

## НЕРАВНОВЕСНЫЕ ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ПРОСТЫХ СИСТЕМАХ

*П. С. Ланда, А. А. Заикин*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119899, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 апреля 1996 г.,  
после переработки 3 июня 1996 г.

Излагается теория и результаты исследования неравновесных индуцированных шумом фазовых переходов на простом примере физического маятника со случайно колеблющейся осью подвеса. Показано, что такие переходы приводят к возникновению более упорядоченного состояния системы. Обсуждается возможность различения индуцированных шумом колебаний и хаотических колебаний динамического происхождения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Индуцированные шумом фазовые переходы, подобные тем, о которых пойдет речь ниже, теоретически рассматривались Ван-ден-Броком с соавторами [1, 2] для систем, описываемых конечно-разностными моделями дифференциальных уравнений в частных производных определенного вида. Авторы [3] численно обнаружили индуцированные шумом двумерные структуры, которые можно рассматривать как своеобразную турбулентность. Это косвенно подтверждает высказанную ранее одним из авторов [4, 5] точку зрения, что турбулентность в незамкнутых потоках не является автоколебаниями, а индуцируется шумом.

Переходы, о которых здесь будет говориться, принципиально отличаются от рассматриваемых другими авторами (см., например, [6, 7]), которые под этим термином понимают появление за счет мультипликативного шума дополнительных максимумов в распределении вероятностей, главным образом, в системах, обладающих свойством мультистабильности. Заметим, что этот факт отмечен также в работах [1, 2].

Весьма интересно, что рассматриваемые индуцированные шумом фазовые переходы возможны в простейших системах, например в физическом маятнике со случайно колеблющейся осью подвеса. Исследование именно таких простых систем удобно, потому что, с одной стороны, удастся провести приближенное аналитическое рассмотрение, а с другой стороны, маятник представляет собой вполне реальный физический объект, что, в принципе, дает возможность проведения эксперимента.

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА, ВЫЗВАННЫХ СЛУЧАЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ОСИ ПОДВЕСА

Возможность возбуждения колебаний осциллятора при параметрическом случайном воздействии была впервые показана аналитически Стратоновичем и Романов-

ским [8, 9]. Затем такая же задача решалась Диментбергом [10]. Чтобы получить ограничение амплитуды возбуждаемых колебаний авторы этих работ принимали во внимание нелинейное трение. На самом деле, учет нелинейного трения, как будет показано ниже, не обязателен, поскольку ограничение амплитуды может происходить за счет нелинейности возвращающей силы. Однако такой учет удобен, так как при достаточно большой величине нелинейного трения он позволяет исключить случайные проворачивания маятника на угол кратный  $2\pi$ . Эти проворачивания затрудняют анализ полученных результатов.

Уравнение движения маятника со случайно колеблющейся осью подвеса при учете нелинейного трения может быть записано в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\beta(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 + \xi(t))\sin\varphi = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угловое отклонение маятника относительно положения равновесия,  $\omega_0 = \sqrt{mbg/J}$  — частота малых собственных колебаний маятника,  $J$  и  $m$  — соответственно момент инерции и масса маятника,  $b$  — расстояние от центра масс до оси подвеса,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta = H/2J$  — коэффициент затухания колебаний,  $H\dot{\varphi}$  — момент сил трения в линейном приближении,  $\alpha$  — коэффициент нелинейного трения,  $g\xi(t)$  — ускорение оси подвеса, представляющее собой сравнительно широкополосный случайный процесс с отличной от нуля спектральной плотностью на частоте  $2\omega_0$ . Будем считать, что интенсивность колебаний оси подвеса сравнительно невелика, так что колебания маятника можно считать настолько малыми, чтобы  $\sin\varphi$  можно было представить в виде

$$\sin\varphi \approx (1 - \gamma\varphi^2)\varphi, \quad (2)$$

где  $\gamma = 1/6$ .

Приближенное аналитическое решение интересующей нас задачи может быть получено, если предположить, что  $\beta/\omega_0 \sim \epsilon$ ,  $\gamma\varphi^2 \sim \epsilon$ , где  $\epsilon$  — некоторый условный малый параметр, который в окончательных выражениях можно положить равным единице. При этом уравнение (1) с учетом (2) удобно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \epsilon(-2\beta(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + \omega_0^2\gamma\varphi^3) - \sqrt{\epsilon}\xi(t)(1 - \epsilon\gamma\varphi^2)\varphi. \quad (3)$$

Здесь  $\sqrt{\epsilon}$  перед флуктуационным членом имеет тот же смысл, что и на стр. 346 книги Стратоновича [9]. Такая запись целесообразна, потому что при этом спектральная плотность шума, которая входит в окончательные выражения оказывается порядка  $\epsilon$ .

Уравнение (3) будем решать методом Крылова–Боголюбова с точностью до второго приближения по малому параметру  $\epsilon$ . Для этого положим  $\varphi = A \cos\psi + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$ , где  $\psi = \omega_0 t + \phi$ ,

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \\ \dot{\phi} &= \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$u_1, u_2, \dots, f_1, f_2, \dots, F_1, F_2, \dots$ , — неизвестные функции. Используя процедуру метода Крылова–Боголюбова для стохастических уравнений (см. [9, 11]), легко найти выражения для неизвестных функций  $f_1, f_2$  и  $F_1$  (функция  $F_2$  дает лишь малые добавки к функции  $F_1$  и поэтому не представляет интереса). Оставляя в функции  $f_2$  только нелинейный член и подставляя найденные выражения в уравнения (4), получаем

$$\dot{A} = \left( -\beta \left( 1 + \frac{3}{4} (\alpha\omega_0^2 + \gamma) A^2 \right) + \frac{\omega_0}{2} \overline{\xi \sin 2\psi} \right) A, \quad (5)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{3}{8} \omega_0 \gamma A^2 + \omega_0 \overline{\xi \cos^2 \psi}, \quad (6)$$

где черта над некоторым выражением означает операцию его усреднения по времени. Как показано в [9], в уравнении (5)

$$\overline{\xi \sin 2\psi} = \langle \xi \sin 2\psi \rangle + \zeta_1(t), \quad (7)$$

где угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю,  $\zeta_1(t)$  — случайный процесс, который можно считать белым шумом с нулевым средним значением и интенсивностью  $K_1$ , равной

$$K_1 = \frac{1}{2} \kappa(2\omega_0). \quad (8)$$

В выражении (8)

$$\kappa(2\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle \cos 2\omega_0\tau \, d\tau$$

— спектральная плотность процесса  $\xi(t)$  на частоте  $2\omega_0$ . Величина  $\langle \xi \sin 2\psi \rangle$  в формуле (7) вследствие наличия корреляции между  $\xi$  и  $\phi$  отлична от нуля и равна

$$\langle \xi \sin 2\psi \rangle = \frac{\omega_0}{4} \kappa(2\omega_0) = \frac{\omega_0}{2} K_1. \quad (9)$$

Аналогично, в уравнении (6)

$$\overline{\xi \cos^2 \psi} = \langle \xi \cos^2 \psi \rangle + \zeta_2(t), \quad (10)$$

где

$$\langle \xi \cos^2 \psi \rangle = \frac{\omega_0}{4} \int_{-\infty}^0 \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle \sin 2\omega_0\tau \, d\tau \equiv M, \quad (11)$$

$\zeta_2(t)$ , как и в (7), может рассматриваться как белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью  $K_2$ , равной

$$K_2 = \frac{1}{4} \left( \kappa(0) + \frac{1}{2} \kappa(2\omega_0) \right). \quad (12)$$

Значение  $M$  определяется характером случайного процесса  $\xi(t)$ : если  $\xi(t)$  является белым шумом, то  $M = 0$ ; если же  $\xi(t)$  имеет конечное время корреляции, например, когда его спектральная плотность равна

$$\kappa(\omega) = \frac{\alpha^2 \kappa(2\omega_0)}{(\omega - 2\omega_0)^2 + \alpha^2},$$

то

$$M = -\frac{\alpha\omega_0^2\kappa(2\omega_0)}{4(16\omega_0^2 + \alpha^2)}.$$

Учитывая (7)–(12), перепишем уравнения (5) и (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left(-\beta - \frac{3}{4}\beta\tilde{\gamma}A^2 + \frac{\omega_0^2}{4}K_1\right)A + \frac{\omega_0}{2}A\zeta_1(t), \\ \dot{\phi} &= -\frac{3}{8}\omega_0\gamma A^2 + \omega_0 M + \omega_0\zeta_2(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tilde{\gamma} = \gamma + \alpha\omega_0^2$ .

Уравнениям (13) соответствует следующее уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial A} \left( \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{4} \eta - \frac{3}{4} \beta \tilde{\gamma} A^2 \right) A w(A, \phi) \right) - \\ &- \omega_0 \left( \frac{3}{8} \gamma A^2 - M \right) \frac{\partial w(A, \phi)}{\partial \phi} + \frac{K_1 \omega_0^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial A^2} (A^2 w(A, \phi)) + \frac{K_2 \omega_0^2}{2} \frac{\partial^2 w(A, \phi)}{\partial \phi^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\eta = 1 - \frac{4\beta}{\omega_0^2 K_1}.$$

Стационарное решение уравнения (14), удовлетворяющее условию равенства нулю потока вероятности, не зависит от  $\phi$ . Его удобно записать в виде

$$w(A, \phi) = \frac{C}{2\pi A^2} \exp \left\{ \int_1^A \frac{2\eta}{A} dA - \int_0^A \frac{6\beta\tilde{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A dA \right\}. \quad (15)$$

Постоянная  $C$  определяется из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty w(A, \phi) A dA d\phi = 1.$$

Проинтегрировав (15) по  $\phi$  и вычислив интеграл под знаком экспоненты, найдем выражение для плотности распределения амплитуды колебаний:

$$w(A) = C A^{2\eta-1} \exp \left\{ -\frac{3\beta\tilde{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A^2 \right\}. \quad (16)$$

Из условия нормировки находим

$$C = 2 \begin{cases} \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\tilde{\gamma}} \right)^{-\eta} \frac{1}{\Gamma(\eta)} & \text{при } \eta > 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$w(A) = 2 \begin{cases} \left( \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\bar{\gamma}} \right)^{-\eta} \frac{1}{\Gamma(\eta)} A^{2\eta-1} \exp \left\{ -\frac{3\beta\bar{\gamma}}{\omega_0^2 K_1} A^2 \right\} & \text{при } \eta > 0 \\ \delta(A) & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

Тот факт, что при  $\eta \leq 0$  плотность распределения амплитуд оказалась дельтаобразной, связан с тем, что мы не учли аддитивного шума<sup>1)</sup>.

Используя выражение (17), можно найти  $\langle A \rangle$  и  $\langle A^2 \rangle$ :

$$\langle A \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\bar{\gamma}}} \frac{\Gamma(\eta + 1/2)}{\Gamma(\eta + 1)} \eta & \text{при } \eta > 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}, \quad (18)$$

$$\langle A^2 \rangle = \begin{cases} \frac{\omega_0^2 K_1}{3\beta\bar{\gamma}} \eta & \text{при } \eta > 0 \\ 0 & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}.$$

Отсюда видно, что при  $\eta > 0$  имеет место параметрическое возбуждение колебаний маятника за счет шумового воздействия. Это проявляется в том, что средние значения амплитуды и квадрата амплитуды становятся отличными от нуля. Если наблюдать такие колебания и не знать их причины, то можно прийти к заключению, что они представляют собой хаотические автоколебания. Естественно возникает вопрос, можно ли отличить наблюдаемый процесс от хаотических автоколебаний. Этому будет посвящен четвертый раздел.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ОСЬЮ ПОДВЕСА

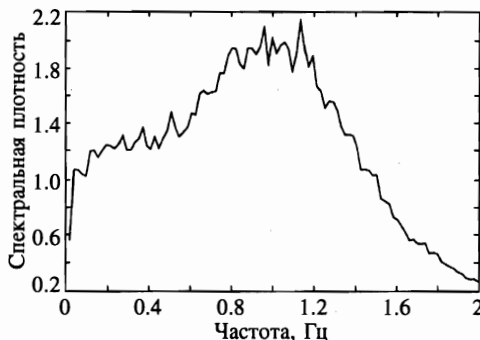
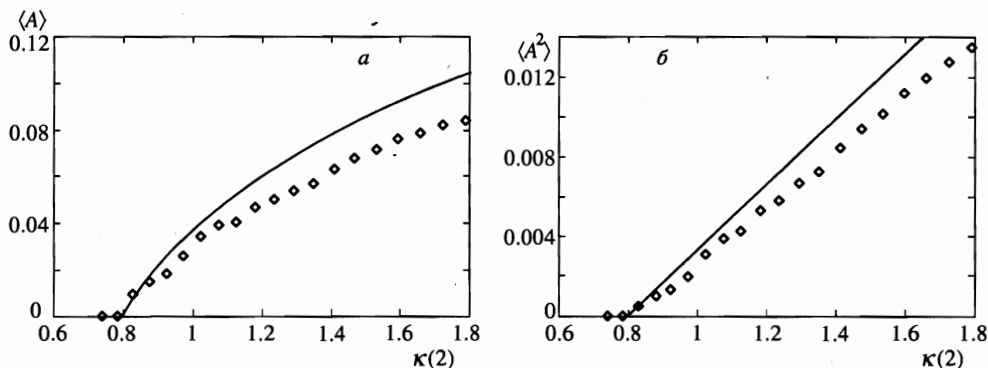
Поскольку полученные теоретические результаты, во-первых, не дают возможности найти форму колебаний маятника, индуцированных шумом, и, во-вторых, являются приближенными, мы численно исследовали решение уравнения

$$\ddot{\varphi} + 0.2(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\dot{\varphi} + (1 + \xi(t))\sin\varphi = 0, \quad (19)$$

где  $\xi(t)$  — достаточно широкополосный шум, спектральная плотность которого показана на рис. 1.

В уравнение (19) описывающий нелинейное трение член включен для того, чтобы избежать вращения маятника при интенсивностях шума, существенно превышающих критическое значение. Исследование показало, что при увеличении интенсивности шума выше критического значения ( $\kappa_{cr}(2) = 0.8$ ) средние значения мгновенной амплитуды колебаний маятника, вычисленной при помощи преобразования Гильберта (см., например, [12, 13]), и ее квадрата, как и следует из теории, становятся отличными от

<sup>1)</sup> Такой учет проведен Диментбергом [10].

Рис. 1. Спектральная плотность шума  $\xi(t)$ Рис. 2. Зависимости  $\langle A \rangle$  (а) и  $\langle A^2 \rangle$  (б) от спектральной плотности шума  $\kappa(2)$  (точки). Сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости, вычисленные по формуле (18)

нуля и затем увеличиваются. Соответствующие зависимости показаны на рис. 2. Мы видим, что на начальном участке они достаточно хорошо совпадают с теоретическими зависимостями, определяемыми формулой (18), которые были вычислены нами в предположении, что интенсивность шума близка к критическому значению.

В непосредственной близости от порога возбуждающиеся колебания весьма напоминают хаотические автоколебания, возникшие в результате потери устойчивости состояния равновесия за счет слияния, например, с неустойчивым предельным циклом и поэтому обладающие свойством перемежаемости [14]. Форма таких колебаний и проекции их фазового портрета на плоскость  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  показаны на рис. 3. Заметим, что турбулентность в области переходных чисел Рейнольдса также обладает свойством перемежаемости [15–17]. Не случайно, что первые обстоятельные работы по анализу этих явлений были написаны именно специалистами по турбулентности [18].

Если не вводить нелинейное трение, то уже при очень незначительном удалении интенсивности шума от критического значения маятник начинает время от времени проворачиваться на угол кратный  $2\pi$  (см. рис. 3б). Чтобы избежать этого неприятного

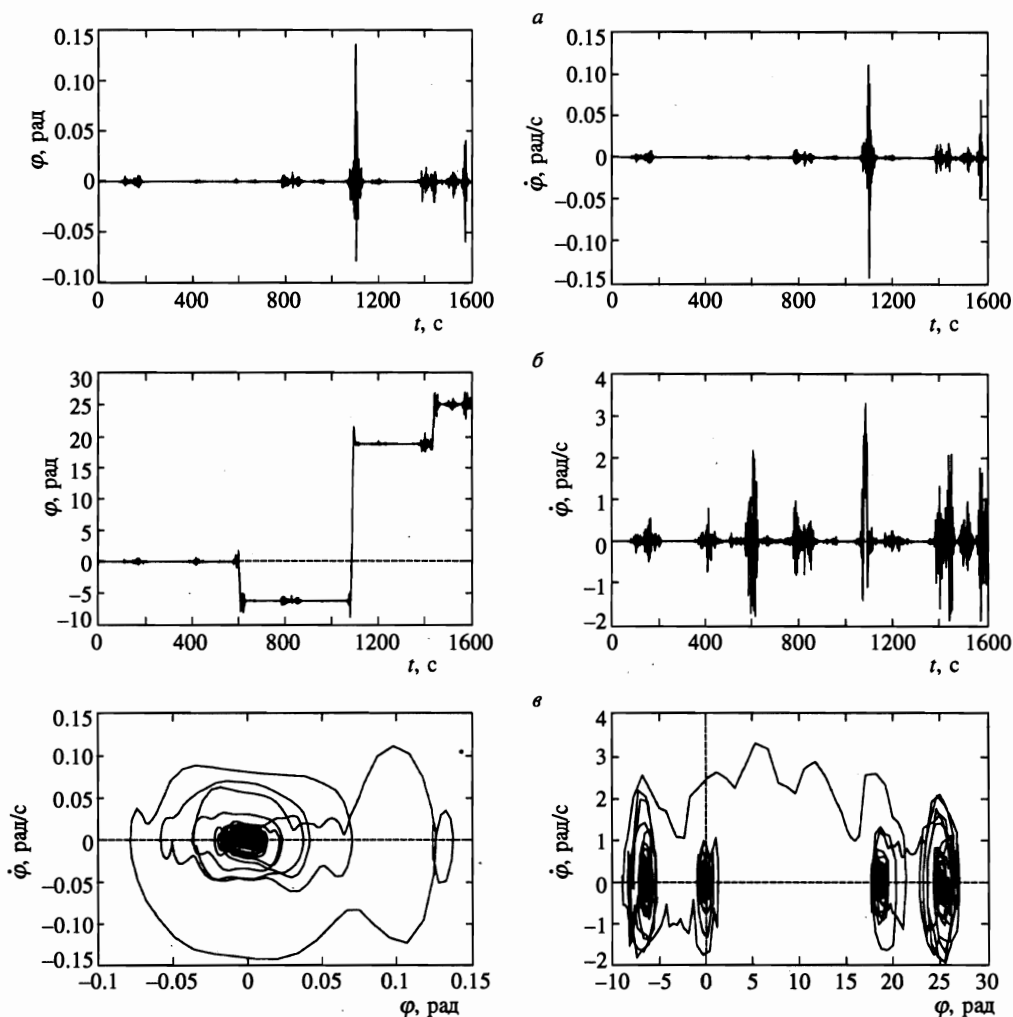


Рис. 3. Зависимости  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.01$  (а) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.06$  (б); проекции соответствующих фазовых портретов на плоскость  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  (в)

явления, мы проводили расчеты при этих интенсивностях шума с учетом нелинейного трения. При удалении от критического значения длительность участков, где маятник колеблется вблизи положения равновесия, постепенно уменьшается и при достаточно большой величине интенсивности шума такие участки исчезают. Это продемонстрировано на рис. 4.

Поскольку возбуждаемые колебания маятника вызваны исключительно шумовым воздействием, можно было бы ожидать, что им должна соответствовать бесконечно большая размерность соответствующего множества, построенного в некотором бесконечномерном пространстве. Однако проведенные нами расчеты корреляционной размерности как в обычном пространстве Такенса, так и с использованием методики хорошо приспособленного базиса [19] показали, что размерность является конечной. Об

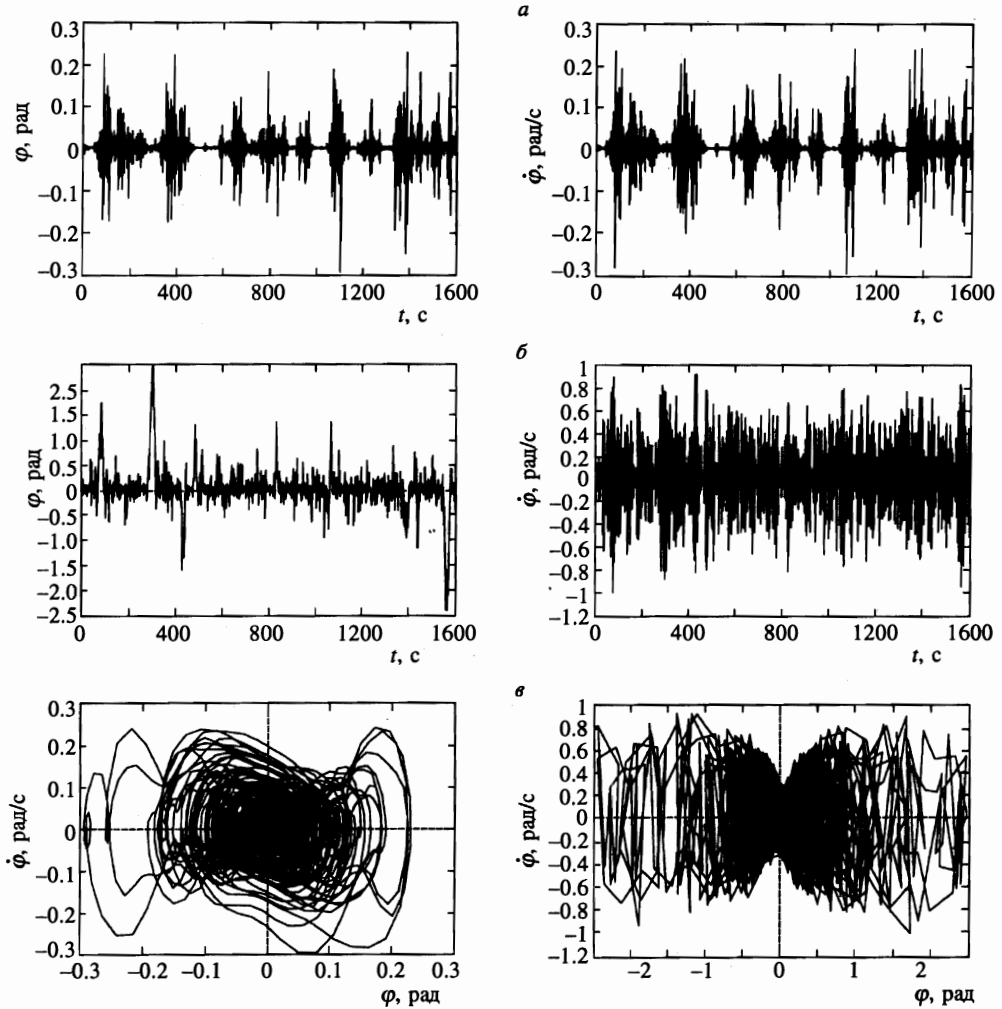


Рис. 4. Зависимости  $\phi(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  при  $\alpha = .100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (а) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (б); проекции соответствующих фазовых портретов на плоскость  $\phi(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  (в)

этом свидетельствует насыщение корреляционной размерности при увеличении размерности пространства вложения. Пример такого насыщения показан на рис. 5. С ростом интенсивности шума размерность слабо увеличивается, но остается конечной (см. рис. 6, где приведена зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от относительной спектральной плотности шума  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2)$ ). Таким образом, как показало наше исследование, размерность не позволяет отличить индуцированные шумом колебания от хаотических колебаний динамического происхождения, для которых размерность должна быть конечной. Пример таких колебаний рассмотрен ниже. Подчеркнем, что полученный результат противоречит широко принятым представлениям, согласно которым именно с помощью размерности можно отличить хаотические колебания в динамических системах от случайных колебаний, обусловленных шумом (см. [14]). Правда, в



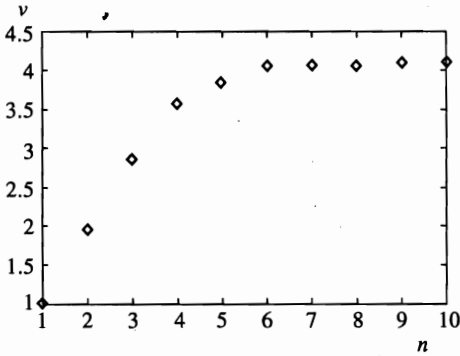


Рис. 5. Зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от размерности пространства вложения  $n$  при  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$ ,  $\alpha = 100$

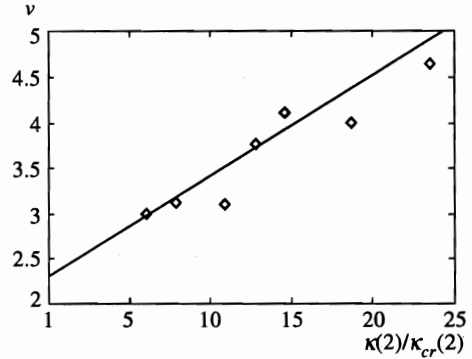


Рис. 6. Зависимость корреляционной размерности  $\nu$  от относительной спектральной плотности шума  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2)$  при  $\alpha = 100$  (ромбы). Сплошной линией показана линейная аппроксимация приведенной зависимости

последнее время появилось несколько работ (см., например, [20, 21]), авторы которых показывают, что шумовые сигналы, имеющие спектр типа  $1/f^\alpha$ , могут иметь конечную корреляционную размерность (по крайней мере, для  $1 \leq \alpha \leq 3$ ). Однако, как мы увидим дальше, спектр наблюдаемых индуцированных шумом колебаний не всегда имеет вид  $1/f^\alpha$ , тем не менее их размерность получилась конечной.

В связи с тем, что размерность, соответствующая индуцированным шумом колебаниям маятника, является конечной, можно утверждать, что под действием шума в некотором фазовом пространстве, характеризующем движение маятника, например, в пространстве Такенса, индуцируется аттрактор.

Для сравнения рассмотрим хаотические колебания маятника, вызванные достаточно большими периодическими колебаниями оси подвеса. С учетом нелинейного трения эти колебания описываются уравнением

$$\ddot{\varphi} + 2(1 + \alpha\dot{\varphi}^2)\beta\dot{\varphi} + (1 + B \cos 2t) \sin \varphi = 0, \tag{20}$$

где  $B$  — относительная амплитуда колебаний ускорения оси подвеса. Поведение решения уравнения (20) при  $\alpha = 0$  и изменении параметра  $B$  было детально изучено в работе [22] путем численного моделирования. Мы повторили расчеты, проведенные в этой работе, для ряда значений амплитуды  $B$ , при которых колебания маятника являются хаотическими. Пример таких колебаний приведен на рис. 7. Из рисунка видно, что маятник совершает нерегулярные вращения в ту и другую стороны, что приводит к медленному дрейфу угла поворота  $\varphi$ . Наличие нелинейного трения, если оно имеет достаточную величину, приводит к тому, что вращение исчезает, а маятник совершает только хаотические колебания относительно положения равновесия (рис. 8). Корреляционная размерность аттрактора, соответствующего указанным хаотическим колебаниям маятника, при  $B = 3$ ,  $\alpha = 0$  равна  $2.51 \pm 0.05$ , а при  $B = 3.5$ ,  $\alpha = 2$  она равна  $2.09 \pm 0.03$ . Мы видим, что наличие нелинейного трения существенно уменьшает размерность.

Значительный интерес представляют также спектры возбуждаемых колебаний. В случае возбуждения маятника гармоническим воздействием при отсутствии нелиней-

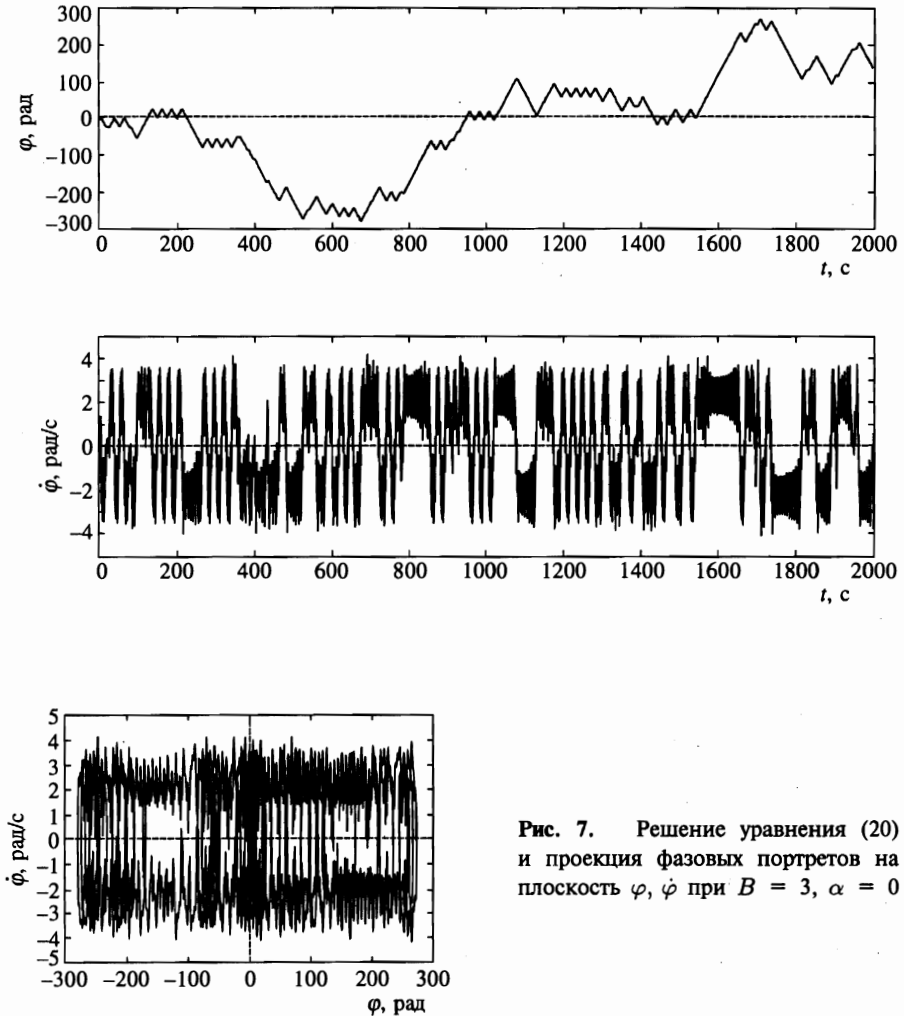


Рис. 7. Решение уравнения (20) и проекция фазовых портретов на плоскость  $\varphi, \dot{\varphi}$  при  $B = 3, \alpha = 0$

ного трения, когда маятник совершает нерегулярные вращения, спектр его колебаний содержит низкочастотную часть, обусловленную этими медленными вращениями; спектральная плотность убывает с ростом частоты, хотя и не монотонно (см. рис. 9а). При наличии нелинейного трения низкочастотная часть спектра оказывается существенно меньше, и в спектре имеются ярко выраженные максимумы на частотах кратных собственным (рис. 9б).

В случае маятника, возбуждаемого шумом, без учета нелинейного трения при интенсивностях шума близких к критическому значению спектр колебаний имеет максимум на частоте, близкой к собственной (рис. 10а). При увеличении интенсивности шума этот максимум уменьшается и в конце концов исчезает (рис. 10б). В результате спектр становится монотонно убывающим, подобным спектру фликкер-шума. При больших интенсивностях шума спектр может быть аппроксимирован степенной зависимостью вида  $1/f^n$ , где для  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  мы получили  $n = 12$  (рис. 10в). При наличии

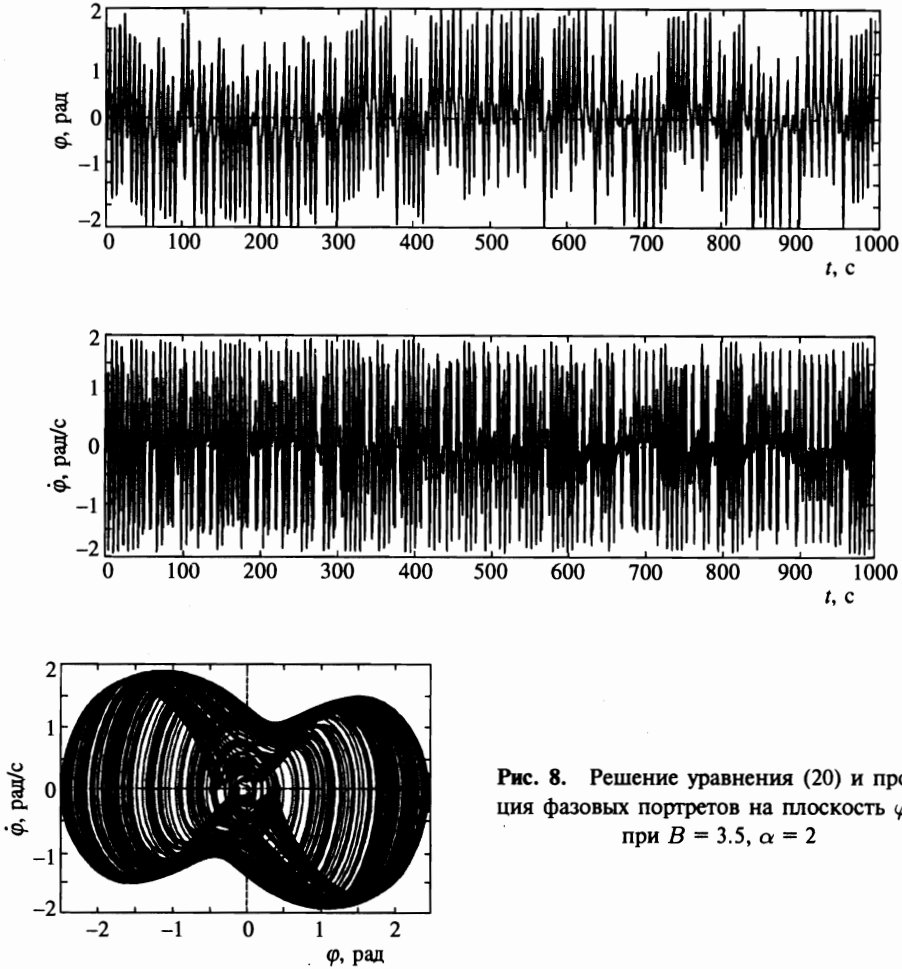


Рис. 8. Решение уравнения (20) и проекция фазовых портретов на плоскость  $\varphi, \dot{\varphi}$  при  $B = 3.5, \alpha = 2$

нелинейного трения поведение спектра качественно является таким же (см. рис. 9г, д и е). Только при достаточно большой интенсивности шума, когда спектр становится монотонно убывающим, в полулгарифмическом масштабе его удастся аппроксимировать двумя участками прямых (рис. 10ж). Корреляционные функции сигналов для параметров, соответствующих рис. 10г и е), приведены на рис. 11. Мы видим, что время корреляции сигналов, если его определить по ширине корреляционной функции на половинной высоте, достаточно мало, так что утверждение авторов работ [20, 21] о том, что шумовые сигналы со спектром  $1/f^\alpha$  имеют конечную размерность, потому что время корреляции для них очень велико, в нашем случае требует уточнения.

#### 4. КРИТЕРИЙ РЫТОВА-ДИМЕНТБЕРГА

Вернемся теперь к вопросу о том, можно ли отличить индуцированные шумом колебания от хаотических колебаний динамического происхождения. Подобный вопрос был

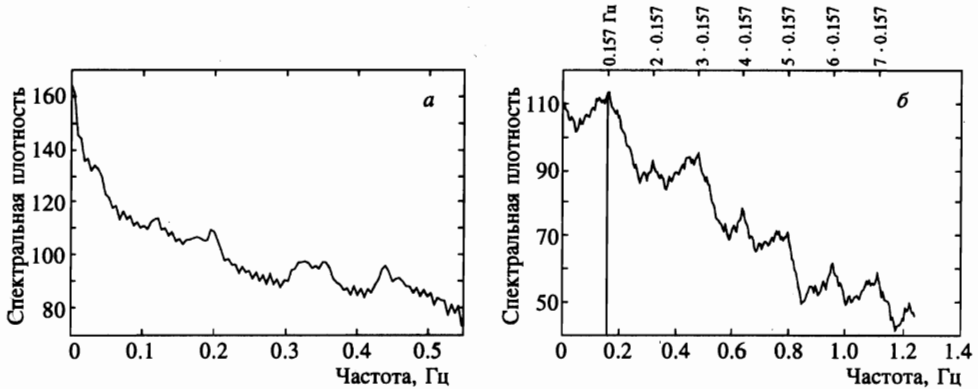


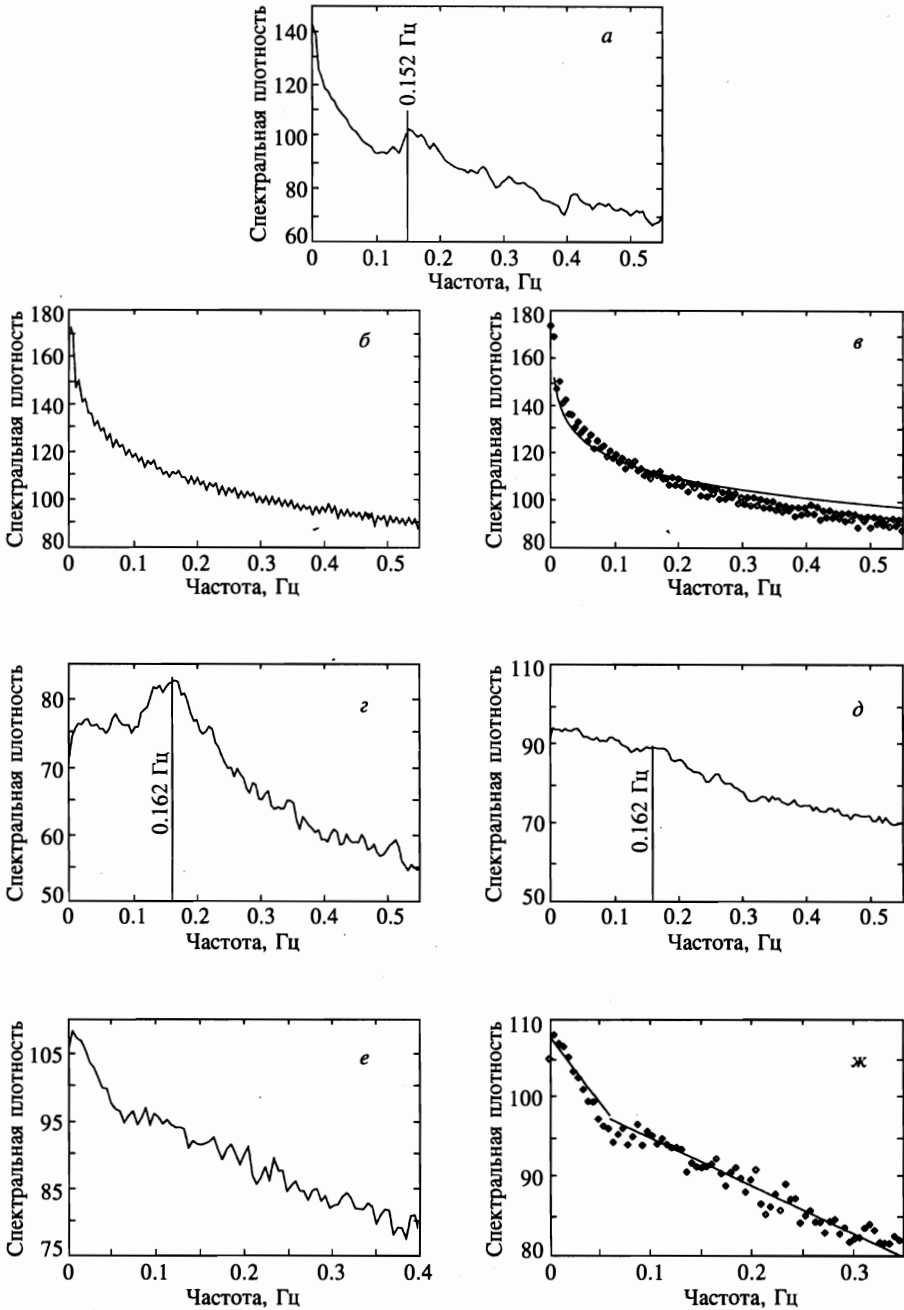
Рис. 9. Спектральные плотности решения уравнения (20) в логарифмическом масштабе при  $B = 3, \alpha = 0$  (а) и  $B = 3.5, \alpha = 2$  (б)

поставлен С. М. Рытовым [12] и позднее М. Ф. Диментбергом [23, 10] применительно к задаче различения шумового сигнала, пропущенного через линейный узкополосный фильтр, и периодических, но зашумленных автоколебаний<sup>2)</sup>. Там было показано, что в случае зашумленных автоколебаний плотность вероятностей для квадрата их мгновенной амплитуды, которую в случае широкополосного процесса можно определить путем преобразования Гильберта, должна иметь максимум при некотором конечном значении амплитуды, тогда как для шума, прошедшего через фильтр, она должна монотонно уменьшаться. Можно ожидать, что в случае хаотических колебаний динамического происхождения плотность вероятностей для квадрата мгновенной амплитуды также должна иметь максимум при одном или нескольких конечных значениях амплитуды. Такой результат действительно получен нами для рассмотренных выше хаотических колебаний маятника, вызванных периодическими колебаниями оси подвеса. На рис. 12 показана гистограмма распределения вероятностей квадрата мгновенной амплитуды колебаний, определенной путем преобразования Гильберта. Видно, что распределение вероятностей не является монотонно убывающим, а имеет несколько слабо выраженных максимумов.

В случае возбуждения колебаний маятника за счет случайных колебаний оси подвеса распределение вероятностей для величины  $x = \tilde{\gamma}A^2$ , как следует из теоретических результатов, приведенных во втором разделе, равно  $\tilde{w}(x) = w(\sqrt{x/\tilde{\gamma}})/2\sqrt{\tilde{\gamma}x}$ , где  $w(\sqrt{x/\tilde{\gamma}})$  определяется выражением (17). Зависимость  $\tilde{w}(x)$  для  $\eta = 0.2$  продемонстрирована на рис. 13а. Мы видим, что плотность вероятности для квадрата амплитуды, вычисленная аналитически, монотонно уменьшается с ростом амплитуды. Такой же результат получен и при численном моделировании уравнения (19) (рис. 13б и в).

Диментберг предложил также другой вариант своего критерия [10], который заключается в том, что вместо плотности вероятностей для квадрата мгновенной амплитуды можно анализировать плотность вероятностей для самого исследуемого процесса  $x(t)$ . На частном примере Диментберг показал, что если плотность вероятностей для положительных значений  $x$  не является монотонно убывающей функцией, то процесс

<sup>2)</sup> Источник шума, приводящий к зашумлению автоколебаний может быть как аддитивным, так и мультипликативным.



**Рис. 10.** Спектральные плотности решения уравнения (19) в логарифмическом масштабе при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.06$  (а) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  (б);  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (г),  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 4.6$  (д),  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (е). Аппроксимация логарифма спектральной плотности при  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 22$  зависимостью  $90 - 12 \lg f$  (в); аппроксимация логарифма спектральной плотности при  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  участками двух прямых:  $108 - 170f$  для  $f \leq 0.06$  и  $101 - 60f$  для  $f \geq 0.06$  (ж)

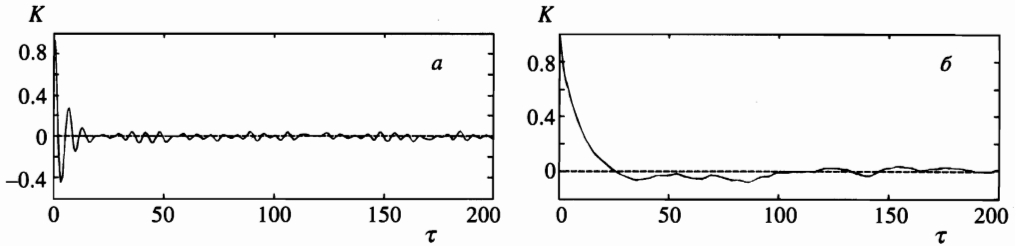


Рис. 11. Корреляционные функции для решений уравнения (19) при  $\alpha = 100$ ,  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (а) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (б)

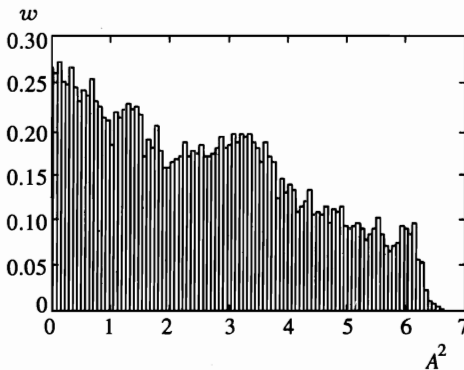


Рис. 12. Гистограмма распределения вероятностей квадрата мгновенной амплитуды колебаний для  $\alpha = 2$ ,  $B = 3.5$

$x(t)$  является автоколебательным. Но если плотность вероятностей для  $x > 0$  монотонно убывает, то однозначного ответа дать нельзя: процесс  $x(t)$  может быть либо шумом, прошедшим через фильтр, либо сильно зашумленными автоколебаниями. Следует отметить, что, хотя авторы об этом умалчивают, использование указанного критерия как в том, так и в другом вариантах, по-видимому, возможно только в том случае, если плотность вероятностей для  $x$  является четной функцией.

Мы проверили второй вариант критерия Диментберга как для колебаний маятника, индуцированных шумом, так и для хаотических колебаний, обусловленных гармоническим параметрическим воздействием. Оказалось, что несмотря на указанную автором неоднозначность и неполную симметрию распределений, этот вариант критерия также дает правильные результаты. Сказанное продемонстрировано на рис. 14, где показаны распределения вероятностей для угла поворота маятника  $\varphi$  в двух указанных выше случаях.

Таким образом, несмотря на существенно нелинейное преобразование шума, критерий Рытова–Диментберга в рассматриваемых нами примерах оказывается справедливым. Безусловно, вопрос о справедливости указанного критерия в общем случае и возможности его использования, когда распределение вероятностей для рассматриваемого процесса не является четной функцией, требует более детального исследования.

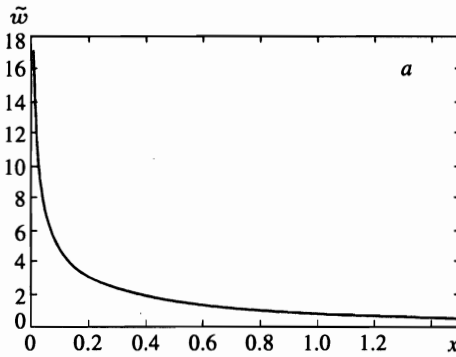


Рис. 13. Зависимость  $\tilde{w}(x) = (2\tilde{\gamma}^\eta/C) w(x)$  при  $\eta = 0.2$  (а) и гистограммы распределения вероятностей для  $\alpha A^2$ , полученные при численном решении уравнения (19) для  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 1.25$  (б) и  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (в)

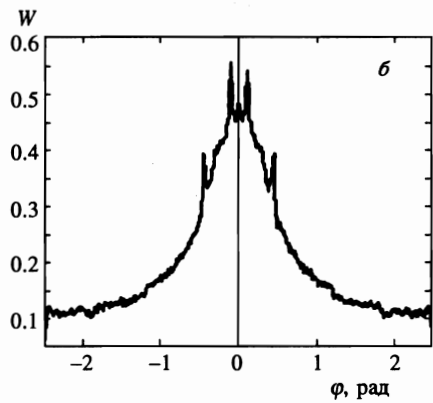
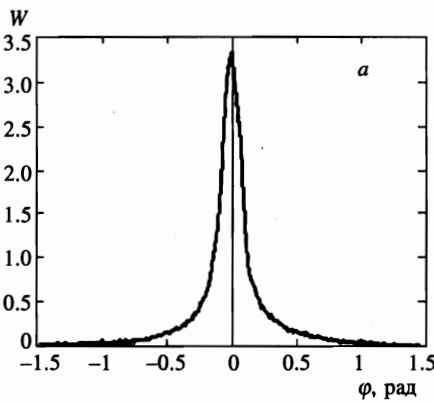
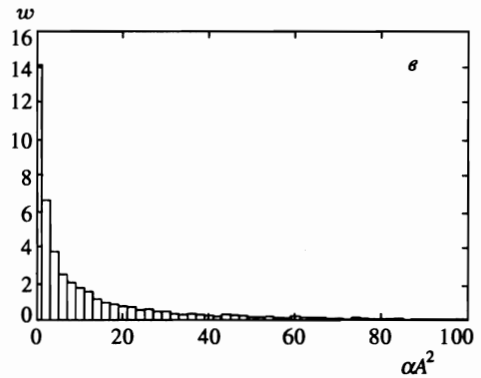
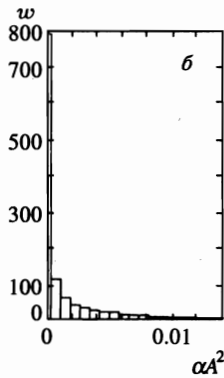


Рис. 14. Распределения вероятностей угла  $\varphi$  ( $W(\varphi)$ ) в случае индуцированных шумом колебаний маятника при  $\kappa(2)/\kappa_{cr}(2) = 14$  (а) и хаотических колебаний, вызванных гармоническим параметрическим воздействием (б)

## 5. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА СО СЛУЧАЙНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ОСЬЮ ПОДВЕСА КАК ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД. КРИТЕРИЙ КЛИМОНТОВИЧА ОБ УПОРЯДОЧЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Возбуждение колебаний маятника за счет шумового параметрического воздействия можно трактовать как возникновение в рассматриваемой системе при  $\eta = 0$  неравновесного фазового перехода второго рода. В качестве параметра порядка, характеризующего этот переход, можно принять либо  $\langle A \rangle$ , либо  $\langle A^2 \rangle$ . При таком выборе параметра порядка, как следует из (18) и рис. 2, критический индекс равен 1.

Для того чтобы убедиться, что при рассматриваемом переходе движение в системе становится более упорядоченным, воспользуемся критерием, предложенным Климонтовичем [24, 25], суть которого заключается в следующем. В исследуемой системе выбираются два состояния, соответствующие разным значениям некоторого управляющего параметра  $a$ . Одно из этих состояний, соответствующее  $a = a_0$ , условно принимается за состояние физического хаоса. Плотность вероятности для набора переменных  $X$ , описывающих состояние системы, обозначим  $w(X, a)$ . Представим  $w(X, a_0) \equiv w_0(X)$  в виде канонического распределения Гиббса

$$w_0(X) = \exp \left\{ \frac{F_0(D_0) - H(X, a_0)}{D_0} \right\}, \quad (21)$$

где  $F_0$  — свободная энергия,  $H(X, a_0)$  — функция Гамильтона,  $D_0$  — температура, которую можно положить равной единице. Обозначим

$$F_0(1) - H(X, a_0) = -H_{eff}$$

и примем  $H_{eff}$  за эффективную функцию Гамильтона, не зависящую от параметра  $a$ . Очевидно, что среднее значение эффективной функции Гамильтона, равное эффективной энергии, в общем случае зависит от  $a$ . Климонтович предлагает перенормировать начальное распределение вероятностей таким образом, чтобы эффективная энергия в начальном состоянии (при  $a = a_0$ ) и в конечном (при  $a = a_0 + \Delta a$ ) совпадали. Для этого вводится перенормированная плотность вероятности  $\tilde{w}_0(X, a, \Delta a)$ , удовлетворяющая условию

$$\int H_{eff} \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX = \int H_{eff} w(X, a_0 + \Delta a) dX. \quad (22)$$

В уравнении (22) плотность вероятности  $\tilde{w}_0(X, a, \Delta a)$ , как и  $w_0(X)$ , может быть представлена в виде канонического распределения Гиббса

$$\tilde{w}_0(X, a, \Delta a) = \exp \left\{ \frac{F(D) - H_{eff}}{D} \right\}, \quad (23)$$

где  $F(D)$  — эффективная свободная энергия,  $D$  — эффективная температура, зависящая от  $\Delta a$ . Неизвестная функция  $F(D)$  определяется из условия нормировки

$$\int \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX = 1, \quad (24)$$

а зависимость  $D$  от  $\Delta a$  находится из уравнения (22). Сравнивая (21) и (23), видим, что  $D(0) = 1$  и  $F(1) = 0$ .



Климонтвич утверждает, что если найденное таким образом значение  $D(\Delta a)$  больше единицы, то состояние системы при  $a = a_0 + \Delta a$  является более упорядоченным, чем состояние при  $a = a_0$ , т. е. в этом случае последнее правильно было принято нами за состояние физического хаоса<sup>3)</sup>. После того как состояние физического хаоса определено (будем считать, что оно соответствует значению параметра  $a$ , равному  $a_0$ ), Климонтвич предлагает ввести в качестве количественной меры степени упорядоченности движения при изменении  $a$  от  $a_0$  до  $a_0 + \Delta a$  разность энтропий

$$\tilde{S}_0 = - \int \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) \ln \tilde{w}_0(X, a, \Delta a) dX \quad \text{и} \quad S = - \int w(X, a_0 + \Delta a) \ln w(X, a_0 + \Delta a) dX.$$

Из условий нормировки и уравнения (22) следует, что

$$\Delta S = \tilde{S}_0 - S = \int w \ln \frac{w}{\tilde{w}_0} dX. \quad (25)$$

Заметим, что величина  $\Delta S$ , определяемая выражением (25), не может быть отрицательной, даже если бы мы неправильно выбрали состояние физического хаоса, т. е. получили бы, что  $D < 1$ . Но при этом она не характеризовала бы степень упорядоченности движения. Таким образом, как уже говорилось, критерием перехода к более упорядоченному состоянию является не  $\Delta S > 0$ , а условие  $D(\Delta a) > 1$ .

Вернемся теперь к нашей задаче и примем за физический хаос состояние, соответствующее  $\eta = \eta_0$ , а за состояние, степень упорядоченности которого мы хотим определить, примем состояние, соответствующее  $\eta > \eta_0$ . Полагая  $\eta, \eta_0 \ll 1$  и проделав все указанные выше вычисления, мы найдем, что  $D = 1 + 2(\eta - \eta_0)(1 + 2\eta + 3\eta^2 + \dots)$ , т. е. состояние физического хаоса выбрано нами правильно<sup>4)</sup>. Вычисление разности энтропий  $\delta S$  довольно громоздко, но можно показать, что  $\delta S \sim \eta^2(\eta - \eta_0)$ . Найденные выражения справедливы и при  $\eta_0 = 0$ . Таким образом, мы получили, что при рассмотренном выше фазовом переходе движение, с точки зрения критерия Климонтвича, становится более упорядоченным, хотя степень упорядоченности изменяется незначительно. С точки зрения примитивного здравого смысла этот результат кажется парадоксальным (как и известный результат Климонтвича, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному степень упорядоченности движения увеличивается). Потому-то изложенный критерий Климонтвича вызывал и вызывает резкое неприятие у многих исследователей, особенно тех, кто имеет дело исключительно с динамическими системами и не рассматривает флуктуаций. Однако, с точки зрения авторов, критерий Климонтвича содержит рациональное зерно в применении к тем системам, где флуктуации играют определяющую роль. Свои результаты относительно турбулентности Климонтвич трактует следующим образом. При развитии турбулентности все большая часть энергии хаотического движения молекул переходит в энергию значительно более упорядоченного крупномасштабного движения вихрей, т. е. доля энергии мелкомасштабного

<sup>3)</sup> Все это справедливо, если при обратном переходе от  $a$  к  $a - \Delta a$  значение  $D$  получается меньше единицы. В противном случае ситуация является более сложной. Как будет следовать из полученных ниже результатов, в рассматриваемом случае имеет место именно первая самая простая ситуация.

<sup>4)</sup> Из этого выражения следует, что если бы мы положили  $\eta < \eta_0$ , то величина  $D$  оказалась бы меньше единицы. Таким образом, та простая ситуация, о которой говорилось выше, действительно имеет место.

хаотического движения уменьшается. Поэтому степень упорядоченности движения в целом увеличивается. С этой трактовкой трудно не согласиться. Подобная же трактовка может быть дана и для рассмотренного индуцированного шумом фазового перехода в маятнике. Возможность и целесообразность использования критерия Климонтовича для систем, в которых наличие флуктуаций не является принципиальным, например для автоколебательных систем, вызывает у авторов сомнения.

## 6. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МАЯТНИКЕ СО СЛУЧАЙНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ОСЬЮ ПОДВЕСА

Хорошо известно, что при быстрых периодических колебаниях оси подвеса маятника его верхнее положение равновесия при определенных условиях становится устойчивым (см., например, [26–29]). Это явление наблюдалось экспериментально П. Л. Капицей [30, 31]. Ниже будет показано, что аналогичный эффект имеет место и при случайных достаточно высокочастотных колебаниях оси подвеса. Для этого рассмотрим уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + (1 + \xi(t)) \sin \varphi = 0. \quad (26)$$

Если спектр случайного процесса  $\xi(t)$  сосредоточен в достаточно высокочастотной области и не содержит составляющих в зонах параметрического резонанса, то флуктуации переменной  $\varphi$ , обусловленные случайными колебаниями оси подвеса, будут малыми. Полагая в (26)  $\varphi = \langle \varphi \rangle + \delta\varphi$ , где  $\delta\varphi \ll \langle \varphi \rangle$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \ddot{\varphi} \rangle + 2\beta\langle \dot{\varphi} \rangle + \sin\langle \varphi \rangle + \cos\langle \varphi \rangle \langle \xi(t) \delta\varphi \rangle &= 0, \\ \delta\ddot{\varphi} + 2\beta\delta\dot{\varphi} + \cos\langle \varphi \rangle \delta\varphi + \xi(t) \sin\langle \varphi \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Одно из стационарных решений уравнений (27) имеет вид

$$\langle \varphi \rangle = \pi, \quad \delta\varphi = 0. \quad (28)$$

Это решение соответствует верхнему положению равновесия маятника, устойчивостью которого мы интересуемся. Чтобы исследовать устойчивость, можно записать линеаризованные уравнения для малых отклонений от стационарного решения (28). Полагая  $\langle \varphi \rangle = \pi + \psi$ , из (27) получаем следующие линеаризованные уравнения для  $\psi$  и  $\delta\varphi$ :

$$\delta\ddot{\varphi} + 2\beta\delta\dot{\varphi} - \psi - \langle \xi(t) \delta\varphi \rangle = 0, \quad (29)$$

$$\delta\ddot{\varphi} + 2\beta\delta\dot{\varphi} - \delta\varphi - \xi(t)\psi = 0. \quad (30)$$

В установившемся режиме решение уравнения (30) имеет вид

$$\delta\varphi(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}} \int_{-\infty}^t (\exp(p_1(t-t')) - \exp(p_2(t-t'))) \xi(t')\psi(t') dt', \quad (31)$$

где  $p_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{1+\beta^2}$  — корни характеристического уравнения  $p^2 + 2\beta p - 1 = 0$ . Отсюда находим

$$\langle \xi(t)\delta\varphi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}} \int_{-\infty}^t (\exp(p_1(t-t')) - \exp(p_2(t-t'))) \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \psi(t') dt'. \quad (32)$$

Полагая в этом выражении  $t' - t = \tau$  и учитывая, что за время корреляции случайного процесса  $\xi(t)$  значение  $\psi$  не успевает существенно измениться, перепишем (32) в следующей форме:

$$\langle \xi(t)\delta\varphi \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}} \psi(t) \int_0^{\infty} (\exp(-p_1\tau) - \exp(-p_2\tau)) \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle d\tau. \quad (33)$$

Чтобы вычислить интеграл в этом выражении, зададим корреляционную функцию процесса  $\xi(t)$  в виде

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau,$$

где  $\sigma^2 = \kappa\kappa(\omega)/2$  — дисперсия случайного процесса  $\xi(t)$ ,  $\kappa(\omega)$  — значение спектральной плотности этого процесса на центральной частоте,  $\alpha$  — полуширина спектра процесса  $\xi(t)$ . При этом из (33) находим

$$\langle \xi(t)\delta\varphi \rangle = -\frac{\sigma^2 (\omega^2 - (p_1 + \alpha)(p_2 + \alpha))}{(\omega^2 + (p_1 + \alpha)^2)(\omega^2 + (p_2 + \alpha)^2)} \psi(t). \quad (34)$$

При условии  $\omega \gg 1, \beta, \alpha$  отсюда получаем

$$\langle \xi(t)\delta\varphi \rangle \approx -\frac{\sigma^2}{\omega^2} \psi(t). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (29), получаем следующее приближенное уравнение для  $\psi(t)$ :

$$\ddot{\psi} + 2\beta\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0, \quad (36)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\sigma^2/\omega^2 - 1}$  — собственная частота малых колебаний маятника относительно верхнего положения равновесия при  $\beta = 0$ . Из уравнения (36) следует, что среднее отклонение маятника от верхнего положения равновесия будет затухать, т. е. положение равновесия будет устойчивым, если частота  $\omega_0$  является действительной.

Переход к режиму стабилизации верхнего положения равновесия маятника, обусловленный высокочастотной вибрацией оси подвеса, как периодической, так и случайной, можно рассматривать как рождение в фазовом пространстве усредненной системы (отклонение от верхнего положения равновесия для этой системы описывается уравнением (36)) некоторого нового аттрактора, индуцированного высокочастотной вибрацией. В каком-то смысле про высокочастотную вибрацию можно забыть, а рассматривать новую динамическую систему, имеющую два устойчивых состояния равновесия. Именно такой подход развивается в книге И. И. Блехмана [29]. Там же дан и рецепт получения уравнений, описывающих эту новую систему. С другой стороны, процесс стабилизации верхнего положения равновесия маятника за счет высокочастотной случайной вибрации оси подвеса, как и процесс возбуждения колебаний, рассмотренный выше, можно трактовать как некоторый индуцированный шумом фазовый переход второго рода, в котором параметр  $\sigma^2$  играет роль «температуры», а действительная часть частоты  $\omega_0$  играет роль параметра порядка. Из выражения для  $\omega_0$  следует, что соответствующий критический индекс равен  $1/2$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы показали, что даже в такой простой системе как физический маятник под действием мультипликативного шума возможны неравновесные фазовые переходы второго рода, приводящие к появлению индуцированного аттрактора конечной размерности. Исследование таких переходов в других более сложных системах несомненно представляет большой физический интерес.

Авторы благодарны М. Г. Розенблюму, А. Б. Потапову и Д. А. Грибкову за любезно предоставленные программы для вычисления размерности различными методами и помощь в проведении некоторых расчетов. Особую благодарность авторы хотели бы принести Р. Л. Стратоновичу за весьма полезные замечания и советы.

## Литература

1. C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, J. Armero, and A. Hernández-Machado, *Phys. Rev. E* **49**, 2639 (1994).
2. C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994).
3. J. M. R. Parrondo, C. Van den Broeck, J. Buceta, and F. Javier de la Rubia, *Physica A* **224**, 153 (1996).
4. P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston (1996).
5. А. С. Гиневский, П. С. Ланда, *Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика*, **3**, 42 (1995).
6. W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transitions*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
7. I. I. Fedchenia, *Physica A* **125**, 577 (1984).
8. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, *Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат.* **3**, 221 (1958).
9. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике*, Сов. Радио, Москва (1961).
10. М. Ф. Диментберг, *Нелинейные стохастические задачи механических колебаний*, Наука, Москва (1980).
11. П. С. Ланда, *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*, Наука, Москва (1980).
12. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, Наука, Москва (1966), с. 264.
13. Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, *Разделение частот в теории колебаний и волн*, Наука, Москва (1983).
14. Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, Москва (1987).
15. S. Corrsin, *NACA Advis. Conf. Rep.* 3123 (1943).
16. J. Rotta, *Ing.-Arch.* **24**, 258 (1956).
17. Н. В. Никитин, *МЖГ* **14** (1994).
18. Y. Pomeau and P. Manneville, *Comm. Math. Phys.* **74**, 189 (1980).
19. P. S. Landa and M. G. Rosenblum, *Physica D* **48**, 232 (1991).
20. A. R. Osborne and A. Provenzale, *Physica D* **35**, 357 (1989).
21. J. Theiler, *Phys. Lett. A* **155**, 480 (1991).
22. J. V. McLaughlin, *J. Stat. Phys.* **24**, 375 (1981).
23. М. Ф. Диментберг, *Изв. АН СССР МТТ*, № 6 (1969).
24. Ю. Л. Климонтович, *Турбулентное движение и структура хаоса*, Наука, Москва (1990).
25. Ю. Л. Климонтович, *УФН* **158**, 59 (1989).

26. Н. Н. Боголюбов, в сб. Ин-та строит. механики АН УССР **14**, 9 (1950).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1965).
28. В. В. Болотин, В. И. Воробьев, В. А. Семенов, В. К. Чернов, МТТ № 1, 36 (1979).
29. И. И. Блехман, *Вибрационная механика*, Наука, Москва (1994).
30. П. Л. Капица, ЖЭТФ **21**, 588, (1951).
31. П. Л. Капица, УФН **44**, 7 (1951).