

СНЯТИЕ ОДНОАТОМНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ КВАНТОВЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

А. В. Козловский*, А. Н. Ораевский†

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117924, Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 декабря 1998 г.

Исследована динамика квантостатистических свойств излучения атома в резонаторе, взаимодействующего с внешним когерентным полем. Показано, что высокий уровень квантовых флуктуаций поля в резонаторе разрушает эффект оптической бистабильности, присутствующий в многоатомном случае. Рассчитаны флуктуации числа фотонов и спектральная дисперсия канонически-сопряженных квадратур поля внутри и вне резонатора. Обнаружено, что квадратурное сжатие и сжатие интенсивности излучения одного атома незначительно как внутри, так и вне резонатора в отличие от многоатомного случая.

1. ВВЕДЕНИЕ

Излучение активной среды двухуровневых атомов, находящихся в оптическом резонаторе, под действием внешнего когерентного поля проявляет свойство бистабильности при определенных соотношениях между скоростями диссипации, отстройкой частот и величиной внешнего поля. Микроскопическая квантовая теория этого явления показывает, что излучение в условиях бистабильности может находиться в неклассическом квадратурно-сжатом состоянии [1–12]. В работах [1–3] обнаружено, что в многоатомном случае ($N_{at} \gg 1$) сжатие внутри резонатора может достигать 50% на нижней устойчивой ветви. Анализ сжатия излучения, выходящего из резонатора, показал, что его величина может достигать 90% [4–12].

Авторами работ [13, 14] исследовано явление бистабильности в случае одного атома в резонаторе. Полученное в указанных работах уравнение Фоккера—Планка для полевых и атомных переменных в рамках линейного приближения по флуктуациям поля позволило сделать вывод о наличии бистабильности в случае, если скорость γ потерь резонатора много больше скорости Γ спонтанного распада уровней: $\gamma \gg \Gamma$, и об отсутствии бистабильности при $\gamma < \Gamma$. Наличие флуктуаций вблизи точек поворота в последнем случае разрушает оптическую бистабильность в приближении малых флуктуаций [15].

В настоящей статье нами проведен анализ динамики квантостатистических свойств излучения атома в области оптической бистабильности. В рамках метода приведенного оператора плотности системы «атом + поле» в базисе фоковских состояний поля используемая теория справедлива при любых возможных соотношениях между

*E-mail: kozlovsky@neur.lpi.msk.su

†E-mail: oraevsky@sci.lebedev.ru

значениями параметров, характеризующих процессы когерентной накачки и диссипации, моделируемых с помощью соответствующих резервуаров, взаимодействующих с атомом и полем излучения. Отметим, что проводимые нами исследования динамики поля и статистических свойств излучения не предполагают использование приближения малых флуктуаций, в рамках которого обычно принимается линейное по флуктуациям приближение. Проведен анализ статистических свойств поля как внутри, так и вне резонатора.

2. МОДЕЛЬ ОПТИЧЕСКОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ

Гамильтониан системы «атом + поле + резервуар» включает в себя энергию H_F дискретной моды электромагнитного поля внутри резонатора, энергию H_A двухуровневого атома, взаимодействие V_{A-F} атома с полем, энергию R_F резервуара непрерывного спектра тепловых мод поля (термостат), взаимодействие V_{A-R} атома с резервуаром термостата, взаимодействие V_{F-R} поля резонатора с термостатом и взаимодействие V_{F-I} осциллятора поля внутри резонатора с внешним когерентным полем $\mathcal{E} = Ee^{-i\omega_0 t}$, $E = \sqrt{\bar{n}_I} e^{i\phi_I}$ [1-15]:

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar} = & \frac{1}{\hbar} (H_F + H_A + V_{A-F} + R_F + V_{A-R} + V_{F-R} + V_{F-I}) = \omega_c a^+ a + \frac{1}{2} \omega_A \sigma^z + g (a^+ \sigma^- + \sigma^+ a) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j b_j^+ b_j + \sum_{j=1}^{\infty} g_j (b_j^+ \sigma^- + b_j \sigma^+) + \sum_{j=1}^{\infty} k_j (a^+ b_j + b_j^+ a) + (a^+ \mathcal{E} + \mathcal{E} a). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь a (a^+) — операторы уничтожения (рождения) электромагнитного поля дискретной моды резонатора с частотой ω_c ; b_j (b_j^+) — операторы уничтожения (рождения) резервуара непрерывного спектра тепловых мод поля, присутствующих внутри резонатора вследствие частичной прозрачности зеркал. Указанные операторы подчиняются перестановочным соотношениям для бозе-частиц:

$$\begin{aligned} [a, a^+] = 1, \quad [a^+, a^+] = [a, a] = 0, \\ [b_j, b_i^+] = \delta_{ji}, \quad [b_j^+, b_i^+] = [b_j, b_i] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Входящее в (1) взаимодействие поля излучения лазера с модами $\{b_j\}$ резервуара, ответственно за установление термодинамического равновесия моды резонатора с поступающим через зеркала полем резервуара-термостата со средним числом фотонов в моде [16]

$$n_T \equiv \bar{n}(\omega = \omega_c, T) = [\exp(\hbar\omega_c/kT) - 1]^{-1}. \quad (3)$$

Атомные операторы поляризации (σ^- , σ^+) и инверсии σ^z населенностей двухуровневого атома,

$$\sigma^- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \sigma^+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \quad \sigma^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad (4)$$

удовлетворяют следующим соотношениям:

$$2\sigma^\mp\sigma^\pm = 1 \mp \sigma^z, \quad \sigma^z\sigma^z = 1, \quad (5)$$

а также перестановочным соотношениям для ферми-частиц:

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1, \quad \{\sigma^+, \sigma^+\} = \{\sigma^-, \sigma^-\} = 0. \quad (6)$$

В (4), (6) $|\downarrow\rangle$ и $|\uparrow\rangle$ — нижнее и верхнее энергетические состояния активного электрона, $\{\dots\}$ — антикоммутиатор.

Взаимодействия атомного электрона с полем гармонических осцилляторов термостата, $\{b_j\}$, обеспечивает установление теплового равновесия квантовых средних атомных операторов с температурой T .

Взаимодействие поля излучения с поляризацией атома пропорционально константе взаимодействия g , характеризуемой дипольным моментом $d_{\uparrow\downarrow}$ перехода и объемом V резонатора:

$$g = d_{\uparrow\downarrow} \sqrt{\frac{2\pi\omega_A}{\hbar V}}, \quad (7)$$

где ω_A — частота атомного перехода. Подобным образом определяются константы g_j взаимодействия поля термостата с атомным электроном. Параметр k_j , входящий в оператор V_{F-R} , представляет собой константу взаимодействия мод термостата с модой резонатора.

Квантовую стохастическую динамику двухуровневого одноатомного лазера будем анализировать с помощью приведенного оператора плотности системы атом + одномодовое поле в базисе фоковых состояний следующего вида:

$$\rho(t) = \sum_{i,j=\{\uparrow,\downarrow\}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,i;m,j}(t) |i\rangle\langle n| \langle m| \langle j|. \quad (8)$$

В представлении взаимодействия и приближении Борна—Маркова [16] приведенный оператор (8) плотности системы «атом + поле», взаимодействующей с резервуаром, удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \text{Sp}_R(\sigma_{R\oplus S}) = -i\frac{\Delta_A}{2}[\sigma^z, \rho] - i\Delta_C[a^+a, \rho] - ig[(a^+\sigma^- + \sigma^+a), \rho] + \\ & + \frac{\gamma}{2}(n_T + 1)(2a\rho a^+ - a^+a\rho - \rho a^+a) + \frac{\gamma}{2}n_T(2a^+\rho a - aa^+\rho - \rho aa^+) + \\ & + \frac{\Gamma}{2}(N_T + 1)(2\sigma^-\rho\sigma^+ - \sigma^+\sigma^-\rho - \rho\sigma^+\sigma^-) + \frac{\Gamma}{2}N_T(2\sigma^+\rho\sigma^- - \sigma^-\sigma^+\rho - \rho\sigma^-\sigma^+) - \\ & - i[E(a^+\rho - \rho a^+) + E^*(a\rho - \rho a)], \end{aligned} \quad (9)$$

где отстройки частоты внешнего поля ω_0 от атомной частоты ω_A и частоты осциллятора ω_c есть $\Delta_A = \omega_A - \omega_0$, $\Delta_c = \omega_c - \omega_0$; величины γ и Γ — соответственно скорость потерь поля на зеркалах и скорость спонтанного излучения. Указанные константы диссипации выражаются через корреляторы соответствующих операторов резервуара $\{b_j\}$ (см., например, [16]).

Входящее в уравнение (9) среднее число возбуждений атомного резервуара N_T , в случае нахождения мод резервуара $\{b_j\}$ в термодинамическом равновесии при температуре T , есть (см., например, [16]):

$$N_T \equiv \bar{N}(\omega = \omega_A, T) = \langle b_j^\dagger b_j \rangle_{\omega_j = \omega_A} = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_A}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (10)$$

Поскольку в оптическом диапазоне частот $\hbar\omega_A, \hbar\omega_c \gg kT$, далее в расчетах мы будем пренебрегать величинами n_T и N_T .

Используя соответствие между квантовомеханическими операторами и c -числовыми переменными, из уравнения Лиувилля (9) можно получить обобщенное уравнение Фоккера—Планка для функции распределения квазивероятностей [3, 13, 14, 17], соответствующей оператору плотности. В свою очередь, получаемое таким образом уравнение Фоккера—Планка эквивалентно системе ланжевеновских стохастических дифференциальных уравнений движения для c -числовых переменных поля и атома. Решение указанной системы уравнений при стационарных условиях позволяет получить соотношение между интенсивностью внешнего поля и квантовомеханическим средним интенсивности поля внутри резонатора (уравнение состояния). Вследствие нелинейности взаимодействия атома с полем в двухуровневой модели атома стационарное уравнение состояния имеет следующий вид [1–15]:

$$Y^2 \equiv \left| \frac{2E}{\gamma} \right|^2 \frac{1}{n_s} = X^2 \left[\left(1 + \frac{2C}{1 + X^2 + \delta_A^2} \right)^2 + \left(\delta_c - \frac{2C\delta_A}{1 + X^2 + \delta_A^2} \right)^2 \right], \quad (11)$$

$$X^2 \equiv \frac{\langle a^+ a \rangle}{n_s}, \quad \delta_A = 2 \frac{\omega_A - \omega_0}{\Gamma}, \quad \delta_c = 2 \frac{\omega_c - \omega_0}{\gamma},$$

где введены параметр кооперативности C и число фотонов насыщения n_s :

$$C = \frac{2g^2}{\Gamma\gamma}, \quad n_s = \frac{\Gamma^2}{8g^2}. \quad (12)$$

Соотношение (11) может быть получено также в рамках детерминистической теории с помощью уравнений Максвелла–Блоха [18]. Анализ уравнения состояния (11) показывает, что абсорбционная бистабильность присутствует при $C > 4$, $\delta_A = \delta_c = 0$. Абсорбционно-дисперсионная бистабильность имеет место, если $C^2 > 27\delta_A^2/4$ ($C \gg 1$), $\delta_A \neq 0$, $\delta_c = 0$ или если $C^2 > 27\delta_A^2/4$ и $\delta_c \neq 0$, $\delta_A = 0$, а также если $C > 4|\delta_c\delta_A|$ ($C \gg 1$) при $\delta_c\delta_A < 0$ или $C > 0.5\delta_c\delta_A$ ($C \gg 1$) при $\delta_c\delta_A > 0$.

Для элементов матрицы плотности вида [19, 20]

$$\rho_{1n,m}(t) \equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle + \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, \quad \rho_{2n,m}(t) \equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle - \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, \quad (13)$$

$$\rho_{3n,m}(t) \equiv \langle \uparrow | \rho_{n,m} | \downarrow \rangle, \quad \rho_{4n,m}(t) \equiv \langle \downarrow | \rho_{n,m} | \uparrow \rangle$$

из уравнения Лиувилля (9) следует система связанных дифференциальных уравнений. Используя следующие соотношения для операторов рождения-уничтожения в фоковом базисе:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (14)$$

$$\langle n|a = \sqrt{n+1}\langle n+1|, \quad \langle n|a^+ = \sqrt{n}\langle n-1|,$$

а также

$$\sigma^z \sigma^+ = \sigma^+, \quad \sigma^+ \sigma^z = -\sigma^+, \quad \sigma^- \sigma^z = \sigma^-, \quad (15)$$

применяя (2), (4)–(7), из уравнения Лиувилля (9) непосредственно находим уравнения

движения для элементов матрицы плотности (8) вида (13). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}_{1,n,m} &= ig \left(\sqrt{m+1} \rho_{3,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{3,n-1,m} + \sqrt{m} \rho_{4,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{4,n+1,m} \right) + \\
 &+ \frac{\gamma}{2} L_\gamma \rho_1 + L_E \rho_1, \\
 \dot{\rho}_{2,n,m} &= ig \left(\sqrt{m+1} \rho_{3,n,m+1} + \sqrt{n} \rho_{3,n-1,m} - \sqrt{m} \rho_{4,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{4,n+1,m} \right) + \\
 &+ \frac{\gamma}{2} L_\gamma \rho_2 - \Gamma \rho_{1,n,m} - \Gamma(2N_T + 1) \rho_{2,n,m} + L_E \rho_2, \\
 \dot{\rho}_{3,n,m} &= i\Delta \rho_{3,n,m} + i\frac{g}{2} \left(\sqrt{m} \rho_{1,n,m-1} - \sqrt{n+1} \rho_{1,n+1,m} + \right. \\
 &+ \left. \sqrt{m} \rho_{2,n,m-1} + \sqrt{n+1} \rho_{2,n+1,m} \right) + \frac{\gamma}{2} L_\gamma \rho_3 + L_E \rho_3 - \frac{\Gamma(2N_T + 1)}{2} \rho_{3,n,m}, \\
 \dot{\rho}_{4,n,m} &= i\Delta \rho_{4,n,m} + i\frac{g}{2} \left(\sqrt{m+1} \rho_{1,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{1,n-1,m} - \right. \\
 &- \left. \sqrt{m+1} \rho_{2,n,m+1} - \sqrt{n} \rho_{2,n-1,m} \right) + \frac{\gamma}{2} L_\gamma \rho_4 + L_E \rho_4 - \frac{\Gamma(2N_T + 1)}{2} \rho_{4,n,m},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где общие для всех четырех уравнений члены, обусловленные потерями резонатора через зеркала и взаимодействием поля внутри резонатора с внешним когерентным полем, могут быть записаны в общем виде:

$$\begin{aligned}
 L_\gamma \rho_j &= (n_T + 1) \left[2\sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{j,n+1,m+1} - (m+n) \rho_{j,n,m} \right] + \\
 &+ n_T \left[2\sqrt{nm} \rho_{j,n-1,m-1} - \rho_{j,n,m} (n+m+2) \right], \quad j = 1, 2, 3, 4,
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 L_E \rho_j &= -i \left\{ \left[E\sqrt{n} \rho_{j,n-1,m} - \sqrt{m+1} \rho_{j,n,m+1} \right] + E^* \left[\sqrt{n+1} \rho_{j,n+1,m} - \sqrt{m} \rho_{j,n,m-1} \right] \right\} - \\
 &- i\Delta_c (n-m) \rho_{j,n,m}, \quad j = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Система уравнений (16) размерности $4 \times (n_{max} + 1) \times (n_{max} + 1)$ решалась нами численно методом Рунге—Кутты четвертого порядка (n_{max} — размер фоковского базиса). В общем случае в начальный момент времени поле находилось в произвольном смешанном состоянии, а атом — в нижнем состоянии, таким образом, матрица плотности невзаимодействующих в момент $t = 0$ атома и поля есть

$$\rho(0) = \rho_a \otimes \rho_f, \tag{19}$$

где

$$\rho_a = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \quad \rho_f = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_n c_m^* |n\rangle\langle m|.$$

В частности, если поле в начальный момент времени находится в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, то коэффициенты разложения по фоковским состояниям есть

$$c_n^* c_m = \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \exp(-|\alpha|^2). \tag{20}$$

Если исходное состояние является чистым фоковским состоянием $|n_0\rangle$, то $c_n^* c_m = \delta_{n,m}$. В случае теплового состояния имеем $c_n^* c_m = [n_T^n / (1 + n_T)^{n+1}] \delta_{n,m}$.

Среднее число фотонов, средняя инверсия, флуктуации (дисперсия) фотонов, а также среднее поле с использованием группировки матричных элементов системы вида (13) определяются как

$$\langle n(t) \rangle = \text{Sp} [\rho(t) a^+ a] = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{1n,n}(t), \tag{21}$$

$$\langle D(t) \rangle = \text{Sp} [\rho(t) \sigma^z] = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n,n}(t), \tag{22}$$

$$\text{Var} (n(t)) \equiv \langle (\Delta n(t))^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n(t) \rangle)^2 \rho_{1n,n}(t), \tag{23}$$

$$\langle a^+(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \rho_{1n,n+1}(t), \quad \langle a(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{1n,n-1}(t). \tag{24}$$

Дисперсии сопряженных квадратур $X_+(t) = [a^+(t) + a(t)]/2$ и $X_-(t) = [a^+(t) - a(t)]/2i$ выражаются через матричные элементы оператора плотности:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X_{\pm})^2 \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \rho_{1n,n}(t) \pm \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n(n-1)} \rho_{1n,n-2}(t) \pm \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} \times \right. \\ \left. \times \rho_{1n,n+2}(t) \mp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \rho_{1n,n+1}(t) \pm \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \rho_{1n,n-1}(t) \right]^2 \right\}. \tag{25} \end{aligned}$$

3. ОПТИЧЕСКАЯ БИСТАБИЛЬНОСТЬ И ФЛУКТУАЦИИ ВНУТРИ РЕЗОНАТОРА

В целях исследования влияния квантовых флуктуаций на проявления оптической бистабильности излучения одного атома нами проводились численные расчеты динамики величин (21)–(25). Были рассмотрены случаи высокой добротности резонатора ($\gamma \ll \Gamma$) и случай резонатора с высокими потерями ($\gamma \gg \Gamma$) как для абсорбционной, так и для абсорбционно-дисперсионной бистабильностей. В качестве исходного состояния поля при $t = 0$ использовались состояние когерентного вакуума и когерентное чистое состояние. Численное исследование системы (16) при различных параметрах атома, внешнего поля и резервуара показало, что для стационарного излучения атома оба вида оптической бистабильности, предсказываемые полуклассической теорией [1–12], отсутствуют. Приведенная на рис. 1 зависимость $X(Y)$ для случая чисто абсорбционной бистабильности, полученная в рамках полуклассической теории (выражение (11)), в области бистабильности между верхней (tp_2) и нижней (tp_1) точками поворота, $Y_{tp_2} < Y < Y_{tp_1}$, резко отличается от результатов квантового расчета, проведенного нами. В этой области стационарное решение $X(Y)$ не зависит от начальных условий, т. е. эффект гистерезиса отсутствует, в то время как не учитывающая квантовых флуктуаций

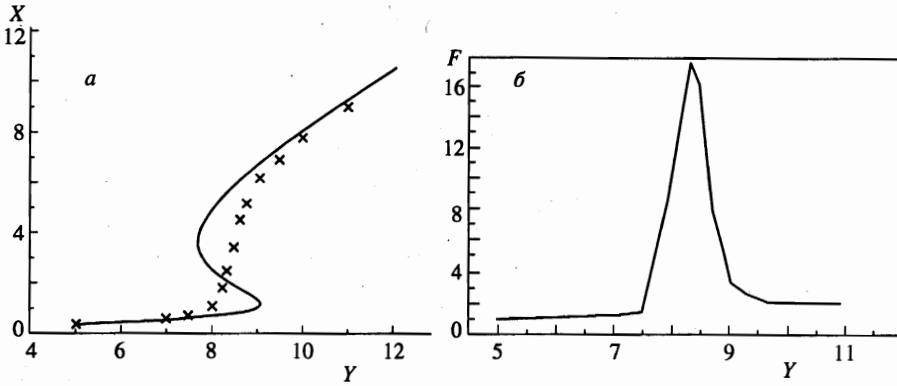


Рис. 1. а) Зависимость безразмерного поля X внутри резонатора от безразмерной амплитуды Y внешнего поля в случае абсорбционной бистабильности: сплошная кривая — полуклассическое уравнение состояния (11); кресты — квантовомеханический расчет: $C = 8$, $n_s = 1$, $\delta_c = \delta_A = 0$. б) Зависимость фактора Фано $F = \text{Var}(n)/\langle n \rangle$ числа фотонов внутри резонатора от безразмерного внешнего поля

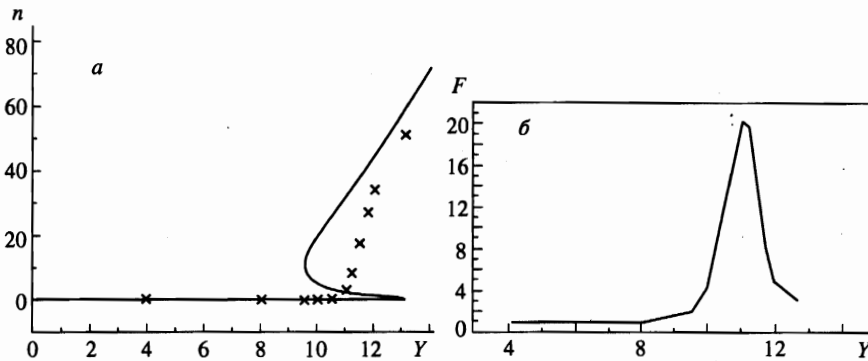


Рис. 2. а) Зависимость среднего стационарного числа фотонов n от безразмерного внешнего поля Y при $C = 12$, $n_s = 0.5$. б) Фактор Фано внутри резонатора при тех же условиях

(или учитывающая их в линейном приближении [13, 14]) теория предсказывает явление бистабильности и гистерезис, т.е. зависимость стационарного состояния поля от начальных условий. На рис. 1б приведена зависимость фактора Фано $F = \text{Var}(n)/\langle n \rangle$ внутри резонатора от величины внешнего поля Y . Из рис. 1б следует, что в области бистабильности имеет место резкий всплеск флуктуаций числа фотонов, разрушающий бистабильность.

Данные, приведенные на рис. 1а, можно сравнить с результатами расчета, проведенного в [14] в адиабатическом по атомным переменным и линейном по флуктуациям приближениях для тех же значений параметров C и n_s (см. рис. 2а из [14]). Сравнение показывает, что приближение малых флуктуаций в случае одноатомной оптической бистабильности неприменимо, по крайней мере, в области $Y_{tp2} < Y < Y_{tp1}$, где флуктуации очень велики (см. рис. 1б). Обнаружено также, что установление стационарного состояния в области полуклассической бистабильности требует значительно большего

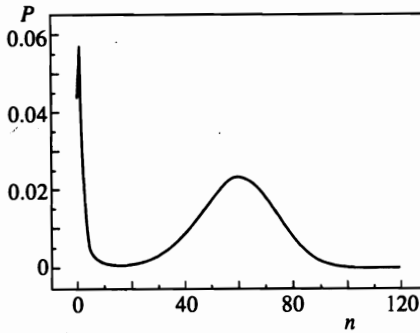


Рис. 3. Функция распределения фотонов в случае абсорбционной бистабильности при $C = 80$, $n_s = 8$, $Y = 8.5$

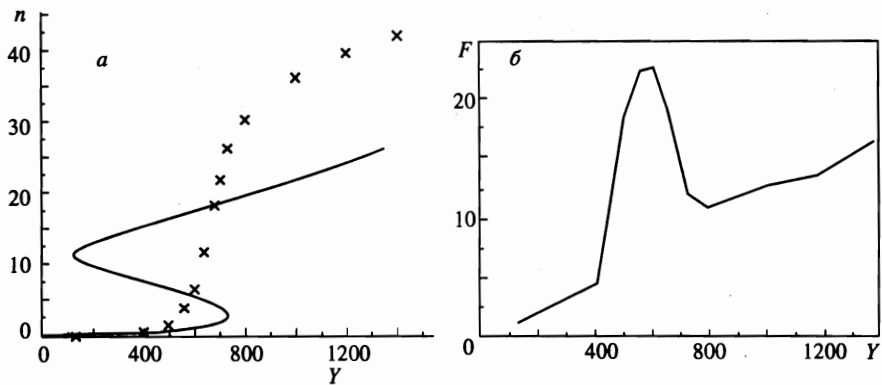
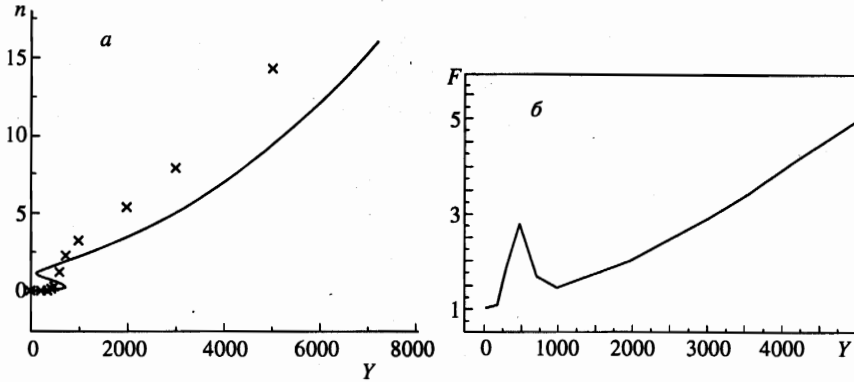
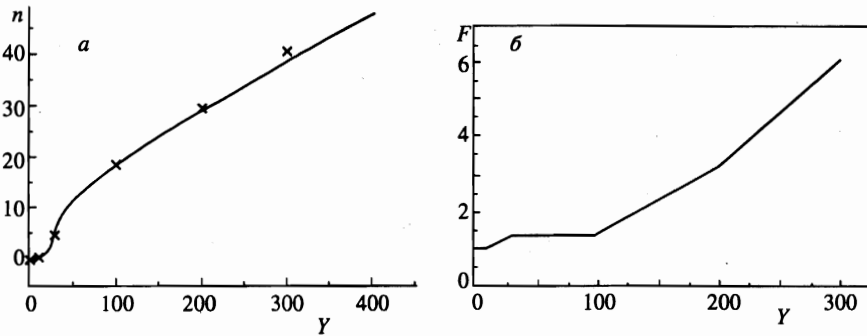


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, в случае абсорбционно-дисперсионной бистабильности при $C = 2200$, $n_s = 0.001$, $\delta_A = 100$, $\delta_c = 20.6$

времени ($gt \sim 3000$), чем вне ее ($gt \sim 100$). На рис. 2 показана зависимость среднего стационарного числа фотонов n от Y для случая абсорбционной бистабильности для большего значения параметра кооперативности C и меньшего числа фотонов насыщения n_s . Как и в предыдущем случае, фактор Фано (рис. 2б) резко возрастает в области полуклассической бистабильности, и гистерезис полностью отсутствует.

Особый интерес представляет собой функция распределения по числам фотонов $P(n) = \rho_{1n,n}$ в области полуклассической бистабильности. Из рис. 3 видно, что функция распределения фотонов имеет два максимума, т.е. состояние поля при $Y_{tp2} < Y < Y_{tp1}$ представляет собой суперпозицию двух состояний, соответствующих нижней и верхней устойчивым ветвям полуклассического уравнения состояния. Каждый из пиков функции распределения хорошо аппроксимируется гауссовской функцией, т.е. квантовое состояние поля представляет собой суперпозицию двух когерентных состояний: $|\psi\rangle = c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle$.

На рис. 4а изображена зависимость $n(Y)$ в случае абсорбционно-дисперсионной бистабильности ($\delta_c \delta_A > 0$ при $C \gg 1$). Как и в случае чисто абсорбционной бистабильности, квантовые флуктуации полностью снимают эффект бистабильности в рассматриваемом нами одноатомном случае. Из рис. 4а видно, что приближение малых флуктуаций нарушается также и вне области бистабильности полуклассической кри-

Рис. 5. То же, что и на рис. 4, при $n_s = 0.0001$ Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но при $C = 1100$, $n_s = 0.01$

вой: результаты точного расчета значительно отличаются от полуклассических данных также и при $Y > Y_{tp1}$. Почти линейный рост фактора Фано имеет место для больших Y (рис. 4б). Результаты расчета для того же значения параметра кооперативности C и отстроек δ_c и δ_A , но для меньшего значения n_s приведены на рис. 5. Этот случай соответствует большему значению отношения: $\gamma/\Gamma > 1$, т. е. случаю высоких потерь резонатора. Как и в случае высокой добротности, явление бистабильности в одноатомном случае снимается квантовыми флуктуациями.

Проведенные нами расчеты показали, что для значений параметров C , δ_c и δ_A , для которых в работе [4] было обнаружена наибольшая величина сжатия квадратур поля вне резонатора в многоатомном случае, в рассматриваемом нами одноатомном случае величина квадратурного сжатия внутри резонатора незначительна (менее 10%) и присутствует только при малых $Y < Y_{tp2}$. Столь же мало отличается от уровня дробового шума и фактор Фано для малых Y . Увеличение числа фотонов насыщения n_s при той же величине C , приводящее к росту среднего числа фотонов в резонаторе, заметно не увеличивает сжатие.

На рис. 6а дана зависимость $n(Y)$ в случае, когда полуклассическая бистабильность

отсутствует. В этом случае результаты точных расчетов мало отличаются от полукласических. Как следует из рис. 6б, пик флуктуаций, возникающий в области бистабильности, здесь отсутствует. С ростом Y фактор Фано монотонно растет, и для больших Y приближение малых флуктуаций также нарушается (см. рис. 6а).

4. ФЛУКТУАЦИИ КВАДРАТУР ПОЛЯ НА ВЫХОДЕ РЕЗОНАТОРА

Нами предполагается, что внутри резонатора лазера электромагнитное поле находится в состоянии с дискретными значениями частот (энергий фотонов), тогда как вне резонатора поле имеет непрерывный спектр. Вследствие этого следует предполагать, что временные флуктуации поля внутри резонатора являются источниками флуктуаций частотного спектра излучения, выходящего через зеркало резонатора. Поле вне резонатора может быть представлено в виде суммы выходящего из зеркала поля излучения лазера и шумового поля резервуара-термостата, падающего на зеркало, т. е. [21–23]

$$a^{out}(t) = b^{in}(t) + \sqrt{\gamma} a(t), \quad b^{in}(t) \propto \sum_j \sqrt{\omega_j} \exp(-i\omega_j t) b_j.$$

Гейзенберговский оператор $a^{out+}(t)a^{out}(t)$ представляет собой оператор числа фотонов, выходящих через зеркало в единицу времени. Перестановочные соотношения для операторов поля, составляющих непрерывный спектр вне резонатора (*out*), имеют вид [21–23]

$$[a^{out}(t + \tau), a^{out+}(t)] = \delta(\tau). \tag{26}$$

Введем канонически-сопряженные фазовые квадратуры поля вне резонатора, $X_+^{out}(\theta)$ и $X_-^{out}(\theta)$ для произвольной фазы θ локального осциллятора:

$$a^{out} = e^{-i\theta} [X_+^{out}(\theta) + iX_-^{out}(\theta)], \quad a^{out+} = e^{i\theta} [X_+^{out}(\theta) - iX_-^{out}(\theta)], \tag{27}$$

$$[X_+^{out}(\theta), X_-^{out}(\theta)] = \frac{i}{2}.$$

Корреляторы поля дискретной моды излучения внутри резонатора связаны с корреляторами полей непрерывного спектра вне резонатора в случае одного пропускающего зеркала следующим образом [20–22]

$$\langle a^+(t + \tau)a(t) \rangle^{out} = \gamma \langle a^+(t + \tau)a(t) \rangle. \tag{28}$$

Величиной, характеризующей статистику излучения, проходящего через выходное зеркало, является стационарный спектр флуктуаций [4–12] следующего вида:

$$V_{\pm}^{out}(\omega, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} [\langle X_{\pm}^{out}(t + \tau)X_{\pm}^{out}(t) \rangle - \langle X_{\pm}^{out}(t + \tau) \rangle \langle X_{\pm}^{out}(t) \rangle]. \tag{29}$$

Флуктуации (спектральная дисперсия) (29) вне резонатора, могут быть вычислены с помощью операторов поля внутри резонатора [21–23] с учетом (28):

$$V_{\pm}^{out}(\omega, \theta) = \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{4} [S_{12}(\omega) + S_{12}(-\omega) \pm 2(e^{2i\theta} S_{11}(\omega) + c.c.)], \tag{30}$$

где

$$S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} [\langle a^+(t+\tau)a(t) \rangle - \langle a^+(t+\tau) \rangle \langle a(t) \rangle] = S_{21}(-\omega), \quad (31a)$$

$$S_{11}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} [\langle a^+(t+\tau)a^+(t) \rangle - \langle a^+(t+\tau) \rangle \langle a^+(t) \rangle] = S_{22}^*(\omega). \quad (31б)$$

Поскольку двухвременные корреляторы в стационарных условиях являются четными функциями t , в (31) для расчетов использовалось cos-преобразование Фурье.

Как следует из (30), спектр флуктуаций числа фотонов поля на выходе резонатора состоит из слагаемых дробового шума (первое слагаемое в (30)) и нормально- и хронологически-упорядоченного спектра флуктуаций (второе слагаемое в (30)). Максимальное сжатие $V(\omega, \theta) < 1/4$ имеет место, при оптимальном значении фазы локального осциллятора для каждого значения частоты:

$$e^{-2i\theta} = \frac{S_{11}(\omega)}{|S_{11}(\omega)|},$$

тогда

$$V^{out}(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{4} [S_{12}(\omega) + S_{12}(-\omega) - 2|S_{11}(\omega)|]. \quad (32)$$

В стационарных условиях для корреляционных функций операторов поля внутри резонатора нетрудно получить следующее из квантовой теоремы регрессии выражение (см., например, [16])

$$\langle a^+(t+\tau)a(t) \rangle_{ss} = \text{Sp} [a^+ \tilde{\rho}(\tau)], \quad (33a)$$

$$\langle a(t+\tau)a(t) \rangle_{ss} = \text{Sp} [a \tilde{\rho}(\tau)], \quad (33б)$$

где оператор $\tilde{\rho}(\tau) \equiv \tilde{\rho}(t+\tau)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (9) с начальным ($t = 0$) условием

$$\tilde{\rho}_{j,n,m}(0) = \sqrt{n+1} \rho_{j,n+1,m}(t_{ss}), \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (34)$$

Как показано в [4] для абсорбционной бистабильности, в случае $\gamma \gg \Gamma$ заметное сжатие квадратур поля вне резонатора отсутствует. Для абсорбционно-дисперсионной бистабильности значительное сжатие имеет место в случае, когда $\delta_c \delta_A > 0$ на нижней устойчивой ветви. Оптимальные условия сжатия, присутствующего при больших отстройках и малых $X = \sqrt{\langle n \rangle / n_s}$, полученные в [4], имеют вид $X^2 / \delta_A^2 \ll 1$, $X^4 / \delta_A^3 \ll 1$. С целью сравнения величины квадратурного сжатия вне резонатора в многоатомном случае [4] нами проведены расчеты стационарного спектра флуктуаций для значений параметров $C = 1100$, $\delta_A = 100$, $\delta_c = 20.6$, для которых в [4] было обнаружено многократное сжатие в широком диапазоне значений $X(Y)$. Расчеты показали, что в отличие от многоатомного случая уровень сжатия в одноатомном случае чрезвычайно низок и составляет лишь несколько процентов для малых Y (рис. 7), с ростом Y сжатие исчезает как для абсорбционного, так и для абсорбционно-дисперсионного случаев.

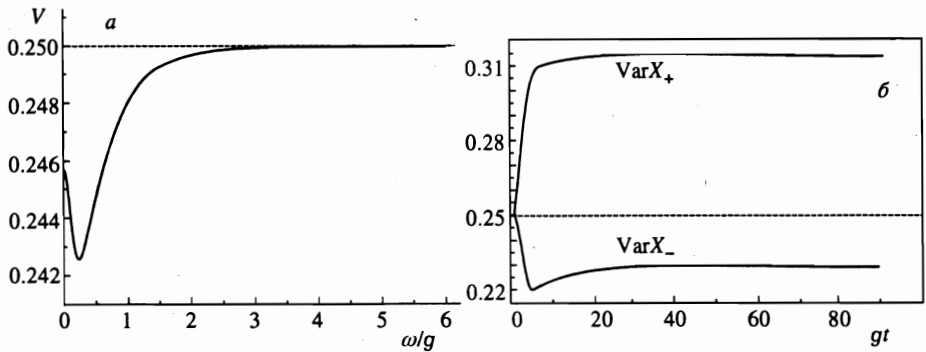


Рис. 7. а) Спектр сжатия излучения лазера вне резонатора при $C = 8$, $n_s = 1$, $Y = 7$, $\delta_c = \delta_A = 0$. б) Временные зависимости дисперсий канонически-сопряженных квадратур X_+ и X_-

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами проанализирована динамика кванвостатистических свойств излучения атома во внешнем поле без использования адиабатического исключения атомных переменных, а также в отсутствие предположения о малости квантовых флуктуаций. Показано, что как при высокой добротности резонатора, так и при больших потерях резонатора, явление бистабильности в одноатомном случае разрушается большими квантовыми флуктуациями поля. При этом в области бистабильности (область гистерезиса) присутствует резкий всплеск квантовых флуктуаций числа фотонов.

Показано, что внутри области полуклассической бистабильности поле находится в квантовом состоянии, представляющим собой суперпозицию двух когерентных состояний, соответствующих верхней и нижней устойчивым ветвям полуклассического уравнения состояния.

Обнаружено, что в отличие от многоатомного случая, при котором имеет место значительное квадратурное сжатие поля внутри и вне резонатора, в одноатомном случае при тех же условиях сжатие незначительно.

Показано, что приближение малых флуктуаций неприменимо в условиях оптической бистабильности как в области гистерезиса, так и на верхней устойчивой ветви полуклассической кривой состояния, соответствующей большим значениям внешнего поля.

Литература

1. G. J. Milburn and D. F. Walls, Opt. Comm. **39**, 401 (1981).
2. L. A. Lugiato and G. Strini, Opt. Comm. **41**, 67 (1982).
3. P. D. Drummond and D. F. Walls, Phys. Rev. A **23**, 2563 (1981).
4. M. D. Reid and D. F. Walls, Phys. Rev. A **32**, 396 (1985).
5. C. M. Savage and H. J. Carmichael, IEEE J. Quant. Electr. **QE-24**, 1495 (1988).
6. L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **33**, 4079 (1986).
7. M. J. Collett and D. F. Walls, Phys. Rev. A **32**, 2887 (1985).

8. L. A. Orozco, M. J. Raizen, Min Xiao, R. J. Brecha, and H. J. Kimble, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1490 (1987).
9. M. D. Reid and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **34**, 4929 (1986).
10. D. A. Holm and M. Sargent III, *Phys. Rev. A* **35**, 2150 (1987).
11. Min Xiao, H. J. Kimble, and H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1546 (1987).
12. D. M. Hope, D. E. McClelland, and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **41**, 5074 (1990).
13. C. Wang and R. Vyas, *Phys. Rev. A* **51**, 2516 (1995).
14. C. Wang and R. Vyas, *Phys. Rev. A* **54**, 4453 (1996).
15. S. Sarkar and J. S. Satchell, *Europhys. Lett.* **3**, 797 (1987).
16. К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, Москва (1986),
(C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, ed. by H. Haken, Springer-Verlag, Berlin (1985)).
17. А. В. Козловский, А. Н. Ораевский, *ЖЭТФ* **109**, 1524 (1996).
18. B. Daeubler, H. Risken, and L. Schoendorff, *Phys. Rev. A* **46**, 1654 (1992).
19. А. В. Козловский, А. Н. Ораевский, *Письма в ЖЭТФ* **67**, 755 (1998).
20. H. Haken, *Light*, Vol. 2, Elsevier Science Publ., Amsterdam (1985).
21. C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31**, 3761 (1985).
22. M. J. Collett and C. W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **30**, 1386 (1984).
23. H. J. Carmichael, *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1588 (1987).