

ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ДВУХФАЗНЫХ ДВУМЕРНЫХ СРЕД ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

*В. Е. Архинчев**

*Бурятский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук
670047, Улан-Удэ, Россия*

Поступила в редакцию 29 ноября 2001 г.

Рассмотрена задача протекания тока в двоякопериодических двумерных средах, элементарная ячейка которых представляет собой параллелограмм. Найдены локальные распределения токов (полей) и вычислена эффективная проводимость таких сред при равных концентрациях фаз. Установлена зависимость проводимости от угла параллелограмма. Показано, что в средах типа металл–диэлектрик она носит пологовый характер.

PACS: 72.80.Ng, 41.20.Cv, 81.90.+c

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в работах Дыхне [1] была установлена инвариантность двумерных уравнений постоянного тока относительно линейных преобразований поворота и как следствие было получено выражение для эффективной проводимости

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (1)$$

где σ_i ($i = 1, 2$) — проводимости фаз. Это выражение справедливо как для случайного, так и для двоякопериодического расположения («шахматная доска») фаз. Для случая шахматной доски этот результат был получен позже методом конформных преобразований, где было также установлено и локальное распределение токов (полей) [2, 3]. Недавно этот результат был получен иным методом [4].

Целью настоящей работы является нахождение распределений локальных токов и вычисление эффективной проводимости двухфазных двоякопериодических сред. В качестве исходной модели рассмотрена периодическая структура, элементарная ячейка которой состоит из двух смежных равных параллелограммов (рис. 1). Вследствие симметрии задачи картина полей периодически повторяется, поэтому достаточно найти распределение в элементарной ячейке, состоящей из двух параллелограммов

с различными проводимостями. Поясним алгоритм решения задачи. Следуя работам [2, 3], с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца построим отображение смежных параллелограммов на нижнюю и верхнюю полуплоскости. Затем полученная краевая задача в матричном виде преобразуется к системе уравнений для скалярных задач Римана. Решения скалярных задач находятся стандартным способом. Делая обратные преобразования, найдем локальные распределения полей и токов. Проведя необходимые усреднения, получим окончательно общее выражение для эффективной проводимости, зависящее как от проводимостей фаз, так и от геометрии элементарной ячейки — угла параллелограмма. В случае

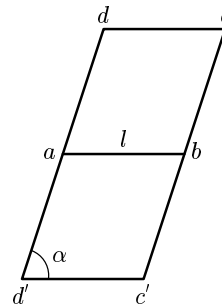


Рис. 1. Двухцветная двоякопериодическая структура с ячейкой, образованной параллелограммами

* E-mail: varkhin@bsc.buryatia.ru

квадратных ячеек формула переходит в известный результат Дыхне (1). В предельных случаях слоистых сред, образованных одномерными линиями, получаются известные выражения для слоистых сред. Наиболее интересным представляется ступенчатая зависимость эффективной проводимости от угла параллелограмма для среды металл–диэлектрик.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 введено комплексное представление для двумерной задачи проводимости. В разд. 3 построено конформное отображение для смежных параллелограммов элементарной ячейки на нижнюю и верхнюю полуплоскости. В разд. 4 сформулирована краевая задача Римана и получены решения для скалярных задач с заданными граничными условиями. В разд. 5 выведено общее выражение для эффективной проводимости среды и проанализированы предельные случаи.

2. КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрим двухцветную структуру с элементарной ячейкой из равносторонних смежных параллелограммов, имеющих различные проводимости. Обозначим физические величины в соответствующих фазах индексами 1 и 2. Распределение электрических полей (токов) описывается системой уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{e} \quad (2)$$

с граничными условиями непрерывности нормальных компонент тока и тангенциальных составляющих электрического поля:

$$j_n^{(1)} = j_n^{(2)}, \quad e_t^{(1)} = e_t^{(2)}. \quad (3)$$

Для решения задачи методами теории функций комплексного переменного перейдем в плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ и введем комплексные значения плотности тока и напряженности электрического поля:

$$j^{(k)}(z) = j_x^{(k)}(x, y) - i j_y^{(k)}(x, y), \quad (4)$$

$$E^{(k)}(z) = E_x^{(k)}(x, y) - i E_y^{(k)}(x, y), \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Как известно, такое представление справедливо для функций, удовлетворяющих условиям Коши–Римана. В нашем случае это возможно, поскольку проводимость среды изменяется дискретно, принимая

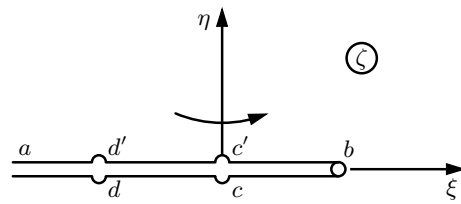


Рис. 2. Соответствие между точками при конформном отображении параллелограммов на полуплоскости

постоянные значения σ_i ($i = 1, 2$) в соответствующих ячейках. При этом уравнения постоянного тока в двумерном случае совпадают с уравнениями Коши–Римана. Действительно, уравнение непрерывности тока дает одно из этих условий:

$$\frac{\partial j_x^{(k)}}{\partial x} = -\frac{\partial j_y^{(k)}}{\partial y}, \quad (6)$$

а второе следует из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$, которое для ячеек с постоянным значением σ эквивалентно уравнению $\operatorname{rot} \mathbf{j} = 0$:

$$\frac{\partial j_x^{(k)}}{\partial y} = \frac{\partial j_y^{(k)}}{\partial x}. \quad (7)$$

Аналогично, уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ (следующее из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$) приводят к условиям Коши–Римана для электрического поля. Закон Ома в комплексной форме записывается в том же виде:

$$j(z) = \sigma E(z). \quad (8)$$

3. КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ПЛОСКОСТЬ ζ

Построим конформное отображение внутренних областей смежных параллелограммов на нижнюю и верхнюю полуплоскости. В случае двоякопериодических сред, образованных параллелограммами, это делается с помощью функции Вейерштрасса $w = \Pi(z)$ (см., например, [5]). При этом параллелограмм $abcd$ переходит в нижнюю полуплоскость, а параллелограмм $abc'd'$ — в верхнюю с разрезом по оси $\eta = 0$. Соответствие точек преобразования показано на рис. 2. В нашем случае

$$b = \Pi(l), \quad c = \Pi(l(1 - \cos \alpha) + il \sin \alpha),$$

$$d = \Pi(-l \cos \alpha + il \sin \alpha),$$

$$\omega_1 = l, \quad \omega_2 = -l \cos \alpha + il \sin \alpha,$$

где ω_1 и ω_2 — периоды дwoякопериодической функции Вейерштрасса.

В частном случае квадратов получается лемнискатический случай:

$$b = \Pi(l), \quad c = \Pi(l + il), \quad d = \Pi(il).$$

4. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Граничные условия в плоскости ζ в обозначениях комплексного тока

$$j^{(k)}(\zeta) = j_{\xi}^{(k)}(\xi, \eta) - i j_{\eta}^{(k)}(\xi, \eta)$$

сохраняются и имеют следующий вид на различных частях оси ξ :

$$\begin{aligned} j_1 - \bar{j}_1 &= j_2 - \bar{j}_2, \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(j_1 + \bar{j}_1) &= j_2 + \bar{j}_2 \end{aligned} \quad (9)$$

на отрезках $[ab]$, $[cd]$, $[c'd']$ (здесь черта над функцией обозначает комплексное сопряжение) и

$$\begin{aligned} j_1 + \bar{j}_1 - i(j_1 - \bar{j}_1) \operatorname{ctg} \alpha &= \\ = j_2 + \bar{j}_2 - i(j_2 - \bar{j}_2) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}[(j_1 + \bar{j}_1) \operatorname{ctg} \alpha - i(j_1 - \bar{j}_1)] &= \\ = (j_2 + \bar{j}_2) \operatorname{ctg} \alpha - i(j_2 - \bar{j}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

на отрезках $[bc]$, $[ad]$, $[bc']$, $[ad']$.

Таким образом, исходные граничные условия сведены к трехэлементной краевой задаче Римана относительно кусочно-аналитической функции $j(\zeta)$. Коэффициенты задачи имеют разрывы на оси ξ в точках b, c, d . Для решения задачи составим эквивалентную задачу для двух пар функций. Как следует из системы уравнений, задающих граничные условия, в задаче возникают четыре неизвестных величины: j_k и \bar{j}_k , $k = 1, 2$. В соответствие с [2], выразим граничные значения величин j_2 и \bar{j}_1 как функции j_1 и \bar{j}_2 . Введем кусочно-непрерывную аналитическую вектор-функцию

$$\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} j_2(\zeta) \\ \bar{j}_1(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Введенная функция удовлетворяет условию симметрии:

$$\Phi(\bar{\zeta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi(\zeta).$$

На оси ξ она принимает следующие значения:

$$\Phi^+(\xi) = \begin{pmatrix} j_2(\xi) \\ \bar{j}_1(\xi) \end{pmatrix}$$

и

$$\Phi^-(\xi) = \begin{pmatrix} j_1(\xi) \\ \bar{j}_2(\xi) \end{pmatrix}.$$

В представленном виде граничные условия формулируют краевую задачу Римана в векторно-матричном виде:

$$\Phi^+(\xi) = G_i \Phi^-(\xi), \quad (11)$$

где матрицы G_i имеют следующий вид:

$$G_1 = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{pmatrix} 2\sigma_2 & -(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \sigma_1 - \sigma_2 & 2\sigma_1 \end{pmatrix}$$

на интервале $[ab]$ и

$$G_2 = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \times \begin{pmatrix} 2\sigma_2 & -(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha + i}{\operatorname{ctg} \alpha - i} \\ (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\operatorname{ctg} \alpha - i}{\operatorname{ctg} \alpha + i} & 2\sigma_1 \end{pmatrix}$$

на интервале $[bc]$.

Решение матричной задачи строится путем сведения к двум независимым скалярным задачам Римана. Для этого необходимо упростить краевые условия и провести диагонализацию матриц граничных условий G_i . С этой целью введем новую кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(\zeta) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\zeta) \\ \Psi_2(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Введенная функция связана с исходной вектор-функцией $\Phi(\zeta)$ соотношением

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} \Phi(\zeta), & \operatorname{Im} \zeta > 0, \\ M\Phi(\zeta), & \operatorname{Im} \zeta < 0. \end{cases}$$

Пусть матрица M совпадает с матрицей граничных условий G_3 на оси $(a_3 a_1)$. Тогда на этой оси краевая задача примет вид

$$\Psi^+(\xi) = \Psi^-(\xi).$$

Следовательно, на этом промежутке функцию можно аналитически продолжить из одной полуплоскости в другую. На оставшейся части действительной оси граничные условия примут вид

$$\Psi^+(\xi) = G_k M^{-1} \Psi^-(\xi). \quad (12)$$

Здесь $G = G_1$ на отрезке $[a_1a_2]$ и $G = G_2$ на отрезке $[a_2a_3]$. Дальнейшее упрощение состоит в диагонализации получившихся матриц граничных условий (12). Для этого введем еще одну функцию $F(\zeta)$ соотношением

$$\Psi(\zeta) = SF(\zeta). \quad (13)$$

Тогда краевая задача примет вид

$$F^+(\xi) = S^{-1}G_kM^{-1}SF^-(\xi). \quad (14)$$

Матрица S подбирается таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$(\lambda E - G_iM^{-1})S = 0,$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_2[a - i(\sigma_1 - \sigma_2)]}{4\sigma_1\sigma_2 + i[\text{ctg } \alpha(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - a(\sigma_1 - \sigma_2)]} & \frac{4\sigma_1\sigma_2 + i[\text{ctg } \alpha(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + a(\sigma_1 - \sigma_2)]}{2\sigma_2[a + i(\sigma_1 - \sigma_2)]} \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

В результате получим систему независимых краевых задач:

$$F_1^+(\xi) = \lambda_1 F_1^-(\xi), \quad F_2^+(\xi) = \lambda_2 F_2^-(\xi). \quad (16)$$

Далее решение строится стандартным образом с использованием теории скалярной задачи Римана [6] и имеет вид

$$F_1(\zeta) = C_1X(\zeta), \quad F_2(\zeta) = C_2X^{-1}(\zeta), \\ X(\zeta) = \frac{(\zeta - e_1)^\gamma(\zeta - e_3)^\gamma}{\zeta^\gamma}. \quad (17)$$

Здесь $\gamma = (\sigma_2 - \sigma_1)/a$.

Нетрудно видеть, что в частном случае квадратов полученные выражения переходят в известные формулы, выведенные в работе [2].

Возвращаясь к исходной вектор-функции и определяя должным образом фазы у коэффициентов C_1, C_2 (см. [2]), получаем выражения для распределения токов:

$$j_1 = \exp\left[\frac{i(\alpha - \gamma)}{2}\right] |C_1|X(z) + \\ + \exp\left[-\frac{i(\alpha - \gamma)}{2}\right] |C_2|X^{-1}(z) \\ j_2 = A \exp\left[\frac{i(\alpha + \gamma)}{2}\right] |C_1|X(z) + \\ + B \exp\left[-\frac{i(\alpha + \gamma)}{2}\right] |C_2|X^{-1}(z). \quad (18)$$

Здесь

$$A = \frac{2\sigma_2\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha}}{a - \text{ctg } \alpha(\sigma_1 - \sigma_2)}, \quad B = \frac{2\sigma_2\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha}}{a + \text{ctg } \alpha(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

где E — единичная матрица, а λ — собственные значения характеристического уравнения

$$\det |\lambda E - G_iM^{-1}| = 0.$$

После необходимых вычислений получим значения корней уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{a + i(\sigma_1 - \sigma_2)}{a - i(\sigma_1 - \sigma_2)}, \quad \lambda_2 = \frac{a - i(\sigma_1 - \sigma_2)}{a + i(\sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (15)$$

Здесь $a^2 = 4\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \text{ctg}^2 \alpha$. Искомая матрица S находится из вычислений собственных векторов и равна

— постоянные величины. Модули $|C_i|$ определяются заданием внешнего тока.

Таким образом, получим следующие соотношения между средними величинами токов и полей:

$$\langle j_2 \rangle = A \langle j_1 \rangle, \quad \langle e_2 \rangle = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} A \langle e_1 \rangle. \quad (19)$$

Здесь учтено, что при усреднении по площадям ячеек средние величины различаются на фазу $\exp(-i\pi\gamma)$.

5. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Используя полученные выше результаты, найдем выражение для эффективной проводимости исследуемой среды:

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 \left[\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \text{ctg}^2 \alpha + 4\sigma_1\sigma_2} - \text{ctg } \alpha(\sigma_1 - \sigma_2) + 2\sigma_2\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} \right] \times \\ \times \left[\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \text{ctg}^2 \alpha + 4\sigma_1\sigma_2} - \text{ctg } \alpha(\sigma_1 - \sigma_2) + 2\sigma_1\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \alpha} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Полученное выражение достаточно громоздко. Поэтому исследуем предельные случаи, следующие из полученной формулы.

1. Пусть $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ ($\alpha = \pi/2$). Тогда выражение для проводимости переходит в известную формулу Дыхне:

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (21)$$

2. В случае $\operatorname{ctg} \alpha = +\infty$ ($\alpha = 0$) получим предельный случай слоистой среды, когда усредняется сопротивление:

$$\sigma_{eff} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (22)$$

Этот результат легко понять, поскольку при угле параллелограмма, стремящемся к нулю, получается среда, состоящая из одномерных линий, которые составлены из чередующихся отрезков с проводимостями σ_1 и σ_2 .

3. При $\operatorname{ctg} \alpha = -\infty$ ($\alpha = \pi/2$) получим другой предельный случай слоистой среды, когда усредняется электрическое поле:

$$\sigma_{eff} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2. \quad (23)$$

В этом случае среда образуется чередованием проводящих одномерных однородных нитей со своими проводимостями.

Полученные предельные результаты, а именно, угловую зависимость эффективной проводимости, можно пояснить также следующим образом. Если проводимости фаз сильно различаются по своим свойствам, то ток в основном течет по хорошо проводящей фазе и перетекание тока из одной фазы в другую происходит вблизи контакта фаз по узкому перешейку. При малых углах ячеек хорошо проводящей фазы плотность тока возрастает и, соответственно, сопротивление хорошо проводящих участков увеличивается настолько, что становится более выгодным протекание через плохо проводящие участки — увеличивается площадь перешейков. Это соответствует последовательному включению сопротивлений, (см. (22)).

Напротив, при возрастании угла ячеек область перешейков, по которым течет ток по плохо проводящей фазе, уменьшается и при достаточно больших углах влияние плохо проводящей фазы становится несущественным. В этом случае проводимость описывается выражением (23).

4. Наиболее интересным представляется ступенчатая зависимость эффективной проводимости от угла ячейки в случае, когда одна из фаз является диэлектриком:

$$\sigma_{eff} = \begin{cases} 0, & \alpha < \pi/2, \\ \sigma_1/2, & \alpha \geq \pi/2. \end{cases}$$

Этот результат следует из полученных выше формул. При малых углах ячейки и вплоть до прямого угла $\pi/2$, т. е. при «остром» контакте одноцветных проводящих параллелограммов, плотность тока такова, что для перетекания из одной ячейки в другую с одной и той же проводимостью необходимо задействовать включения другой проводящей фазы. Так как проводимость этой фазы равна нулю (диэлектрик), то и эффективная проводимость системы равна нулю. В случае широких контактов, соответствующих тупому углу параллелограммов, ток может перетекать из одной фазы в другую, практически не задействуя другую фазу. Поэтому эффективная проводимость среды отлична от нуля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-02-17355) и по гранту 6-го конкурса-экспертизы молодых ученых РАН.

Автор выражает благодарность А. М. Дыхне за предварительное интересное обсуждение результатов.

Автор выражает благодарность за гостеприимство институту Abdus Salam ICTP, Trieste, Italy, где были частично получены результаты настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110, 641 (1970).
2. Ю. П. Емец, *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*, Наукова думка, Киев (1986).
3. Ю. П. Емец, ЖЭТФ **96**, 701 (1989).
4. Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **118**, 1333 (2000).
5. А. М. Маркушевич, *Краткий курс теории аналитических функций*, Наука, Москва (1978).
6. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1973).