЭТФ **69**, 1428 (1975).
10. A. J. Bray and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **58**, 57 (1987).
11. A. J. Bray and M. A. Moore, J. Phys. C **13**, L469 (1980); T. Aspelmeier, A. J. Bray, and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **92**, 087203 (2004).
12. П. Н. Тимонин, ЖЭТФ **119**, 1198 (2001).
13. O. L. White and D. S. Fisher, E-print archives, cond-mat/0412335.